非粘性流体力学

董曾南
章梓雄　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统地讲述非粘性流体力学的基本理论，并讲述了以水流运动为主要对象的明槽流动和波浪理论。全书共分10章，并在附录中给出有关的一些基本数学知识。

本书可作为水利、水电、土木、环境、海洋、港口、海岸、船舶、机械及其他以流体，特别是以液体为对象的工程专业研究生流体力学课程教材或教学参考书。本书有助于提高广大水力学教师的理论修养。与作者于1998年由清华大学出版社出版的《粘性流体力学》相配合，可以帮助读者深入理解不可压缩流体力学的全部内容。本书也可作为有关专业从事科研、教学及工程工作的科技人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

非粘性流体力学/董曾南，章梓雄编著. —北京：清华大学出版社，2003

ISBN 7-302-06747-3

Ⅰ.非… Ⅱ.①董… ②章… Ⅲ.非粘性流体—流体力学 Ⅳ.O35

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第046106号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

责任编辑：潘敏贞

印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：140×203　**印张**：16.25　**字数**：407千字

版　　次：2003年9月第1版　2003年9月第1次印刷

书　　号：ISBN 7-302-06747-3/O·309

印　　数：1～3000

定　　价：38.00元(平装)

60.00元(精装)

序

本书是1998年出版的两位作者的力作《粘性流体力学》一书的姊妹篇。两本著作共同涵盖了不可压缩流体力学的全部内容。对主要感兴趣于非粘性流体即理想流体运动的读者，本书也自成体系。

这部著作基本上保持了《粘性流体力学》的写作风格。既照顾到理论的严谨，又注重物理概念的描述。循循善诱，深入浅出。是水利、土木、环境等专业的研究生、教师以及工程技术人员用于提高流体力学水平的一部好教材。

流体都是有粘性的。但所幸的是，我们日常生活中最常见的两种流体——水和空气——都是粘性较小的流体。作为一种近似，对流体忽略粘性在很多情况下是可以允许的。对于大雷诺数流动，则边界层以外的流动仍然可以按非粘性流动处理。这便给非粘性流体力学创造了广阔的应用空间。

非粘性流体力学，特别是势流理论部分，凝结了许多杰出的数学家和力学家的智慧，有许多精美的理论用于解决实际问题的光辉典范。两位作者基于他们多年从事教学和科研工作的经验，把这些理论的精华编制在一本适合于工程专业研究生学习的专著内，与书市上众多的流体力学教材卓然不同。

两位教授是本领域的权威，本书是由他们多年的教学、科研经验转化而来的精心之作，美不胜收。深信读者钻研之余，定然获益良多，故欣然为之作序，并以此将本书郑重推荐给广大读者。

中国科学院院士 林秉南

前　言

人类的生存、生活和发展都离不开以水和空气为代表的流体，因此作为研究流体运动规律的流体力学具有强大的生命力。流体力学自18世纪成为一门学问，二百余年来随着社会和生产的进步，得到了不断的充实与发展。航空航天技术的不断更新形成了近代的空气动力学。化学、材料和食品工业的发展以及近年来生命科学的突飞猛进使非牛顿流体力学得到了巨大的推动。核反应堆、高坝和推进器的技术使两相流力学更趋完善。紊流力学不仅在研究阻力和能量损失中具有重大意义，而且紊流力学对随机性和非线性的研究已广泛应用于现代社会科学和自然科学的各个领域。新的科学技术领域要求有新的流体力学分支诞生和发展，同时使得作为一切流体力学分支赖以生存和发展的流体力学基本理论得到不断的深化、完善和充实。

对于水利、土木、环境、海洋、港口等以及一切以水为对象的工程专业研究生，流体力学是一门重要的基础学科。对于从事有关专业的青年学者、工程师、教师，掌握深入系统的流体力学理论将有利于事业的发展。作者编著的《粘性流体力学》于1998年由清华大学出版社出版后，半年时间即告售罄，并于次年第2次印刷，说明社会上对这个层次的书籍需求甚殷。这一现象也鼓舞了作者下决心编写这本《粘性流体力学》的姊妹篇《非粘性流体力学》。这两本书的总和，可以比较全面地概括流体力学的基本理论。

《非粘性流体力学》(Inviscid Fluid Mechanics)以不考虑粘性的“理想流体”作为主要研究对象。全书共分10章。前3章讲述流体运动学、流体运动的基本方程及流体静力学；第4章介绍分析

和研究流体运动的一般方法——量纲分析与相似原理；第5章研究流体的有涡运动；自第6、7、8章深入阐述对研究理想流体运动极为重要的势流理论，包括平面势流、翼型理论和三维空间势流由于粘性的作用往往主要表现为物体壁面附近的边界层流动，而边界层以外的广大流域可由势流求解，因此势流理论具有十分的重要性；第9章和第10章给出了具有自由水面的明槽水流运动和水面波浪运动的基本现象与原理。本书中的某些部分也涉及流体的粘性，但有关粘性流体力学的主要内容则在《粘性流体力学》一书中阐述。

时代和科学的进步并没有降低一些基本理论的价值，对于流体力学也是如此。尽管由于电子计算机的迅猛发展，计算流体力学的突飞猛进，使得很多流体运动问题都可通过计算机得到解答，但是假如应用和运行这些计算机的人没有很好的流体力学基本理论的知识和修养，就难以判断结果的正确性并使之发展。做学问讲究"三知"，谓"知其始、知其中、知其终"。"始"是问题的提出，"中"是问题的求解，而"终"则是对结果的判断、理解和深化，是"三知"中最难的一个阶段，从而也可以体现出不同的水平。计算机帮助了人类而不能代替人类智慧的大脑，它主要完成的是"中"的阶段而不能代替人们对"始"和"终"的提出和认识。人类应驾驭计算机而不能为计算机所驾驭，这就是我们坚持年轻学者需要提高理论修养的一点管窥之见。

这本书于1998年开始编著，历时四年。本书仍将着力于对流体运动物理本质的揭示和阐述，并使用一些必要的数学工具。数学的描述和物理的解释紧密结合，使读者在认真研读本书后能有一个深厚的流体力学基础。本书的出版如能引导年轻学者抛开社会上的某些浮躁和急功近利的心绪，静下心来，以人类几千年积累的智慧武装自己并在为社会和人民服务的过程中用自己的智慧去丰富和深化流体力学的基本内容，则作者幸甚。

本书编写时所参考的有关书籍均列于全书最后的参考书目中，而在编写某些章节时所参考的一些专门书籍则在每章后列出。书中插图凡引自其他书籍或文献，均在图名后注明。引自全书参考书目中者用圆括弧()标明该书序号，引自某章后所列书目中者则用方括弧[]标明其序号。作者在这里向有关出版社和作者表示深切的感谢。

本书在成书过程中得到清华大学陈永灿教授、李玉柱教授、贺五洲教授和其他同仁的关心、支持和帮助。贺五洲教授提供了他讲授有关课程的讲稿提纲，余锡平教授通读了全部书稿，提出了不少有益的建议。中国科学院院士林秉南先生在我们出版了《粘性流体力学》一书后给了我们很多鼓励，现在又亲自为本书作序。在这里我们对他们表示衷心的感谢。

虽然作者在编著本书时殚尽心力、字斟句酌，但是我们人生的经历告诉我们，世界上没有完美无瑕的东西。何况我们能力有限，因此诚请读者批评指正。

董曾南
章梓雄　共识

2001年12月



董曾南　原籍天津静海县，1932年11月生。1955年毕业于清华大学水利工程系。现为清华大学水利水电工程系教授，水力学河流动力学专业博士生导师，清华大学学术委员会委员。并任中国水利学会名誉理事，《中国科学》等期刊编委。曾任国际水利工程与研究协会(International Association of Hydraulic Engineering and Research)理事、副主席，清华大学水利工程系主任，国家教委工科力学教学指导委员会委员，中国大百科全书《水利》卷编委，高速水力学国家重点实验室学术委员会副主任，中国水利名词审定委员会委员等。

多年来从事水力学，流体力学的教学和研究工作。曾为密云、三门峡、苏州河、三峡等多项重要水利工程进行水工模型试验研究。在水工建筑物明流边界层、明槽紊流及水工水力学等方面发表论文50篇。曾获国家教委科技进步二等奖3项、三等奖1项，北京市普通高校优秀教学成果一等奖，北京市优秀教师。主编《水力学》上册，合编有《粘性流体力学》。



章梓雄　原籍浙江鄞县，1944年11月生于上海市。1965年毕业于香港珠海书院。1967年于加拿大Saskatchewan大学获硕士学位。1971年于美国加州理工学院(Caltech)获博士学位。现任香港大学非线性力学中心主任及何东机械工程讲座教授，清华大学、西安交通大学、天津大学、中山大学，大连理工大学、四川大学、武汉大学及华南理工大学客座教授，上海交通大学及复旦大学顾问教授，中国科学院力学研究所、河海大学及北京航空航天大学名誉教授，美国土木工程师学会、美国机械工程师学会、香港工程师学会及英国机械工程师学会资深会员，香港工程院院士。

多年来从事粘性流动、波浪理论、非线性水波、两物体相互作用下的水动力学问题、通过多孔介质的流动、水下声学、海港设计与研究等方面的研究工作。发表论文258篇。合编有《粘性流体力学》。

目　录

绪论 …… 1
0.1　流体 …… 1
0.2　连续介质假设 …… 3
0.3　流体的粘性 …… 5
0.4　流体的压缩性 …… 8

第1章　流体运动学 …… 11
1.1　描述流体运动的两种方法 …… 11
1.1.1　拉格朗日法 …… 12
1.1.2　欧拉法 …… 13
1.1.3　两种流动描述方法之间的关系 …… 15
1.2　雷诺输运方程 …… 15
1.3　连续方程 …… 17
1.4　流线、迹线、色线和流管 …… 19
1.4.1　流线 …… 19
1.4.2　迹线 …… 22
1.4.3　色线 …… 23
1.4.4　流管 …… 25
1.5　环量、涡量，涡线和涡管 …… 26
1.5.1　环量与涡量 …… 26
1.5.2　斯托克斯定理 …… 27

1.5.3 涡线与涡管 …………………………… 31
1.6 亥姆霍兹速度分解定理…………………………… 33
1.7 有势流动…………………………………………… 38

第 2 章 流体运动的基本方程 …………………………… 42
2.1 流体中的作用力…………………………………… 43
2.2 纳维-斯托克斯方程 ……………………………… 45
2.2.1 雷诺第二输运方程 ………………………… 45
2.2.2 动量方程 …………………………………… 46
2.2.3 偏应力张量 ………………………………… 49
2.2.4 牛顿流体的本构方程 ……………………… 51
2.2.5 纳维-斯托克斯方程………………………… 54
2.2.6 纳维-斯托克斯方程的初始条件和
边界条件 ………………………………… 55
2.3 欧拉方程…………………………………………… 59
2.4 欧拉方程的积分——伯努利方程………………… 60
2.4.1 兰姆-葛罗米柯方程………………………… 60
2.4.2 伯努利方程 ………………………………… 62
2.4.3 无涡流动的伯努利方程 …………………… 66
2.4.4 恒定总流的伯努利方程 …………………… 67
2.4.5 当考虑动水压强时的伯努利方程 ………… 73

第 3 章 流体静力学 …………………………………… 76
3.1 静止流体的平衡方程式…………………………… 76
3.1.1 平衡方程式 ………………………………… 76
3.1.2 流体静止的质量力条件 …………………… 77
3.1.3 静止流体的分界面 ………………………… 79
3.1.4 重力场中的平衡方程式 …………………… 80

3.1.5 巴斯加原理 …… 81
3.2 重力场中静止液体作用于物体壁面上的合力 …… 82
3.2.1 平面上的静水总压力 …… 82
3.2.2 曲面上的静水总压力 …… 85
3.2.3 潜体与浮体所承受的静水总压力 …… 85
3.3 潜体与浮体的平衡与稳定 …… 87
3.3.1 潜体的平衡及其稳定性 …… 87
3.3.2 浮体的平衡及其稳定性 …… 88
3.3.3 油船的平衡稳定性 …… 92
3.4 非惯性坐标系中的静止液体 …… 94
3.4.1 直线等加速运动容器中的静止液体 …… 94
3.4.2 等速旋转运动容器中的静止液体 …… 96
参考书目 …… 98

第4章 量纲分析与相似原理 …… 99
4.1 量纲 …… 100
4.2 量纲和谐原理 …… 103
4.3 π定理 …… 107
4.4 流动相似与相似理论 …… 112
4.4.1 流动相似 …… 113
4.4.2 相似条件 …… 116
4.5 相似理论的应用 …… 121
4.5.1 流体运动中的相似准数 …… 121
4.5.2 模型相似准则 …… 127
参考书目 …… 131

第5章 有涡流动 …… 132
5.1 有涡流动 …… 132

5.2 亥姆霍兹涡量方程 ………………………………… 135
5.3 开尔文定理 ……………………………………… 140
5.3.1 开尔文定理……………………………… 140
5.3.2 拉格朗日定理…………………………… 142
5.4 亥姆霍兹定理 …………………………………… 142
5.4.1 涡线保持定理…………………………… 143
5.4.2 涡管强度保持定理……………………… 144
5.5 旋涡的产生、发展和消失………………………… 145
5.5.1 流体粘性的作用………………………… 145
5.5.2 斜压流体中旋涡的形成………………… 148
5.5.3 外力无势所产生的旋涡运动…………… 151
5.6 旋涡的诱导流速 ………………………………… 154
5.6.1 不同旋涡的诱导流速…………………… 155
5.6.2 由涡量场诱导流速场的普遍公式……… 161

第6章 平面势流………………………………………… 167
6.1 流速势函数 ……………………………………… 167
6.2 流函数 …………………………………………… 171
6.3 流网 ……………………………………………… 174
6.4 复势与复速度 …………………………………… 177
6.5 几个基本的平面势流 …………………………… 180
6.5.1 均匀流动………………………………… 180
6.5.2 源、汇与涡 ……………………………… 181
6.5.3 绕角流动………………………………… 184
6.5.4 偶极子…………………………………… 189
6.6 圆柱绕流 ………………………………………… 193
6.6.1 无环量圆柱绕流………………………… 193
6.6.2 有环量圆柱绕流………………………… 196

6.7 柱体受力的布拉休斯公式 …… 201
6.8 镜像定理 …… 205
6.8.1 平面壁镜像定理 …… 205
6.8.2 对源 …… 208
6.8.3 圆柱壁镜像定理——米尔-汤姆逊圆定理 …… 211
6.9 绕圆柱流动中的作用力 …… 214
6.9.1 无环量圆柱绕流的作用力——达朗贝尔疑题 …… 214
6.9.2 有环量圆柱绕流的作用力——库塔-儒可夫斯基升力 …… 215

第7章 翼型理论 …… 218
7.1 翼型的几何参数与流体动力特性 …… 218
7.2 保角变换 …… 224
7.2.1 保角变换基本原理 …… 224
7.2.2 源、汇与涡的变换 …… 228
7.2.3 简单解析函数 …… 229
7.3 儒可夫斯基变换 …… 233
7.3.1 儒可夫斯基变换式 …… 233
7.3.2 均匀流绕椭圆流动 …… 235
7.3.3 均匀流绕平板流动 …… 239
7.3.4 有冲角均匀流绕过平板的流动 …… 241
7.4 库塔-儒可夫斯基条件 …… 244
7.5 对称儒可夫斯基翼型 …… 253
7.6 圆弧翼型 …… 259
7.7 儒可夫斯基翼型 …… 264
7.8 施瓦兹-克里斯托弗变换 …… 267

7.8.1 简单封闭多边形……………………………… 267
7.8.2 施瓦兹-克里斯托弗变换 ………………… 267
7.8.3 施瓦兹-克里斯托弗变换举例 …………… 271
参考书目………………………………………………… 273

第8章 空间势流……………………………………… 274
8.1 轴对称空间势流的流速势与流函数 ……………… 274
8.1.1 圆柱坐标表示的空间势流………………… 275
8.1.2 球坐标表示的空间势流…………………… 277
8.2 流速势函数方程式的解 ………………………… 280
8.3 基本空间势流 …………………………………… 282
8.3.1 均匀流动……………………………………… 282
8.3.2 原点的源(或汇)…………………………… 284
8.3.3 偶极子………………………………………… 286
8.4 三维半体绕流 …………………………………… 287
8.5 圆球绕流 ………………………………………… 289
8.6 兰金体绕流 ……………………………………… 291
8.7 线源 ……………………………………………… 294
8.8 巴特勒球定理 …………………………………… 296
8.9 格林定理 ………………………………………… 299
8.9.1 内部流动……………………………………… 299
8.9.2 外部流动……………………………………… 300
8.10 达朗贝尔疑题…………………………………… 304
8.11 附加质量………………………………………… 307

第9章 明槽水流运动………………………………… 313
9.1 明槽水流运动的基本方程 ……………………… 314
9.1.1 简述…………………………………………… 314

9.1.2 明槽水流运动的微分方程式 …… 315
9.1.3 明槽总流方程 …… 318
9.2 明槽水流运动的两种流态——缓流和急流 …… 323
9.2.1 明槽中的微波波速 …… 323
9.2.2 比能、临界水深 …… 329
9.3 明槽均匀流与渐变流 …… 332
9.3.1 明槽均匀流动 …… 332
9.3.2 临界底坡 …… 335
9.3.3 明槽恒定非均匀渐变流动 …… 337
9.4 明槽水流运动中两种流态的过渡 …… 343
9.4.1 由缓流到急流的过渡——水跌 …… 343
9.4.2 由急流到缓流的过渡——水跃 …… 348
9.5 缓流与急流中的弯道水流 …… 356
9.5.1 缓流弯道水流 …… 356
9.5.2 急流弯道水流 …… 361
9.6 明槽水流非恒定流动 …… 366
9.6.1 非恒定渐变流动 …… 367
9.6.2 非恒定急变流动 …… 371
9.7 明槽水流运动的相似 …… 375
参考书目 …… 377

第10章 波浪运动 …… 378
10.1 概述 …… 379
10.2 波浪运动基本方程与边界条件 …… 382
10.2.1 连续方程 …… 382
10.2.2 运动方程——欧拉方程 …… 382
10.2.3 波浪运动的边界条件 …… 383
10.2.4 波浪运动的初始条件 …… 387

10.3 微幅波理论………………………………………… 387
10.3.1 微幅波理论中的控制方程和
边界条件………………………………………… 388
10.3.2 微幅进行波………………………………… 391
10.3.3 微幅进行波的特性………………………… 393
10.4 微幅波的叠加………………………………………… 405
10.4.1 驻波………………………………………… 405
10.4.2 不完全驻波………………………………… 411
10.4.3 波群………………………………………… 412
10.5 水波的反射、折射和绕射 ………………………… 416
10.5.1 水波的反射………………………………… 416
10.5.2 水波的折射………………………………… 419
10.5.3 水波的绕射………………………………… 425
10.6 恒定流动中的波…………………………………… 430
10.7 船行波与兴波阻力………………………………… 435
10.7.1 船行波……………………………………… 435
10.7.2 兴波阻力…………………………………… 442
参考书目……………………………………………………… 448

附录Ⅰ 场论与张量基本运算知识……………………… 449
Ⅰ.1 标量、向量与张量 ………………………………… 449
Ⅰ.2 场…………………………………………………… 449
Ⅰ.3 标量场的梯度……………………………………… 450
Ⅰ.4 向量场的散度……………………………………… 451
Ⅰ.5 向量场的旋度……………………………………… 451
Ⅰ.6 高斯公式…………………………………………… 452
Ⅰ.7 张量的表示法、二阶张量 ………………………… 453
Ⅰ.8 单位张量 $\boldsymbol{\delta}$ 和置换张量 ϵ_{ijk} ………………………… 456

Ⅰ.9 二阶对称张量与二阶反对称张量 …………………… 457
Ⅰ.10 并矢 ……………………………………………… 458
Ⅰ.11 二阶张量的代数运算 …………………………… 458
Ⅰ.12 雅可比行列式 …………………………………… 460

附录Ⅱ 正交曲线坐标 ………………………………… 463
Ⅱ.1 正交曲线坐标、拉梅系数 ………………………… 463
Ⅱ.2 正交曲线坐标单位向量 …………………………… 465
Ⅱ.3 正交曲线坐标中的散度 …………………………… 467
Ⅱ.4 正交曲线坐标中的旋度 …………………………… 468
Ⅱ.5 圆柱坐标 …………………………………………… 469
Ⅱ.6 球坐标 ……………………………………………… 470

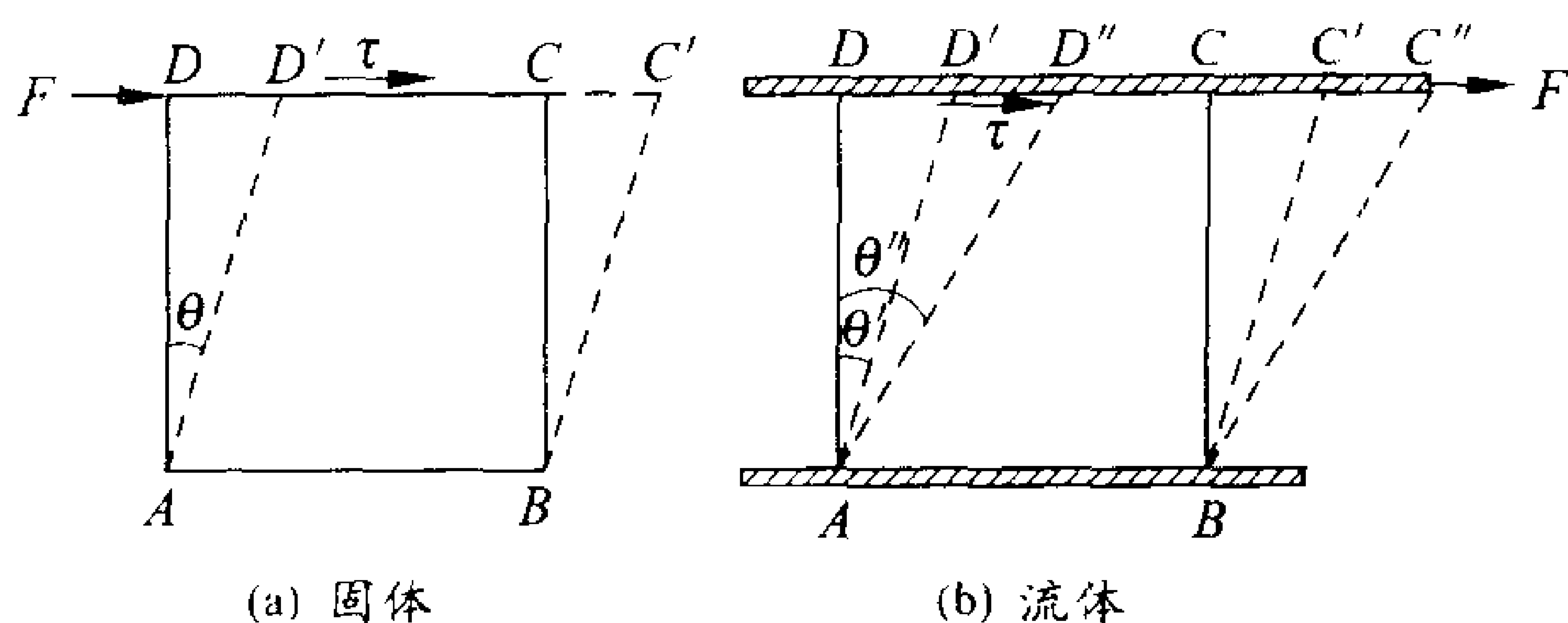
附录Ⅲ 复变函数基本知识 …………………………… 472
Ⅲ.1 复数 ………………………………………………… 472
Ⅲ.2 复数的运算 ………………………………………… 473
Ⅲ.3 复变函数 …………………………………………… 476
Ⅲ.4 解析函数 …………………………………………… 476
Ⅲ.5 奇点 ………………………………………………… 478
Ⅲ.6 科西定理 …………………………………………… 478
Ⅲ.7 复变函数的高阶导数 ……………………………… 479
Ⅲ.8 用级数表示解析函数 ……………………………… 479
Ⅲ.9 留数定理 …………………………………………… 481
Ⅲ.10 奇点的类型 ……………………………………… 481
Ⅲ.11 留数的计算 ……………………………………… 482
参考书目 ……………………………………………… 483
名词索引 ……………………………………………… 485
人名索引 ……………………………………………… 501

绪　论

流体力学是研究流体运动规律的科学。所谓流体运动，不只是流体的机械运动，而且还包括了流体的其他运动形式，例如热运动、分子运动等。本书着重研究流体的机械运动，如流体在时间和空间中位置的变化，包括：流动、转动、变形、振动、波动、扩散等。流体的平衡或静止是流体机械运动的特殊情况。机械运动是物质运动的最基本的形式，使流体运动状态发生变化的原因是作用在流体上的力。流体和流动边界（包括固体边界和其他流体的边界）的相互作用是影响流体运动的外在的重要因素。

0.1 流　　体

根据物质的分子或原子集团在一定温度和压强条件下的聚集状态而将物质分为固体、液体和气体，其中液体和气体合称为流体(fluid)。固体具有一定的形状，受力后其形状会有改变，变化的程度与作用力有确定性的关系。例如图 0-1(a)中当固体 $ABCD$ 受到剪切力 F 的作用产生变形，变形后为 $ABC'D'$。在固体的弹性阶段，变形角 θ 与切应力 $\tau=F/A$ 成线性关系，$\tau=\gamma\theta$。A 为单宽物体上表面 CD 的面积，γ 为剪切弹性系数。θ 角只与切应力 τ 有关而与切应力作用的时间无关。作用力取消后，变形消失，固体又恢复为原有的形状。流体则不然，图 0-1(b)中上下两固体平板中的液体 $ABCD$，当液体上部平板受力 F 的作用向右方移动，从而有



(a) 固体　　(b) 流体

图 0-1　固体和流体微元的变形

切应力 $F/A=\tau$ 作用于液体上表面，液体产生变形。但在流体中，与切应力成比例的不是变形量的本身而是变形速率，$\tau=F/A=\mu\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$。式中：$u$ 为流速，μ 为粘性系数或称粘度(coefficient of viscosity)。由此可见：只要有切应力作用于流体，则无论切应力多么小，流体都会连续不断地变形而不能休止。变形的大小不只决定于切应力的大小，而且决定于切应力作用的时间。剪切力取消后流体不能恢复原来的形状。流体中各部分之间容易发生相对运动，这一特性称为流动性(fluidity)。流体的流动性是其区别于固体的主要特征。

对固体而言，往往当切应力大于一定数值，超过固体的屈服点(yield point)后，即使切应力维持不变，变形也会持续不断地发展，这时固体已进入塑性状态。甚至于在某些特定条件下，固体状态和流体状态的物质可以互相转化。例如沥青(asphalt)，一般情况下它像固体，但当外力长时间作用于沥青上时，它也会持续变形而表现如流体。此外如油漆、胶体、某些生物制品如果冻、蛋清等也都有这种二重性。如果说弹性固体是一种具有“完全记忆”(perfect memory)的物质，外力消失后会完全恢复原有的形状；那么普通的流体则是“零记忆”(zero memory)物质；像沥青等所谓粘弹性物质则具有“部分记忆”(partial memory)。

流体中区别液体和气体的重要特征是压缩性(compressibility)。

其实与气体比较而言，固体也是压缩性很小的物质。因此固体与液体以其压缩性很小而统称凝聚态(condensed state)物质。气体既有流动性又有压缩性，液体有流动性而压缩性很小，固体则既无流动性、压缩性也很小。由于这三种物质状态的流动性和压缩性不同，从而固体能维持固定的形状；液体具有一定的体积而没有固定的形状，其形状将随容器形状的不同而变化，并可具有自由表面(free surface)；气体则充满整个容器而不可能有自由表面，其形状与体积均由容器而定。

这三种形态的物质所呈现的宏观上的差别，主要原因在于微观的分子聚集状态和分子力的不同。对于固体和液体这种凝聚态物质，其分子的平均间距为$(3\sim4)\times10^{-8}$cm 的量级，水分子的直径为 3×10^{-8}cm，可见分子与分子基本上是紧靠在一起的。气体分子的平均间距为凝聚态物质分子平均间距的 10 倍，大一个数量级(order)。固体和液体中分子互相靠近，其间距在分子力的作用半径以内。固体中分子排列有序，每个分子都有固定位置而分子以其固定位置为中心而振动。液体中分子没有固定位置，在流动过程中可互相替换，但是分子之间受分子力的互相牵制，而不像气体分子那样可以自由行动。

0.2 连续介质假设

流体是由大量运动着的分子组成的。从微观角度看，流体分子的分布是离散的、不连续的。它的各种物理特性(如密度)和运动要素(如速度、压强等)在空间上也不是连续分布的。例如水，虽然已知水分子之间间距很小，但是水的质量主要集中在原子核里而不是在分子中平均分布的。在图 0-2 所示的流体中，在 P 点(x,y,z)处取一微元体积 ΔV，体积内包含的质量为 ΔM，于是此微元

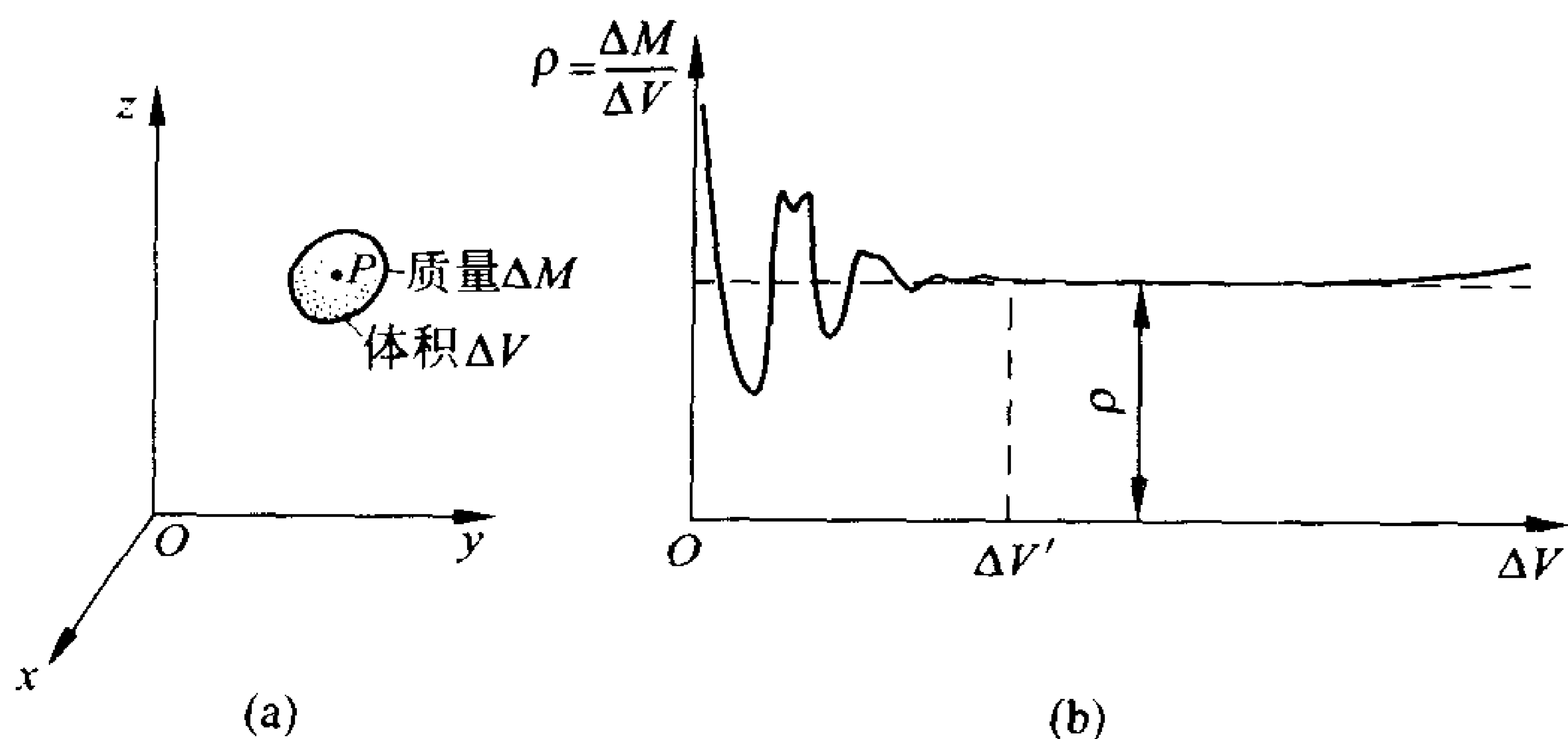


图 0-2　流体质点[5]

体积的平均密度(density)$\rho=\dfrac{\Delta M}{\Delta V}$。如果所取微元体积甚小,假如比一个分子的体积还小时,则当流动过程中分子的不同部位经过 P 点时微元体积的平均密度可以有很大差别,当原子核恰好位于 P 点时,密度最大,若 P 点微元体积完全在原子核以外,则所得密度最小。当所取微元体积增大,包含了几个分子时,则微元体积的平均密度计算应包含这几个分子的质量。由于分子随机地进入或走出,这个微元体积的分子数量并不平衡,所以体积内的分子数目也随机变化,从而使所测得的密度值随机变动而不稳定。微元体积再增大直到 $\Delta V\rightarrow\Delta V'$,则随机出入微元体积的分子大量增加,体积内的分子数也大大增加,则根据统计规律,所测算的平均密度将达到一个稳定的数值,可以把这个微元体积称为流体质点(fluid particle)。这个流体质点的密度设定为流体中一点 P 的密度 $\rho_P=\lim\limits_{\Delta V\rightarrow\Delta V'}\dfrac{\Delta M}{\Delta V}$。如果把微元体积再增大,就会把流体在空间上分布的不均匀性因素包括进来从而失去 P 点的代表性。

流体力学着眼于研究流体的宏观运动,不会研究分子和分子内部的结构和运动,因此流体力学把流体质点,这样一个宏观上非常小、而微观上足够大的微元体积内的流体作为研究的对象,或者

把由很多流体质点所组成的流体微团作为研究的对象。流体质点从所研究的流动问题的几何尺度上看相当于一个点，例如：研究直径为几厘米以至几米管道中空气的流动，若取 0.001cm 为边长的立方体，则可以看作流体质点了，而在正常的温度和压力下这个微小体积内包含的空气分子已达到 2.687×10^{10} 个，从微观上看又是足够大了。

用一种连续分布的流体质点所组成的流体代替实际上离散的、不连续的由流体分子所组成的物质，从而使其物理特性及运动要素都是空间上连续分布的数值，这就是连续介质假设(continuum hypothesis)。这一假设为充分使用连续函数的数学分析方法奠定了基础。

0.3　流体的粘性

粘性(viscosity)是流体固有的重要物理特性。不论是处于静止或运动状态，流体都具有粘性。在剪切力的作用下流体不断变形，粘性把切应力与变形速率联系起来。牛顿(Isac Newton，1642—1727)最初由平行平板间粘性流动的实验(见图 0-3)得到。

$$\tau_{yx}=\mu\frac{U}{h} \tag{0-1}$$

式中：τ_{yx} 表示法线为 y 方向的平面上 x 方向的切应力；μ 为流体的粘度，取决于流体的种类、温度和压强。上层平板以速度 U 相对于下层平板运动，通过粘性带动两板之间的流体形成一个 $u(y)$ 的流速分布。

对于工程中经常遇到的流动状态而言，压强对粘度的影响可以忽略。μ 的单位可由式(0-1)导出

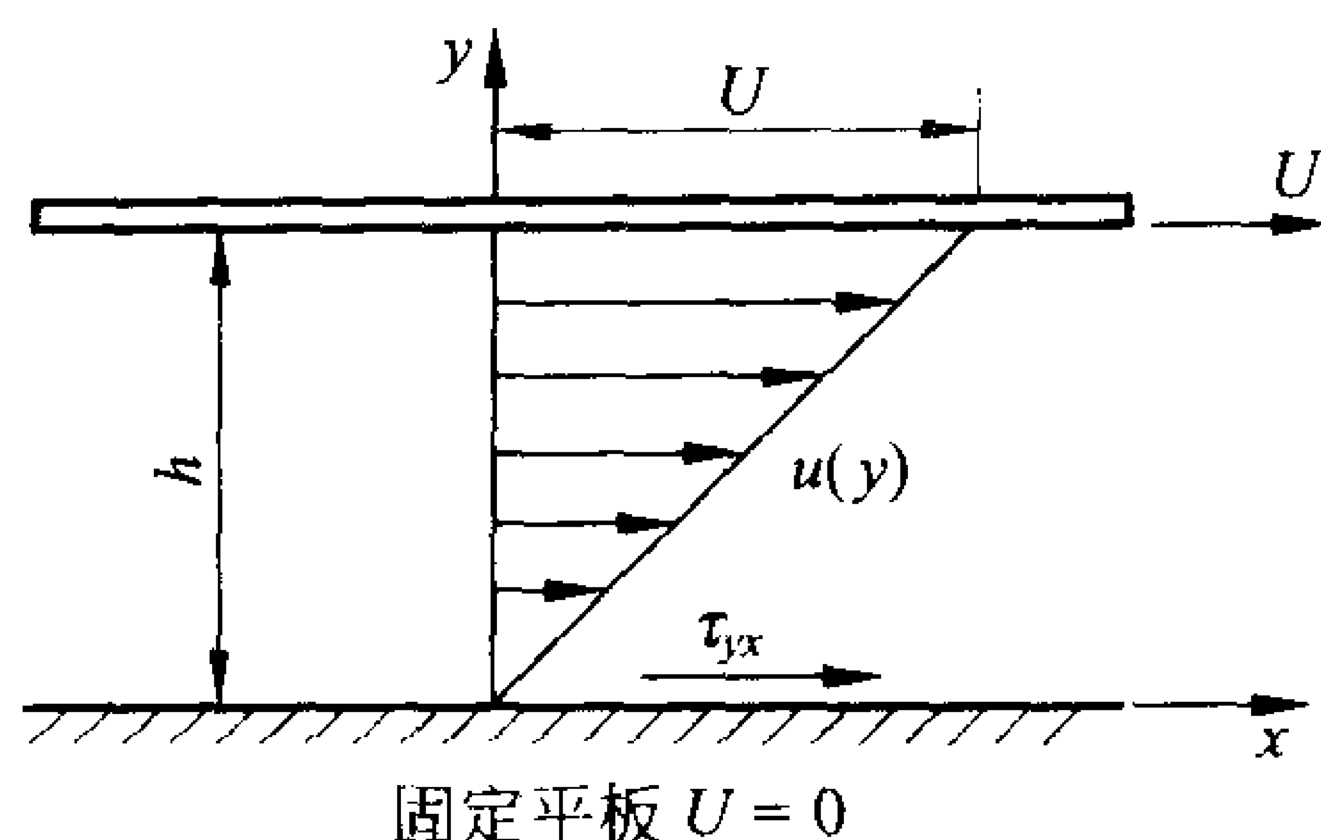


图 0-3 平行平板间粘性流动

$$[\mu]=\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}\equiv\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$$

式中：Pa 为应力单位，中文称为“帕”，相当于“$\mathrm{N/m^2}$”。式(0-1)写为更加通用的形式为

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{0-2}$$

此式称为牛顿粘性切应力公式。在粘性流体力学中经常用到另一个表示流体粘性的系数 ν，

$$\nu=\frac{\mu}{\rho} \tag{0-3}$$

称为运动粘性系数，或称运动粘度(kinematic viscosity)。单位为 $\mathrm{m^2/s}$。实验表明：液体的粘度 μ 随温度的升高而迅速减小。液体密度随温度升降的变化甚微，因此液体的运动粘度也随温度的升高而减小。

日常生活和工程实践中最常遇到的流体其切应力与剪切变形速率符合式(0-2)的线性关系，称为牛顿流体(Newtonian fluid)。切应力与变形速率不成线性关系者称非牛顿流体(non-Newtonian fluid)。图 0-4(a)中绘出了切应力 τ 与变形速率 ε 的关系曲线。

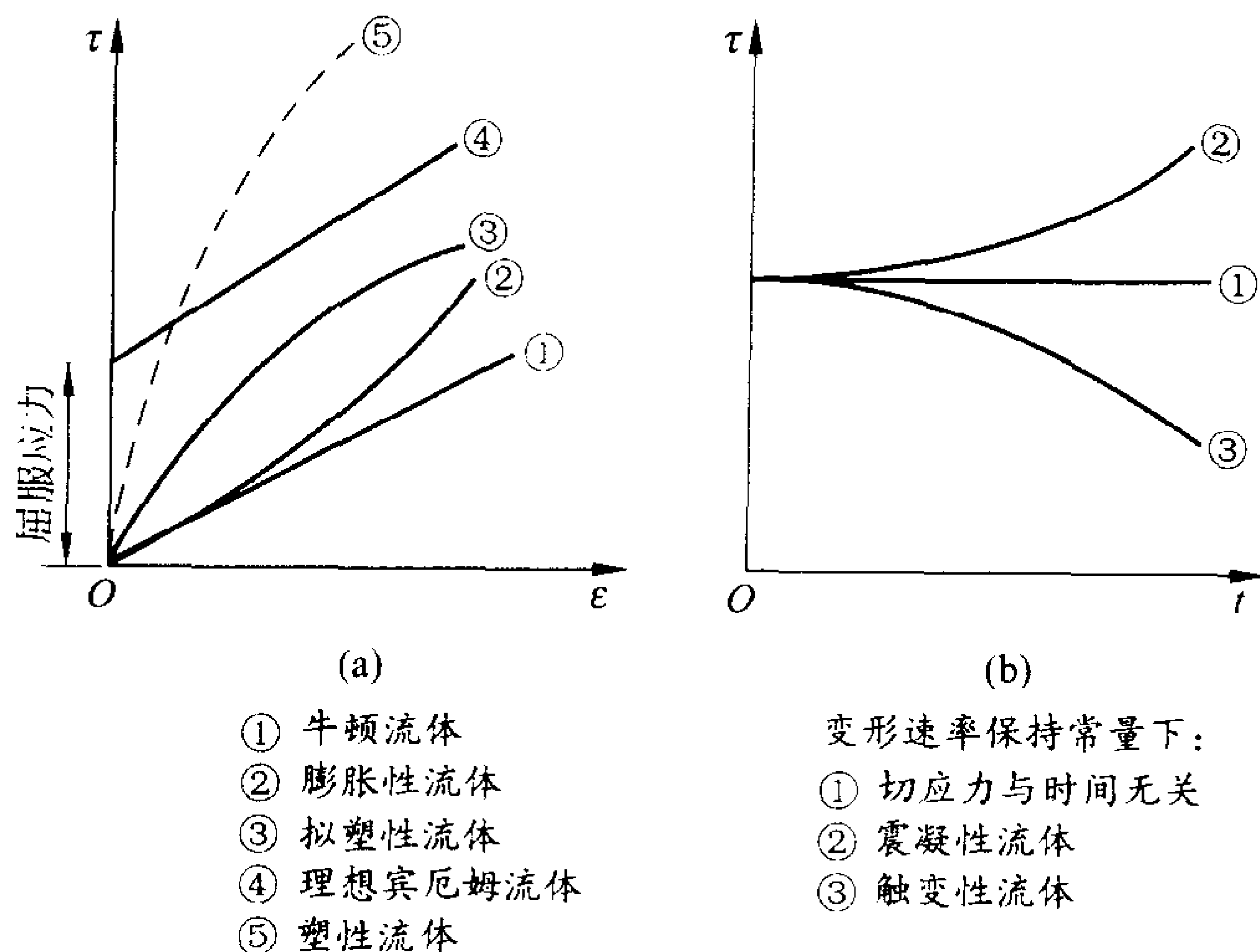


图 0-4　粘性流体切应力特性[①]

非牛顿流体中又因其切应力与变形速率关系的特点分为:膨胀性流体(dilatant)、拟塑性流体(pseudoplastic)、具有屈服应力的理想宾厄姆流体(ideal Bingham fluid)和塑性流体(plastic fluid)等。通常称油脂、油漆、牛奶、牙膏、血液、泥浆等为非牛顿流体。非牛顿流体的研究在化纤、塑料、石油、化工、食品及很多轻工业中有着广泛的应用。图 0-4(b)还显示出对于有些非牛顿流体的粘滞特性具有时间效应,即切应力不仅与变形速率有关,而且与作用时间有关。当变形速率保持常量,切应力随时间增大,这种非牛顿流体称为震凝性流体(rheopectic fluid)。当变形速率保持常量而切应力随时间减小的非牛顿流体称为触变性流体(thixotropic fluid)。对于非牛顿流体的研究始于 1867 年。第二

① White Frank M. Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill Book Company, 1974

次世界大战后，随着工业的发展，非牛顿流体力学也得到迅速的发展。

0.4 流体的压缩性

所有物质包括固体、液体和气体都是可压缩的，只是其压缩性大小有所不同。压缩性是指物质的体积在外部压力的作用下可以改变的特性。作用在流体单位表面积上的压力称为压强（pressure）。当流体压强从 p 增加到 $p+\Delta p$，则流体的体积将从原来的体积 V 减小到 $V-\Delta V$。流体的压缩性一般用压缩率 κ 来表示，即

$$\kappa=-\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} \tag{0-4}$$

由于所考虑流体的质量为一定，即 $V\rho=(V+\Delta V)(\rho+\Delta\rho)=$ const，忽略二阶小量，得 $\rho\Delta V+V\Delta\rho=0$，式(0-4)又可写为

$$\kappa=\frac{1}{\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta p} \tag{0-5}$$

压缩率 κ 的倒数为流体体积弹性模量（modulus of elasticity）E，它表示单位体积变化所需的压强增量，即

$$\mathrm{d}p=-E\frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{0-6}$$

或

$$E=\frac{1}{\beta}=\rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{0-7}$$

对于不同的流体，E 具有不同的数值。例如：在常温情况下水的体积弹性模量 $E_{水}=2.1\times10^9\,\mathrm{Pa}$，所以当压强增加一个大气压（$1.01\times10^5\,\mathrm{Pa}$）时，水的密度只增加原密度的两万分之一。一般液体压缩性均很小，所以大多数情况下液体可以认为是不可压缩流体。只有在压强变化过程非常迅速的流动现象，如在水击（water hammer）情况下才需要考虑水的压缩性。

气体的压缩性非常显著，而且其压缩性还与压缩过程有关，当

压缩发生在等温条件下时 $E=E_T$ 为等温体积弹性模量，当压缩发生在绝热可逆过程时，$E=E_s$ 为等熵体积弹性模量。对于完全气体(perfect gas)，密度、压强和温度之间的关系由状态方程确定。状态方程为

$$\frac{p}{\rho}=pv=RT \tag{0-8}$$

式中：v 为比容，即单位质量流体所具有的体积；T 为绝对温度；R 为气体常数。对于完全气体还可以写为

$$pv^n=\frac{p}{\rho^n}=\text{const} \tag{0-9}$$

式中：指数 n 取决于气体压缩过程，等温过程时 $n=1$；绝热过程时 $n=\gamma=c_p/c_V$，其中 c_p 为比定压热容(specific heat capacity at constant pressure)，c_V 为比定容热容(specific heat capacity at constant volume)，二者之比为 γ 称为质量热容比。对于空气 $\gamma=1.4$，对于液体 $\gamma=1$，这时等温过程与绝热过程没有差别。

在研究流体运动时，如果考虑为等温过程，则由流体运动的伯努利方程(Bernoulli equation)(参见第 2 章)知：$p+\frac{1}{2}\rho u^2=p_0$，$u$ 为流场中一点流速，p_0 为驻点压强，即流速为零的驻点(stagnation point)处的压强，$p_0-p=\frac{1}{2}\rho u^2$ 可称为动压强。由式(0-7)可知 $\mathrm{d}p=E\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$，此处 $\mathrm{d}p=p_0-p=\frac{1}{2}\rho u^2$，所以可得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{1}{E}\frac{\rho u^2}{2} \tag{0-10}$$

此式说明：如果在流体流动过程中动压强 $\frac{\rho u^2}{2}$ 比流体的体积弹性模量小很多时，则流体的压缩性可以忽略。在物理学中已知：在绝热过程中，流体中声波的传播速度为声速或称音速(sound speed)a，其关系式为

$$a = \sqrt{\frac{\gamma E}{\rho}} \tag{0-11}$$

把上式代入式(0-10),得

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\rho a^2}\frac{\rho u^2}{2} = \frac{\gamma}{2}\frac{u^2}{a^2}$$

流动速度 u 与声速 a 之比称为马赫数(Mach number),$M = \frac{u}{a}$,则可得

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{2}M^2 \tag{0-12}$$

液体的 γ 值为 1,空气的 γ 值为 1.4,只有当马赫数很小时,流体可以认为是不可压缩的(incompressible)。以空气为例,空气中声速为 335m/s,如果流速为 50m/s,则马赫数 $M = \frac{50}{335} = 0.15$,由式(0-12)可得出$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1.4}{2}(0.15)^2 = 0.016$。如果以这一密度的相对变化作为空气不考虑压缩性的界限,那么只有在流速大于 50m/s 时才需要考虑空气的压缩性。

第1章

流体运动学

本章从运动学(kinematics)的角度研究流体作为一种连续介质的运动,它研究流体的位移、速度、加速度、转动和变形但不涉及流体运动中的作用力。由于不涉及粘性和由粘性而产生的作用力,本章内容对于不考虑粘性的非粘性流体(inviscid fluid),即理想流体(ideal fluid)或粘性流体(viscous fluid)均可适用。

1.1 描述流体运动的两种方法

在固体力学中常可跟随一个质点去描述它的运动,如图 1-1

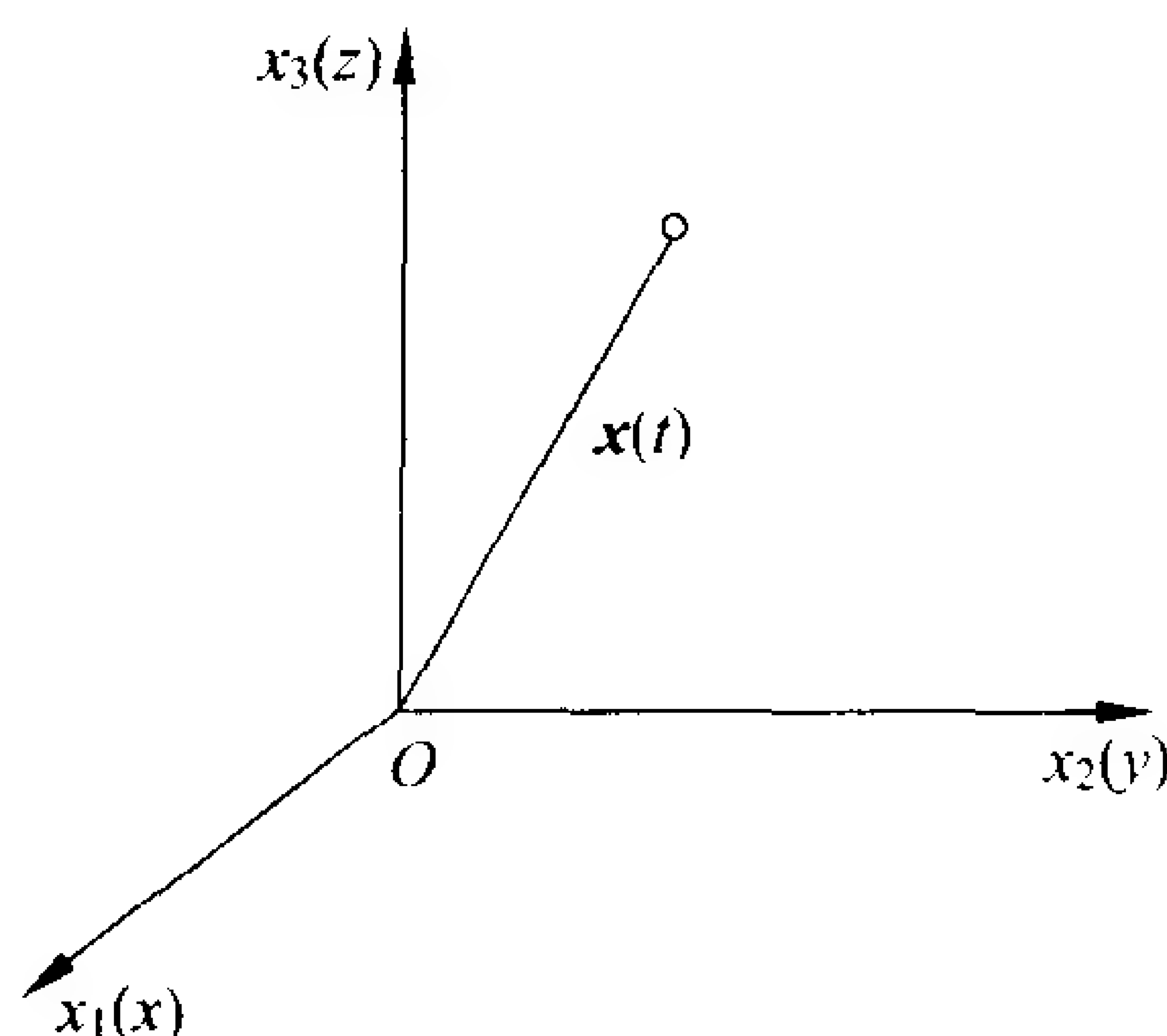


图 1-1 质点运动描述

所示。其

位置向量　　$\boldsymbol{x}(t)$

速度向量　　$\boldsymbol{u}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$

加速度向量　　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$

但在流体力学中，跟随一个流体质点去描述它的运动常常是困难的。考虑到流体是充满运动空间的连续介质，一般有两种描述运动的方法，即两种参考坐标系。

1.1.1 拉格朗日法

跟随流体质点去研究流体运动的方法为拉格朗日法(Lagrangian description)。在这种方法中独立变量为 $\boldsymbol{\xi}, t$。$\boldsymbol{\xi}$ 是作为识别流体质点的标志，多以时间 $t=t_0$ 时该质点所在位置表示，如图 1-2 所示。

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \tag{1-1}$$

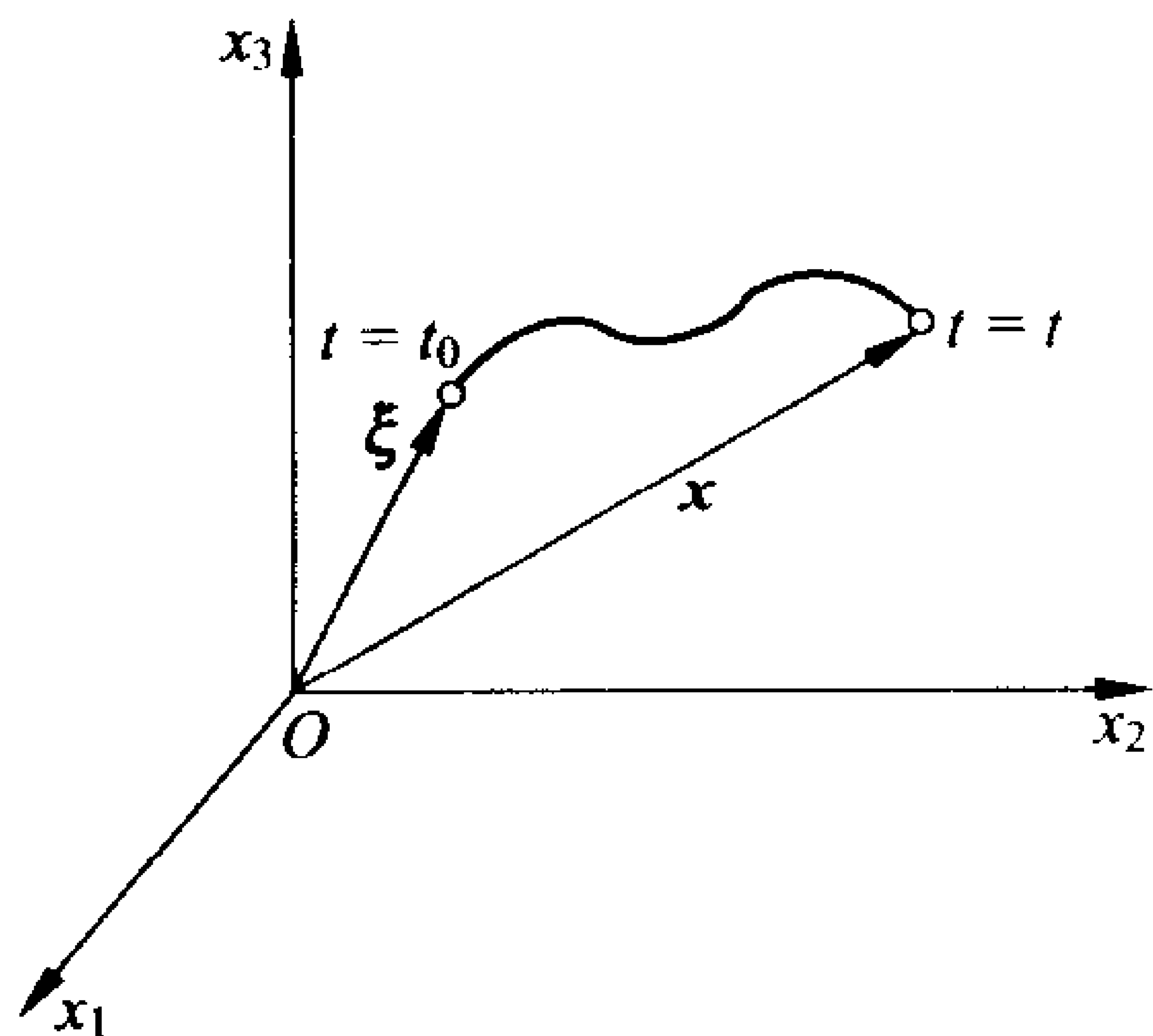


图 1-2　拉格朗日法流体质点运动的描述

也可用其他的标志方法，但从一个流体质点到另一个流体质点，表征识别标志的函数必须是连续的。在拉格朗日法中：

位置向量

$$\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t) \tag{1-2}$$

速度向量

$$\boldsymbol{u}(u_1,u_2,u_3)=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_{\xi} \tag{1-3}$$

加速度向量

$$\boldsymbol{a}(a_1,a_2,a_3)=\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}\right)_{\xi} \tag{1-4}$$

式中：下标 ξ 表示是由 ξ 所标志的流体质点。

由(1-2)可知 $t=t_0$ 时流体质点的位置为

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t_0)=\boldsymbol{\xi} \tag{1-5}$$

1.1.2 欧拉法

欧拉法(Eulerian description)着眼于从空间坐标去研究流体流动，也就是研究发生流体运动的空间场。但需注意：一切流体运动的力学属性均是流体质点的属性而不是空间点的属性。流体质点位于空间点上，从而流体质点的运动属性为时间和不依赖于时间的空间坐标的函数。此时独立变量为 $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$ 和 t，速度向量和加速度向量分别为

速度向量

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \tag{1-6}$$

加速度向量

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t) \tag{1-7}$$

研究欧拉空间场中某一运动属性 F 的变化率必须跟踪一个固定的流体质点，如图 1-3。F 可以代表速度、密度、温度等流体运动的各种属性。

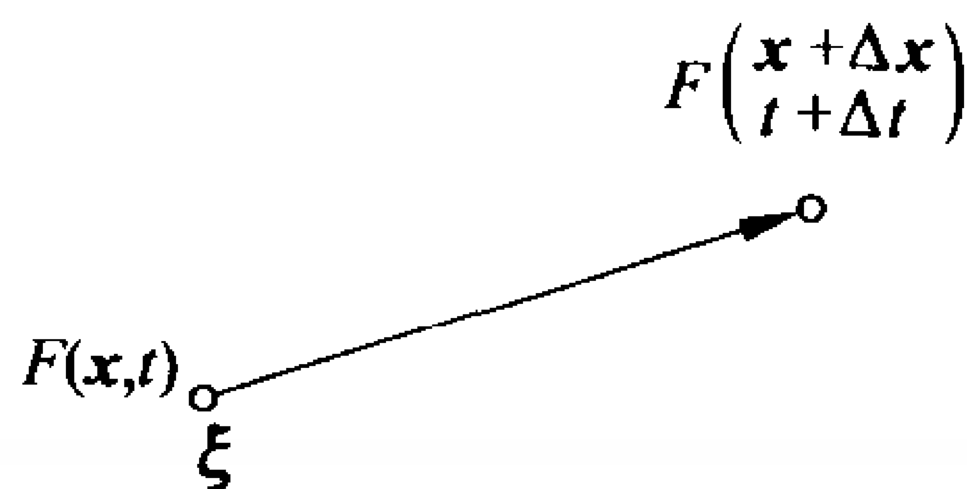


图 1-3　欧拉空间场中运动属性的描述

在空间场中 F 的分布为 $F(\boldsymbol{x},t)$。考虑到是用跟随流体质点 ξ 来研究

$F(\boldsymbol{x},t)$的变化率，因此 F 的分布可改写为

$$F(\boldsymbol{x},t)=F[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t),t]$$

可见 $\boldsymbol{x}$ 不再是独立变量，而是与流体质点 $\boldsymbol{\xi}$ 有关。跟随不同的流体质点在某一时间 t 其空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 有所不同。跟随流体质点 $\boldsymbol{\xi}$，F 的变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t),t]\\&=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{x}}+\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{\xi}}\\&\quad+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{x_1,x_3,t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{\xi}}+\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_{x_1,x_2,t}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{\xi}}\end{aligned}$$

式中各项的下标表示在该项的微分过程中所表示的量保持恒定不变；$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$称为 F 的物质导数(material derivative)或称随体导数，它是以欧拉空间坐标所表示的流体质点的运动属性对时间的全导数。即

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{x}}+\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{x_j,t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{\xi}}$$

注意：$j\neq i$。写为向量的形式，物质导数为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+u_i\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)F \qquad (1\text{-}8)$$

这里应用了爱因斯坦求和约定(Einstein summation convention)(见附录Ⅰ.7)。物质导数表示式中第一项$\frac{\partial F}{\partial t}$为 F 的当地变化率(local derivative)即在某一点 $\boldsymbol{x}$ 处 F 随时间 t 的变化率，是由流动的不恒定性引起的；第二项$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)F$ 表示即使是恒定流动，流体质点随着时间而改变它的空间位置从而导致 F 的变化，称为迁移变化率(convective derivative)，它是由流场的不均匀性引起的；∇ 为哈密尔顿算子(Hamilton operator)。这样，跟踪一个给定的流

体质点物理量 F 的拉格朗日变化率$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$就以欧拉导数$\frac{\partial F}{\partial t}$与$u_i\frac{\partial F}{\partial x_i}$的形式表示出来。在流体力学中欧拉法应用得更加广泛。

1.1.3 两种流动描述方法之间的关系

欧拉方法在数学处理上的最大困难是方程式的非线性，而拉格朗日方法中的加速度项则为线性。但是直接应用拉格朗日型的基本方程解决流体力学问题是困难的，因此在处理流动问题时，常常必须用拉格朗日的观点却应用欧拉的方法。这里就必须研究拉格朗日与欧拉两种系统之间的变换关系，为此引用雅可比行列式(Jacobian)(见附录Ⅰ.12)。

$$J(t)=\det\left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right| \tag{1-9}$$

拉格朗日变量 $\boldsymbol{\xi}$ 与欧拉变量 $\boldsymbol{x}$ 可以互换的惟一条件是

$$J(t)\neq 0,\infty$$

雅可比行列式的时间导数为

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}J=(\nabla\cdot\boldsymbol{u})J \tag{1-10}$$

1.2 雷诺输运方程

首先介绍系统(system)和控制体(control volume)的概念。系统是包含着确定不变的流体质点的集合，它随流体的流动而流动，体积和形状可能变化但所包含的流体质点不变。控制体是相对于空间坐标系固定不变的一个体积，流体质点随时间流入和流出这个空间体积。研究流体运动，拉格朗日法着眼点是系统，而欧拉法则着眼于控制体。

为了从守恒定律推导流体力学的基本方程，需研究一个系统在空间的运动，从而需解决系统的有关物理量在欧拉空间运动中

对时间的全导数问题。用欧拉导数表示一个流体系统的拉格朗日变化率，即为雷诺输运方程(Reynolds transport equation)。

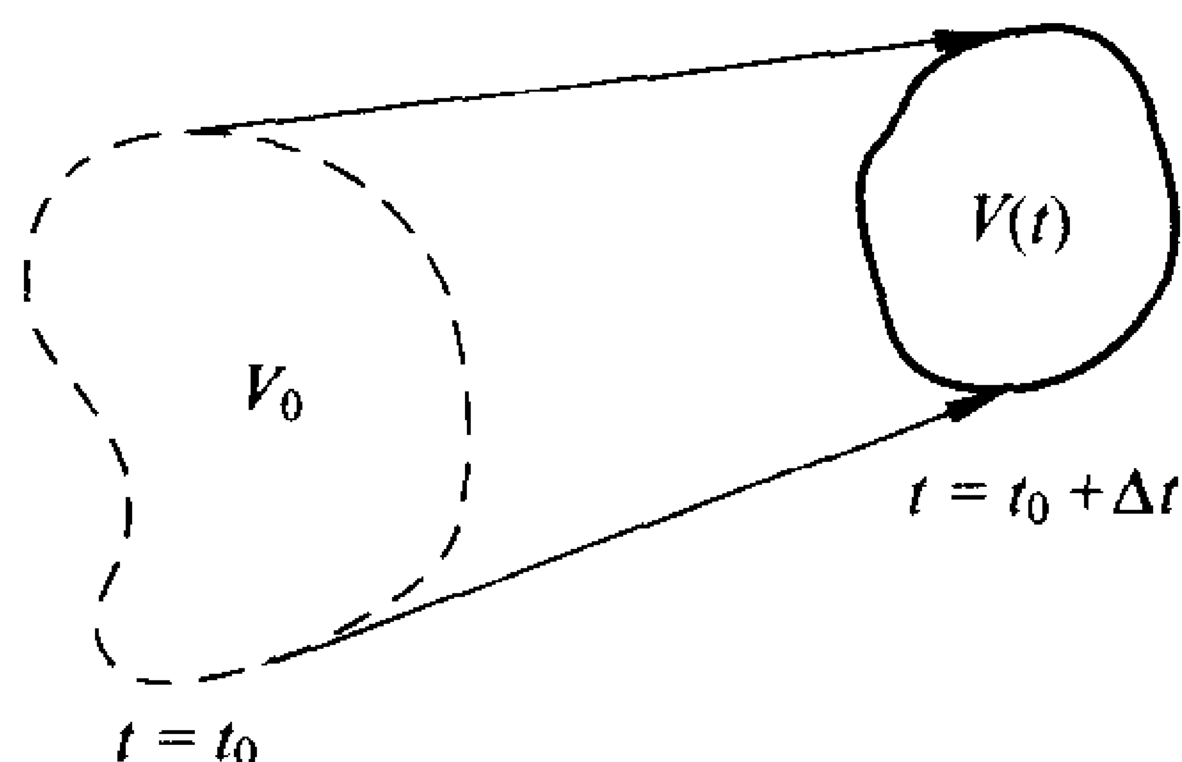


图 1-4　流动中取定的系统图

设在流动中取定一个系统如图 1-4 所示。系统在流动过程中，在$t=t$时系统所占据的空间为控制体 $V(t)$，在 $t=t_0$ 时系统所占据的空间为控制体 $V_0=V(t_0)$作为识别这一系统的标志。令$\mathrm{d}V_0=\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$，$\mathrm{d}V(t)=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$，则由附录Ⅰ.12 节得

$$\mathrm{d}V(t)=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=J\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3=J\mathrm{d}V_0 \tag{1-11}$$

系统所具有的某种运动要素如质量、动量或能量等对时间的全导数可由以下推导得出。式中 F 代表该运动要素的体积分布密度。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}F\mathrm{d}V &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V_0}FJ\,\mathrm{d}V_0\\
&=\iiint_{V_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(FJ)\mathrm{d}V_0\\
&=\iiint_{V_0}\left(J\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+F\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}V_0\\
&=\iiint_{V_0}\left[J\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+F(\nabla\cdot\boldsymbol{u})J\right]\mathrm{d}V_0\\
&=\iiint_{V_0}\left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+F(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right]J\mathrm{d}V_0\\
&=\iiint_{V(t)}\left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+F(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

$$= \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) F + F(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \right] \mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (F\boldsymbol{u}) \right] \mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} \mathrm{d}V + \iiint_{V(t)} \nabla \cdot (F\boldsymbol{u}) \mathrm{d}V$$

按照高斯公式(Gauss equation)[附录式(Ⅰ.15)]上式可改写为如下的雷诺输运方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V(t)} F \mathrm{d}V = \iiint_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} \mathrm{d}V + \iint_{S(t)} F\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \qquad (1\text{-}12)$$

由式(1-12)可见系统对时间的全导数，即系统的物质导数由两部分组成：$\iiint_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} \mathrm{d}V$ 是由于流场中 F 的不恒定性所引起的整个控制体内所含物理量 $\iiint_{V(t)} F \mathrm{d}V$ 在单位时间内的增量；$\iint_{S(t)} F\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$ 表示在单位时间内，流体通过控制体表面 $S(t)$ 而引起的控制体内物理量 $\iiint_{V(t)} F \mathrm{d}V$ 的变化，也就是系统由一个位置流动到另一个位置时，由于流场的不均匀性而引起的 $\iiint_{V(t)} F \mathrm{d}V$ 的迁移变化率。可以看出：雷诺输运方程(1-12)与式(1-8)所表示的物质导数从本质上讲是相同的，只不过雷诺输运方程是以系统的流动作为研究的对象，而物质导数是研究流体质点的运动，因此可以说输运方程是流体质团(系统)的物质导数。

1.3 连续方程

连续方程(continuity equation)是质量守恒原理在流体运动中的表现形式。系统的质量为

$$m = \iiint_{V(t)} \rho \mathrm{d}V$$

质量守恒要求为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}\rho\mathrm{d}V=0 \tag{1-13}$$

式(1-13)就是拉格朗日型的积分形式的连续方程。应用输运方程,上式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}\rho\mathrm{d}V=\iiint_{V(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}V=0 \tag{1-14}$$

或写为

$$\iiint_{V(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V=-\iint_{S(t)}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1-14'}$$

上式是欧拉型的积分形式的连续方程。式中的$\iint_{S(t)}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$为通过控制体表面积的物质通量,或质量流量。式(1-14)对于流动中的任何一个体积都是适用的,即$V(t)$是任意选取的,因此得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{1-15}$$

上式是微分形式的欧拉型连续方程式,也可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{1-16}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$表示物质导数,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla$。不可压缩流体(incompressible fluid)的$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$,即流体微团沿其迹线流动时密度保持不变,从而不可压缩流体的连续方程可写为

$$\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$$

由于$\rho\neq0$,不可压缩流体的连续方程还可写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\quad\text{或}\quad\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \tag{1-17}$$

式(1-17)表示流速向量$\boldsymbol{u}$的散度(divergence)为零,即在不可压缩流体中流速是无散向量(solenoidal vector),而$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$的流场称

为无源场。

1.4 流线、迹线、色线和流管

用几何的方法描述流体质点的运动，可以形成流线（stream line）、迹线（path line）和色线（streak line）。

1.4.1 流线

流线是某一固定瞬时在流场中的一条曲线，这条曲线上每一点的切线都与该点处流速向量相平行，如图 1-5 所示。对于非恒定流动，一点处的流速向量其大小与方向皆随时间而变化，因此流线的形状也是随时间而变化的。流线是用欧拉法研究流体运动的一种结果，由流线定义可得其方程式为

$$\boldsymbol{u}\times \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0 \tag{1-18}$$

式中：$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(u_1,u_2,u_3)$为流场中一点处流速向量；$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_3)$为流线上一点处的微元弧向量。将式(1-18)写为直角坐标系的分量形式，则有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{u_1(x_1,x_2,x_3,t)}=\frac{\mathrm{d}x_2}{u_2(x_1,x_2,x_3,t)}=\frac{\mathrm{d}x_3}{u_3(x_1,x_2,x_3,t)} \tag{1-19}$$

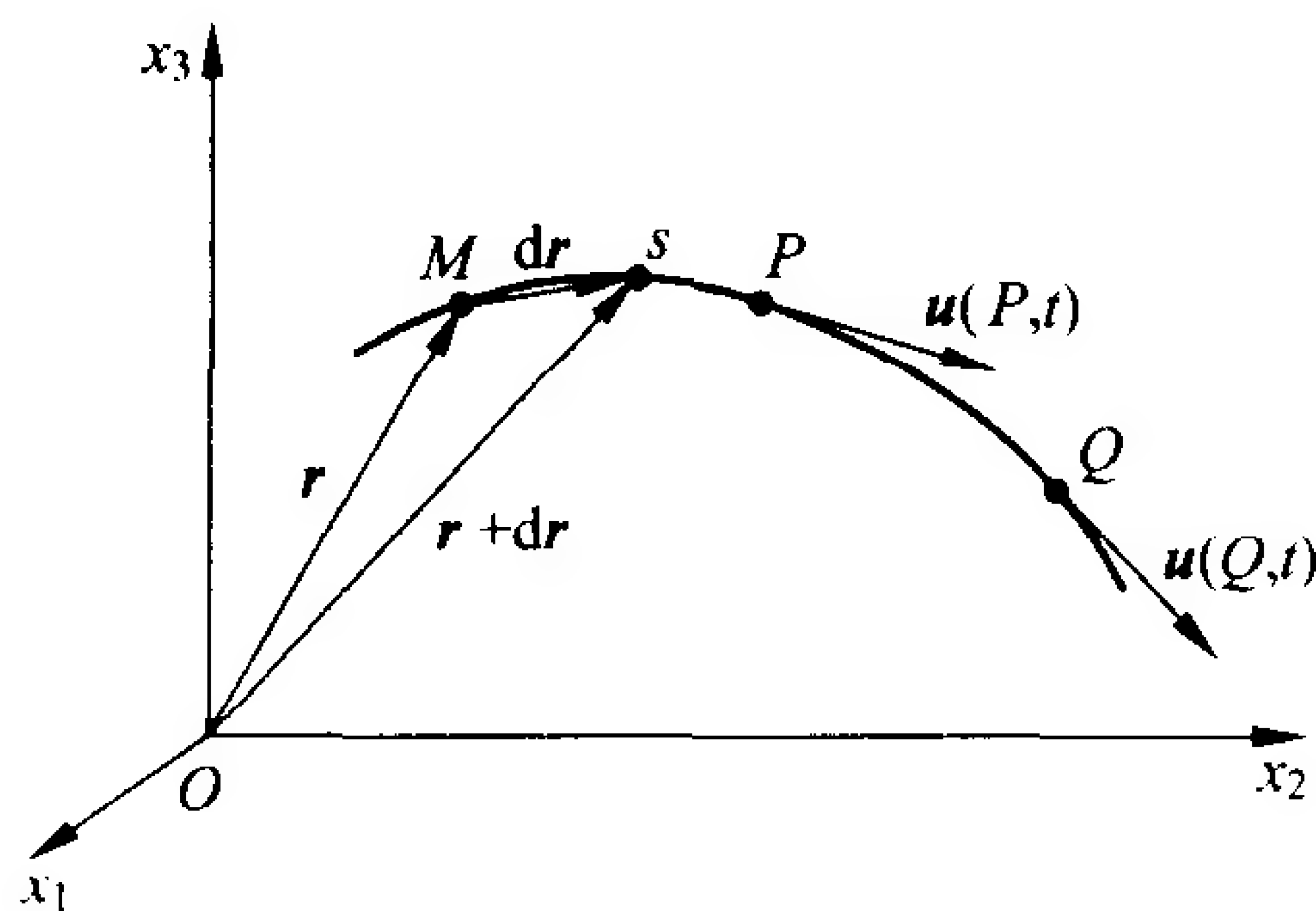


图 1-5 流线

式中：t 代表时间，是一个参变数。以 t 为常数积分这个方程式即可得到在时刻 t 的流线表达式 $x_3=x_3(x_1,x_2)$。

如果引进一个参变数 s。设在空间上某一点 M 处 $s=0$，而且 s 的值沿流线逐渐增加，这时流线 $x_3=x_3(x_1,x_2)$ 也可表示为 $x_1=x_1(s)$，$x_2=x_2(s)$，$x_3=x_3(s)$。在这三个表达式中消去参变数 s，即可得到 $x_3=x_3(x_1,x_2)$ 形式的流线表达式。引进参变数 s 后，流线方程式可写为

$$\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\frac{dx_3}{u_3}=ds \tag{1-20}$$

这三个方程式可以用张量符号写为

$$\frac{dx_i}{ds}=u_i(x_i,t) \quad i=1,2,3 \tag{1-21}$$

t 为固定值。

如果要求流线通过流场中某一固定点 (x_{10},x_{20},x_{30})，则可积分式(1-21)，起始条件为：当 $s=0$ 时 $x_1=x_{10}$，$x_2=x_{20}$，$x_3=x_{30}$，结果是

$$x_i=x_i(x_{10},x_{20},x_{30},t,s) \tag{1-22}$$

s 取所有的实数值，则可描绘出所求的流线。

例 1-1 设流场为 $\boldsymbol{u}=\left(\frac{x_1}{1+t},x_2,0\right)$

由式(1-21)可知

$$u_1=\frac{dx_1}{ds}=\frac{x_1}{1+t}$$

$$u_2=\frac{dx_2}{ds}=x_2$$

$$u_3=\frac{dx_3}{ds}=0$$

积分可得

$$x_1=C_1e^{\frac{s}{1+t}}$$

$$x_2 = C_2 e^s$$

$$x_3 = C_3$$

消去参变数 s，得到流线的表达式为

$$\frac{x_2}{C_2} = \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^{1+t}, \quad x_3 = C_3$$

所得的流线表达式描述的是在$x_3 = C_3$平面上的一条曲线，如图1-6所示。如果需要求出 t 时刻穿过点 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 的流线，则把 $\boldsymbol{\xi}$ 点代入上式，得

$$\frac{\xi_2}{C_2} = \left(\frac{\xi_1}{C_1}\right)^{1+t}, \quad x_3 = \xi_3$$

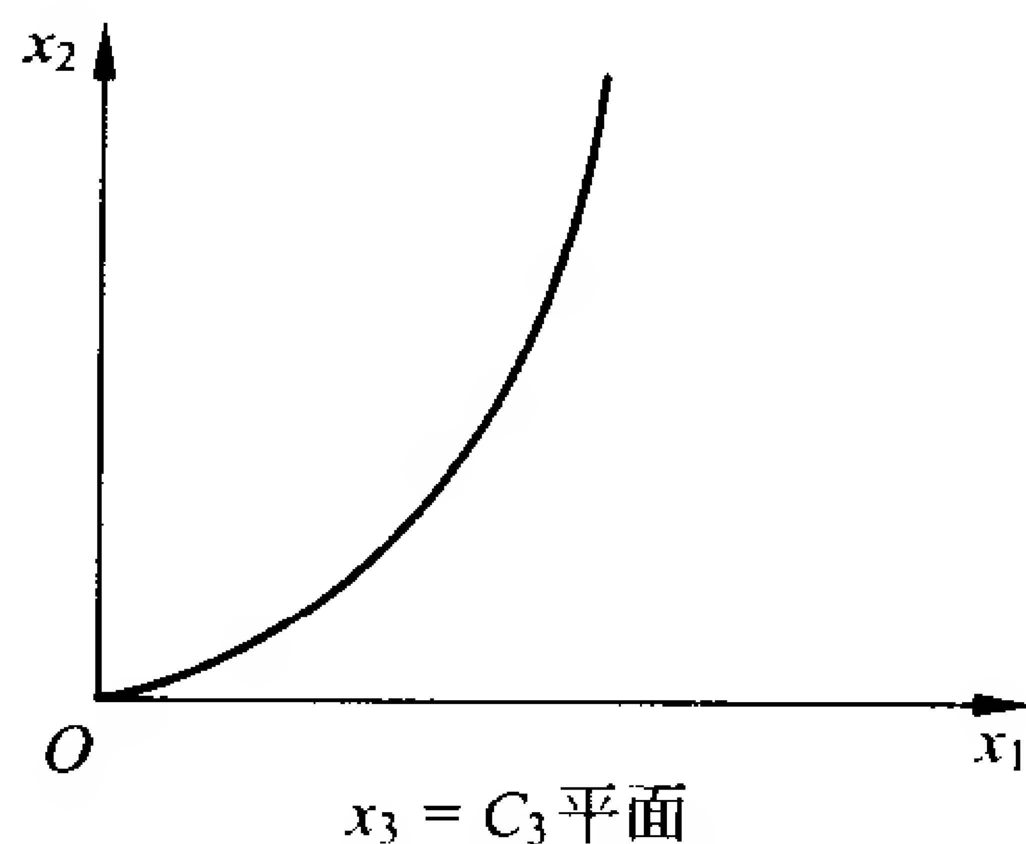


图 1-6　流线

于是有

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{\xi_2}\left(\frac{\xi_1}{C_1}\right)^{1+t}$$

把上式代入 x_1, x_2 表示式中消去 C_2，则有

$$\frac{x_2}{\xi_2}\left(\frac{\xi_1}{C_1}\right)^{1+t} = \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^{1+t}$$

于是流线方程式写为

$$\frac{x_2}{\xi_2} = \left(\frac{x_1}{\xi_1}\right)^{1+t}, \quad x_3 = \xi_3$$

当 $t=0$ 时，穿过 $\boldsymbol{\xi}$ 点的流线方程式则为

$$\frac{x_2}{\xi_2}=\frac{x_1}{\xi_1}, \quad x_3=\xi_3$$

1.4.2 迹线

迹线是流体质点流动所经过的空间点的连线，也就是流体质点运动的轨迹线。迹线上各点的切线表示同一流体质点在各个不同时间的速度方向。用拉格朗日法研究流体运动可得到流体质点的迹线方程式为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=u_i(\boldsymbol{x}_i,t) \tag{1-23}$$

在 $t=0$ 时，通过点(ξ_1,ξ_2,ξ_3)的迹线应该是以 $t=0,\boldsymbol{x}_i=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$为初始条件的式(1-23)的解，即

$$x_i=x_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \tag{1-24}$$

t 取所有大于零的值，即可绘出所求的迹线，或消去参数 t 得迹线表达式。

例 1-2 设流场为 $\boldsymbol{u}=\left(\frac{x_1}{1+t},x_2,0\right)$，写出迹线表达式。由式(1-23)可知

$$u_1=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{x_1}{1+t}$$

$$u_2=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2$$

$$u_3=\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=0$$

积分可得

$$x_1=C_1(1+t)$$

$$x_2=C_2\mathrm{e}^t$$

$$x_3=C_3$$

如果 $t=0$ 时，流体质点经过 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 点，即

$$C_1=\xi_1,\quad C_2=\xi_2,\quad C_3=\xi_3$$

代入 x_1,x_2,x_3 表示式则得

$$x_1=\xi_1(1+t),\quad x_2=\xi_2 e^t,\quad x_3=\xi_3$$

消去参数 t,得迹线的表达式为

$$x_2=\xi_2 e^{\frac{x_1}{\xi_1}-1},\quad x_3=\xi_3$$

所得的迹线表达式描述的是在 $x_3=\xi_3$ 平面上的一条曲线,如图 1-7 所示。

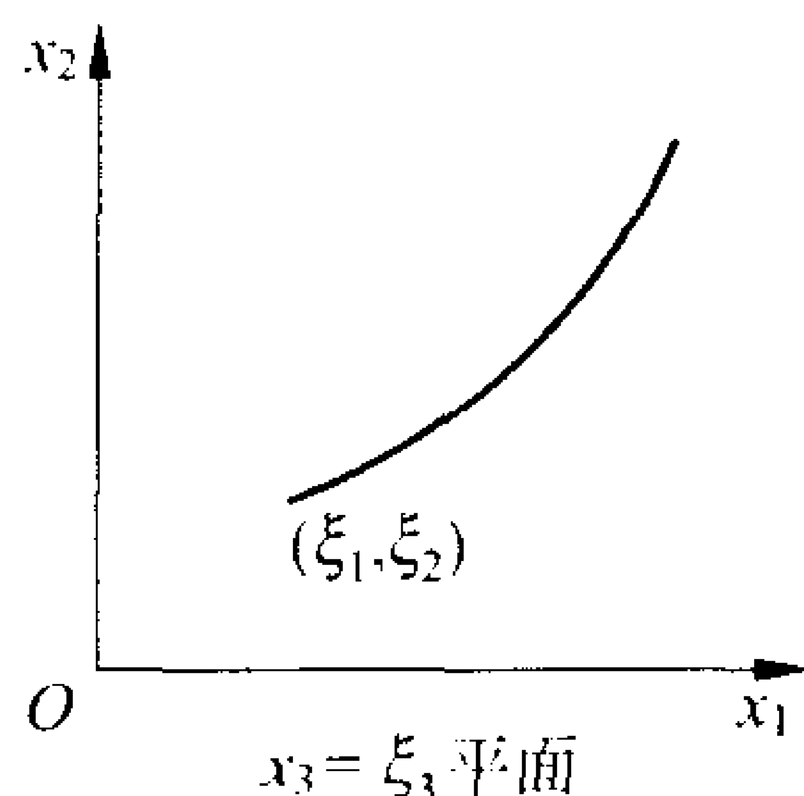


图 1-7　迹线

1.4.3　色线

色线是由空间一固定点连续不断地向流场中输入的流体质点所组成的一条线,如烟筒所喷出的烟在空中形成的为一条色线。在 t 时刻,色线上一点(x_1,x_2,x_3)处的流体质点,必然是在某一较早时刻 $t=\tau$ 时,由点(x_{10},x_{20},x_{30})运动过来的。这个流体质点在流场中的历史轨迹可以由迹线方程(1-23)的解得到,起始条件应为 $t=\tau$ 时 $x_1=x_{10},x_2=x_{20},x_3=x_{30}$。于是,只要 τ 取所有 $-\infty\leqslant\tau\leqslant t$ 范围内的可能数值,即可得到色线上所有的流体质点的位置。也就是说,通过(x_{10},x_{20},x_{30})点的色线的表达式可以由以 $t=\tau$, $x_1=x_{10},x_2=x_{20},x_3=x_{30}$ 为起始条件求解式(1-23)得到。色线的表达式为

$$x_i=x_i(x_{10},x_{20},x_{30},t,\tau)\tag{1-25}$$

当 τ 取 $\tau\leqslant t$ 的所有值时,这些表达式将可以确定色线在时刻 t 的瞬时位置。不同的时刻 t,色线的位置不同。

例 1-3　流场仍为 $\boldsymbol{u}=\left(\dfrac{x_1}{1+t},x_2,0\right)$,写出色线的表达式。

由式(1-23)经积分可得到

$$x_1=C_1(1+t)$$

$$x_2=C_2 e^t$$

$$x_3 = C_3$$

应用初始条件，当 $t=\tau$ 时，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$，可得

$$\xi_1 = C_1(1+\tau)$$

$$\xi_2 = C_2 \mathrm{e}^{\tau}$$

$$\xi_3 = C_3$$

改写为

$$C_1 = \frac{\xi_1}{1+\tau}$$

$$C_2 = \xi_2 \mathrm{e}^{-\tau}$$

$$C_3 = \xi_3$$

代入 x_1, x_2, x_3 表示式，得到一组以 τ 为参数的方程式，即

$$x_1 = \xi_1 \frac{1+t}{1+\tau}$$

$$x_2 = \xi_2 \mathrm{e}^{t-\tau}$$

$$x_3 = \xi_3$$

这就是通过 $\boldsymbol{\xi}$ 点的色线方程式，对于所有的时间 t 都适用。作为一个特例，假定 $t=0$，则这些方程式变为

$$x_1 = \xi_1 \frac{1}{1+\tau}$$

$$x_2 = \xi_2 \mathrm{e}^{-\tau}$$

$$x_3 = \xi_3$$

消去参数 τ，得

$$x_2 = \xi_2 \mathrm{e}^{1-\frac{\xi_1}{x_1}}, \quad x_3 = \xi_3$$

上式就是通过 $\boldsymbol{\xi}$ 点，在 $t=0$ 时的色线方程，所得的色线方程描述的是在 $x_3=\xi_3$ 平面上的一条曲线，如图 1-8 所示。

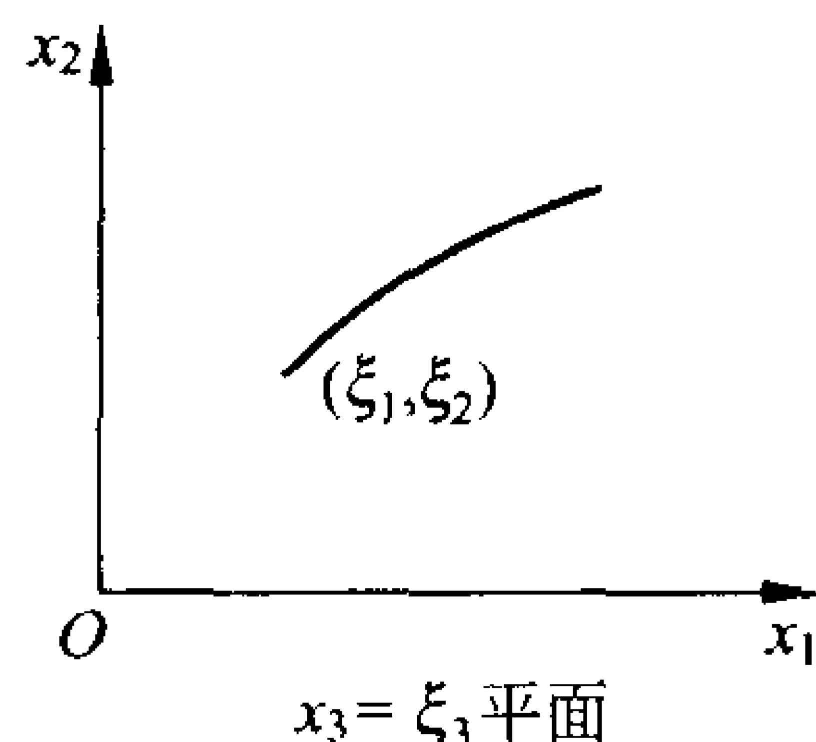


图 1-8　色线

如果流场是恒定的，并不随时间而变化，则这个流场中的流线、迹线和色线全部重合，否则三者均不一致。

1.4.4 流管

在流场中给定一条不与流线重合的封闭曲线，某一瞬时通过此封闭曲线上所有各点的流线形成一个封闭的曲面称为流管(stream tube)。图1-9所示为流管中的一段。封闭曲线缩至无穷小时的流管称为元流(stream filament)。流管中处处与流线方向垂直的横断面称为过流断面。

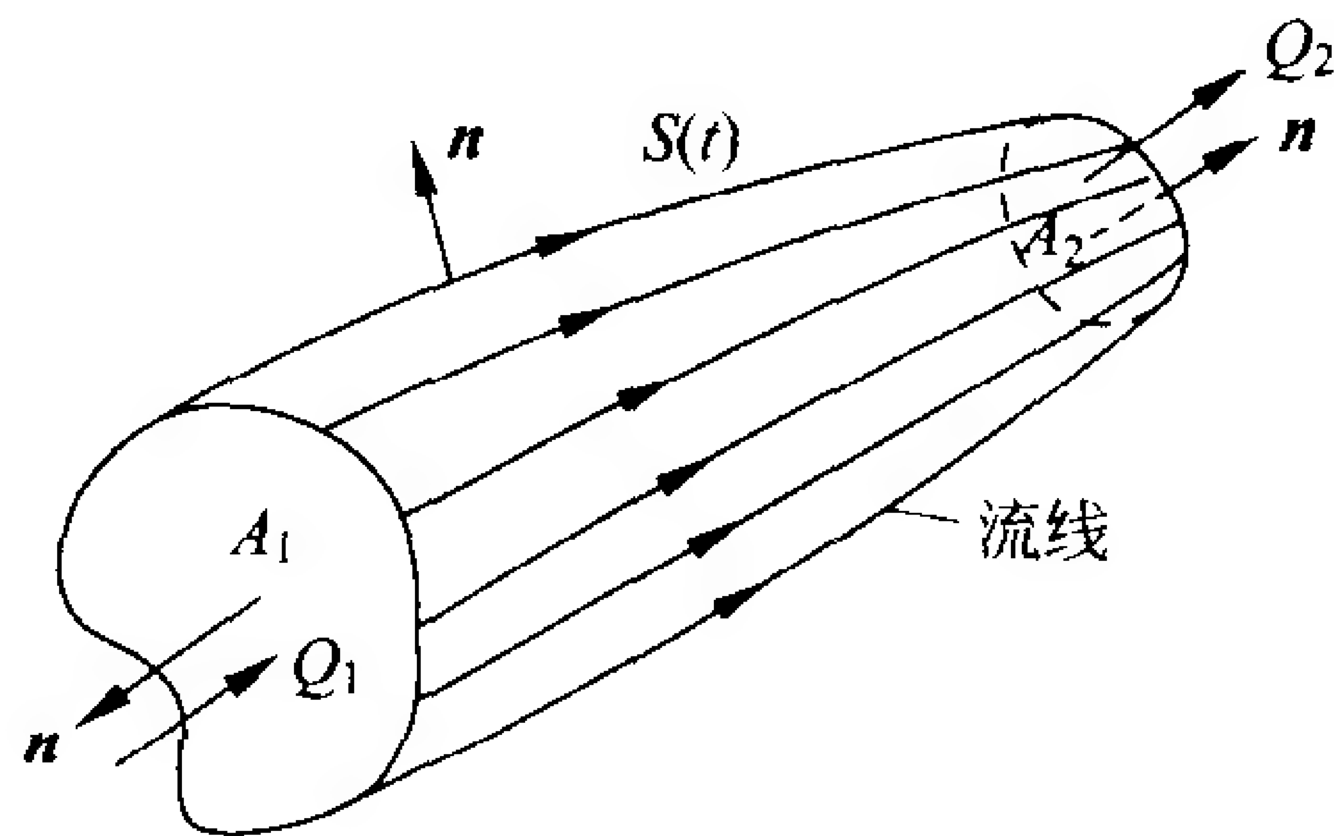


图1-9 流管段

对于不可压缩流体，表达质量守恒的连续方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}=0 \tag{1-17}$$

将连续方程写为积分形式，即

$$\iiint_{V(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}V = 0 \tag{1-26}$$

由附录Ⅰ.6中的高斯公式可知

$$\iiint_{V(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}V = \iint_{S(t)} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0 \tag{1-27}$$

式中：$\boldsymbol{n}$ 为曲面外法线方向的单位向量；$S(t)$ 为流管的表面积，包括流管侧面和两端的过流断面面积 A_1 和 A_2；$V(t)$ 为整个流管所包围的体积。在流管的侧面 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}=0$，所以

$$\iint_{A_1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \iint_{A_2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0$$

即

$$-Q_1+Q_2=0$$

$$Q_1=Q_2 \tag{1-28}$$

式中：Q_1、Q_2 为穿过流管两端过流断面面积 A_1，A_2 的体积流量。所以对于不可压缩流体，流管中通过任一过流断面的流量为一常数，这也是质量守恒原理或者说是连续方程的一种型式。在流场内部由于 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}=0$ 为无源场，不存在任何源(source)和汇(sink)，因此流管不可能开始或终止。流管必须是封闭的管路，或延伸至无穷远，或开始并终止于流场的边界。

1.5 环量、涡量，涡线和涡管

1.5.1 环量与涡量

流场中给定一封闭曲线，流速向量沿封闭曲线的线积分

$$\oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Gamma \tag{1-29}$$

称为速度环量，简称环量(circulation)。式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为封闭曲线的有向微元弧段。当沿反时针方向进行积分时，如果积分值为正，则环量为正值。

流速向量 $\boldsymbol{u}$ 的旋度(curl)定义为流体微团的涡量(vorticity)，以 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示。

$$\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{curl}\ \boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \boldsymbol{u}_k}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \tag{1-30}$$

式中：$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 分别表示沿坐标轴 x_1，x_2，x_3 的单位向量；ε_{ijk} 为置换张量(alternating tensor，permutation tensor)。

由附录Ⅰ.8可知

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & ijk=123,231,\cdots(\text{偶次置换})\\-1, & ijk=132,321,\cdots(\text{奇次置换})\\0, & \text{除以上两种排列之外}\end{cases} \tag{1-31}$$

则

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\Omega}=\Omega_1\boldsymbol{e}_1+\Omega_2\boldsymbol{e}_2+\Omega_3\boldsymbol{e}_3\\&\Omega_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\&\Omega_2=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\\&\Omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\end{aligned}\right\} \tag{1-32}$$

式中：$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 分别表示三个坐标轴 x_1,x_2,x_3 方向的涡量分量。

定义角转速向量 $\boldsymbol{\omega}$ 来反映流体微团的转动，则

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \tag{1-33}$$

对流体微团的涡量 $\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ 取散度可得涡量连续方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})=0 \tag{1-34}$$

由上式可知涡量也是无散向量。

1.5.2 斯托克斯定理

空间区域中任意两点能以连续线连接起来，而且在任何地方这个连续线都不越过这个区域的边界，这种空间区域称为连通域。在连通域中任意封闭曲线可无限地缩小到一点，而在缩小过程中并不越过连通域的边界，这种连通域称为单连通域，例如球面内部的空间区域或两个同心球之间的空间区域等都是单连通域。凡不具有单连通域性质的连通域，称作多连通域。

沿包围单连通域的有限封闭曲线的速度环量等于通过此单连通域的涡通量，即

$$\oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_A \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A \tag{1-35}$$

上式就是联系速度环量和涡通量之间关系的斯托克斯定理(Stokes' theorem)。面积 A 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与曲线 L 的正方向构成右手螺旋。

斯托克斯定理证明如下：

如图 1-10 所示，在 x_1x_2 平面内由封闭曲线 L 所包围的面积为 A，A 为单连通域。在 A 内取任一微元面积 $\mathrm{d}A_{ij}$，沿 $\mathrm{d}A_{ij}$ 周边的速度环量由图 1-11 可知

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij} &= u_1 \mathrm{d}x_1 + \left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2 - \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1 - u_2 \mathrm{d}x_2 \\ &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \Omega_3 \mathrm{d}A\end{aligned}$$

由式(1-32)知 $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = \Omega_3$。由图 1-10 可以看出：$A$ 域内部各微元面积边界线上的环量均为其相邻微元面积边界线上的环量所抵消(大小相同方向相反)。例如 $\mathrm{d}A_{ij}$ 中的 bc 线段其环量为

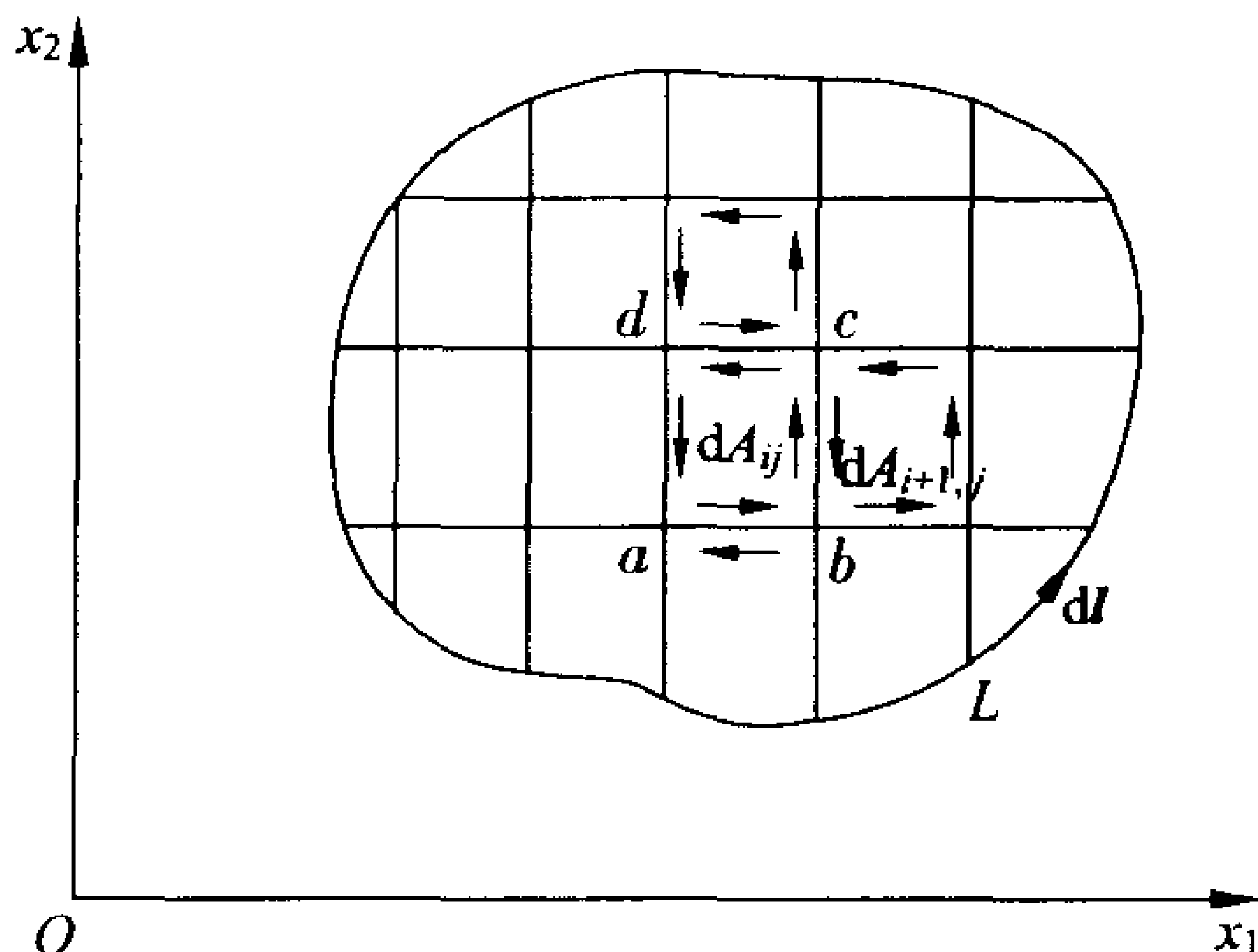


图 1-10 单连通域 A

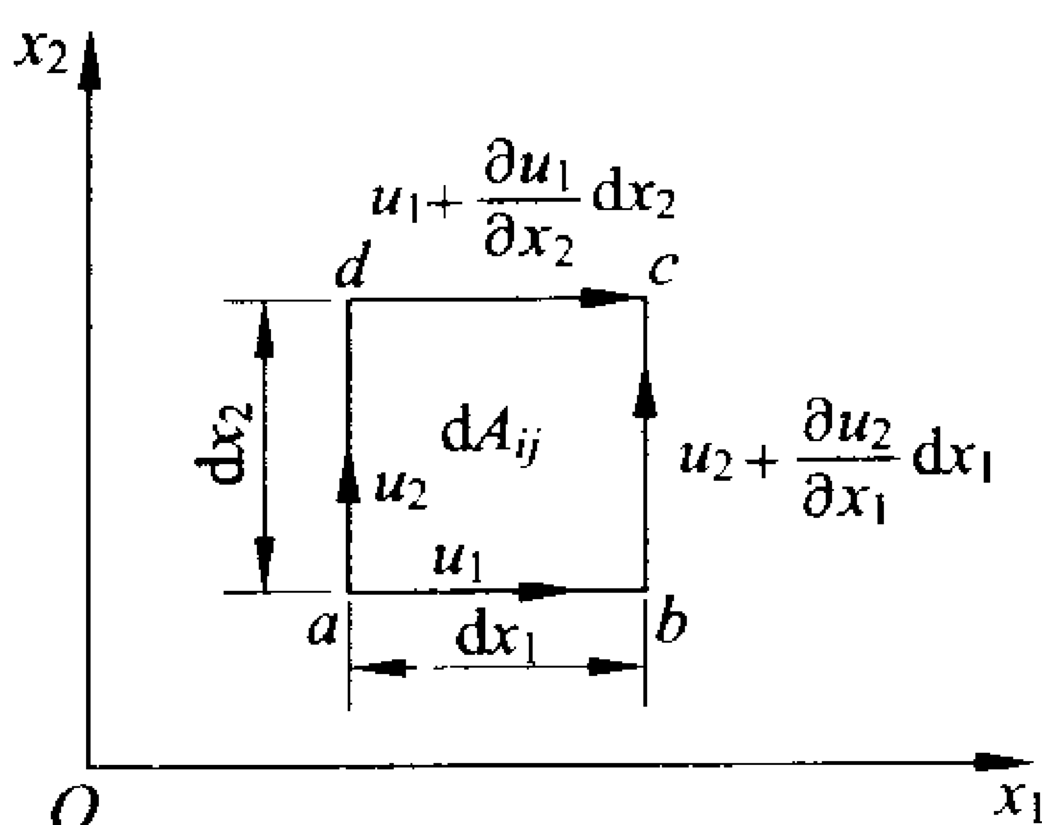


图 1-11 $\mathrm{d}A_{ij}$

$\left(u_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2$，而在 $\mathrm{d}A_{i+1,j}$ 中的 cb 线段其环量为 $-\left(u_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2$，二者抵消。最后只剩整个 A 域的边界 L 曲线上的微元段的环量得到保留，于是得到

$$\Gamma=\oint_L \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_A \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A \tag{1-36}$$

L 曲线和其所包围的面积可以推广至任意三维的情况。斯托克斯定理使得涡通量的计算得以简化，因为环量的计算是对流速向量进行线积分，如果直接计算涡通量，则需要对涡量进行面积分，且涡量又是流速的偏导数。

涡量不为零的流动称为有旋流动或有涡流动（rotational flow）。如果一个流场中任一点的涡量均为零则为无涡流动（irrotational flow），在这样的流场中当然没有涡线。

当流域为多连通域，如图 1-12 所示的一个无限长的柱形流域，不仅有外边界 L，而且有内边界 L'，则凡包围 L' 的曲线（如 L_1）则不可能无限地缩小到一点。多连通域要应用斯托克斯定理需要进行处理，即从外边界 L 上某一点 a 处切断流域至内边界 L' 上的 b 点，在紧靠 ab 处划出另一线段 $a'b'$，于是就形成了一个边界为 $abL'b'a'La$ 的区域，多连通域就变为单连通域，于是就可以应用

斯托克斯定理了，推导说明如下：

$$\iint_A \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = \oint_{abL'b'a'La} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其中：

$$\oint_{abL'b'a'La} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{ab} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{bL'b'} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{b'a'} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{a'La} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

而

$$\int_{ab} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{b'a'} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\int_{bL'b'} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{b'L'b} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

所以

$$\oint_{abL'b'a'La} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{a'La} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_{b'L'b} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \oint_{L'} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

从而可得

$$\iint_A \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = \oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \oint_{L'} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

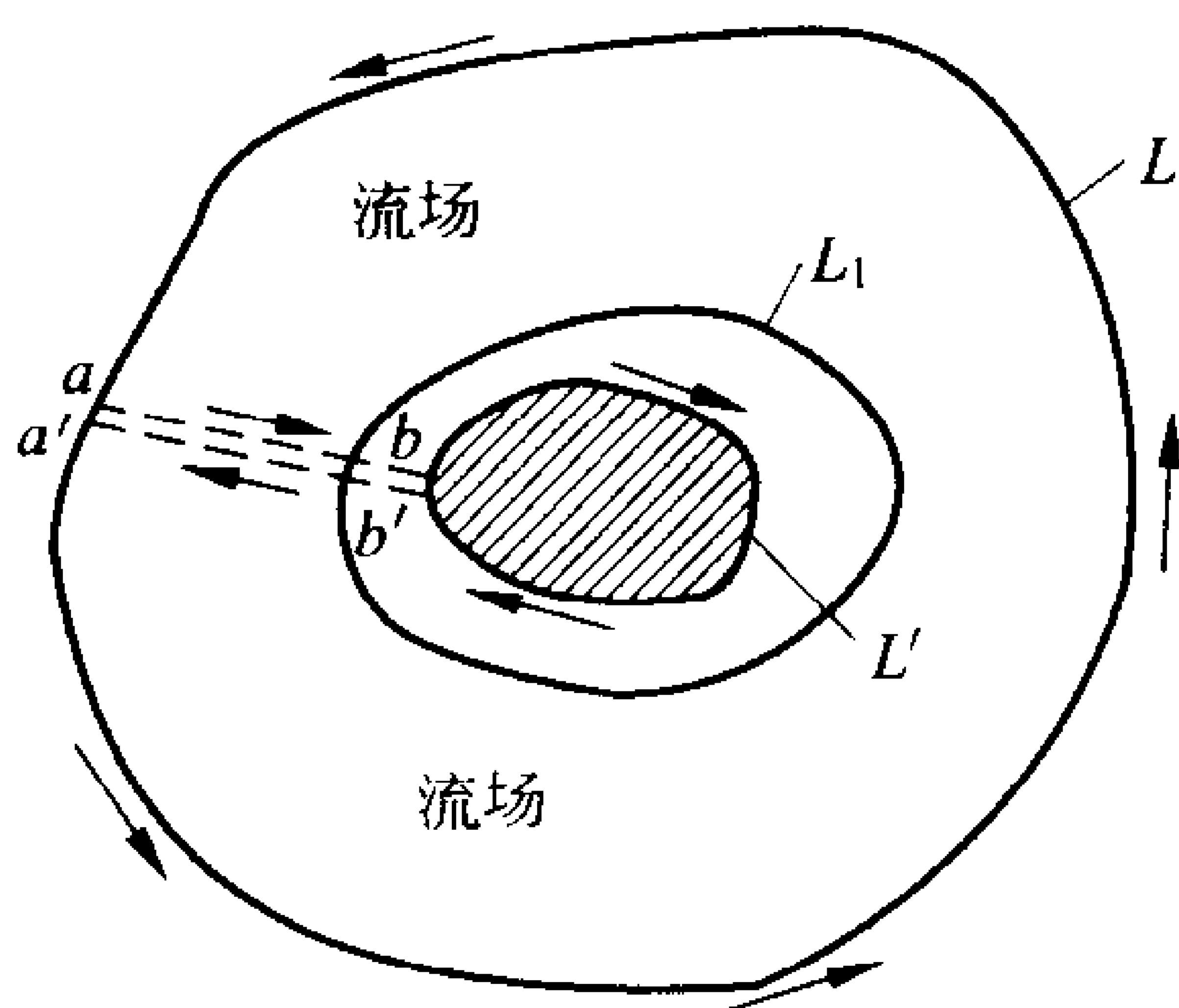


图 1-12 多连通域

令 $\Gamma_L = \oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\Gamma_{L'} = \oint_{L'} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则上式可改写为

$$\Gamma_L - \Gamma_{L'} = \iint_A \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A \tag{1-37}$$

多连通域具有重要的实际意义。例如：平面问题中固体在流体中运动就形成一个双连通域，这时绕固体的任意封闭曲线，其环量可能不为零。正是由于这个环量而产生了升力(lift)。这是近代航空飞行器发展的基础，将在第 7 章中详述。

1.5.3 涡线与涡管

涡线(vortex line)是某一固定瞬时在涡量场中的一条线，这条曲线上每一点的切线都与该点的涡量向量相平行。涡线上各点处的流体微团均绕各点处涡线的切线为轴而转动。涡线的方程式可由其定义给出

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{1-38}$$

在直角坐标系中写为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\Omega_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\Omega_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{\Omega_3(x_1, x_2, x_3, t)} \tag{1-39}$$

涡线与流线是两种性质不同的曲线，通过空间某点处，在指定时刻 t 可同时画出流线与涡线，一般来说二者会有一个交角 α。值得注意的是 α 的两个特例：一是 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，说明流线与涡线正交，为平面有涡流动；一是 $\alpha = 0$，说明流线与涡线重合，这就是螺旋流动(spiral flow)。

在涡量场中取一条不与涡线重合的封闭曲线，某一瞬时所有通过此封闭曲线上各点的涡线形成一个封闭的曲面，称为涡管(vortex tube)，如图 1-13 所示。涡管内的流体称为涡束。作一截面与涡管内所有涡线相垂直，以涡管的侧表面为界，这种截面称为

旋涡断面。旋涡断面缩至无穷小时的涡管称为元涡。元涡内的流体称为涡丝(vortex filament)。

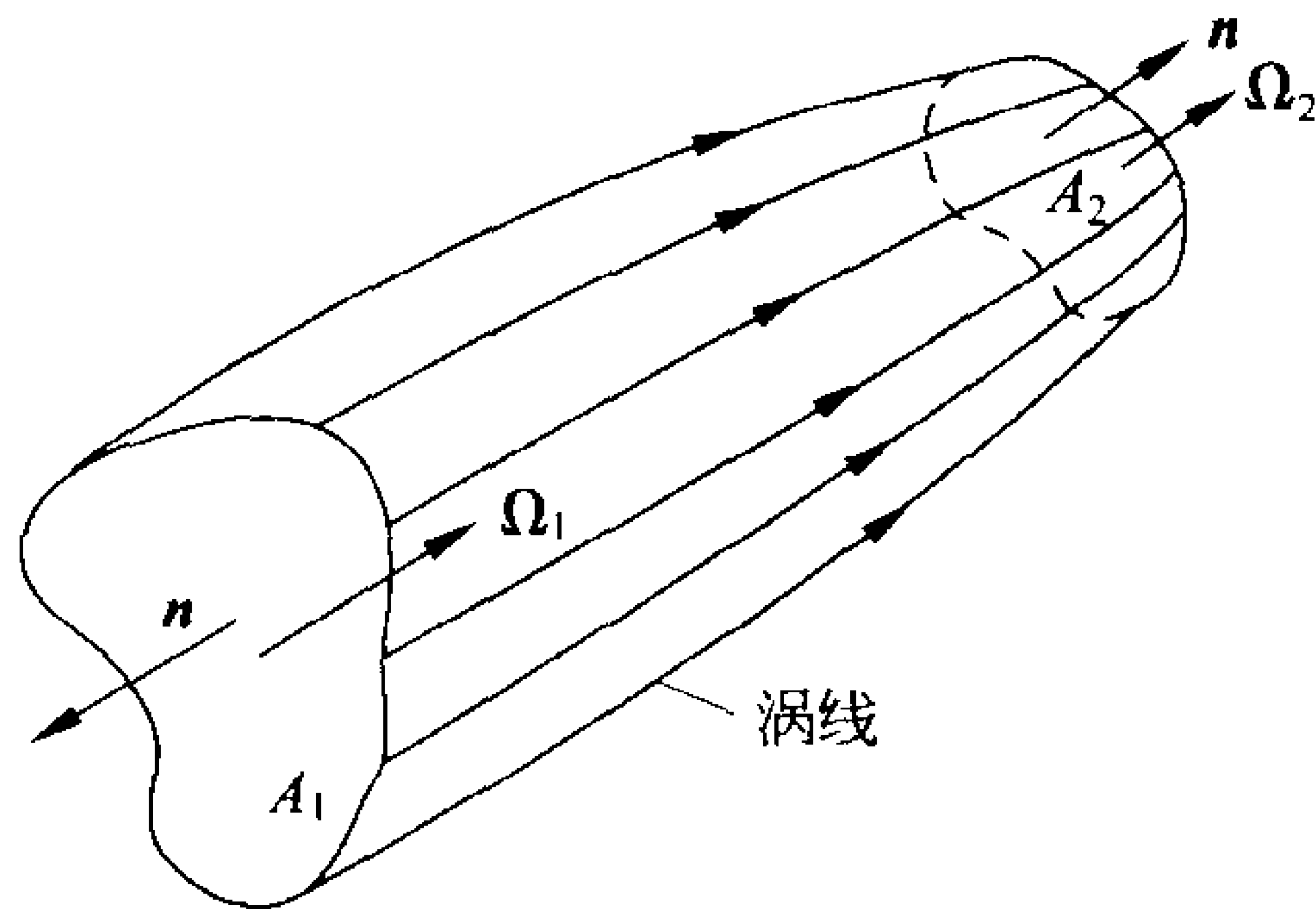


图 1-13　涡管段

像流管一样,由于$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=0$,涡量场也是无源场,涡管在涡量场内部也不可能终止,它必须是封闭管路,或延伸至无穷远,或终止于涡量场的边界上。边界可以是固体边界,也可以是液体与气体相交接的自由液面。

在涡量场内通过任一旋涡断面 A 的涡量 $\iint_A \boldsymbol{\Omega}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 称为涡通量(vorticity flux),或称为涡管的强度(vortex strength)。对式(1-34)应用高斯公式,在任意一段涡管中可得

$$\iiint_{V(t)} \nabla\cdot \boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}V = \iint_{S(t)} \boldsymbol{\Omega}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0 \qquad (1\text{-}40)$$

在涡管的所有侧面上 $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}=0$,因此在这段涡管的两个旋涡断面 A_1 及 A_2 上有

$$\iint_{A_1} \boldsymbol{\Omega}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A + \iint_{A_2} \boldsymbol{\Omega}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A = 0 \qquad (1\text{-}41)$$

如果令 Ω_1 表示 A_1 断面上的平均涡量,Ω_2 表示 A_2 断面上的平均涡量,则式(1-41)可改写为

$$\Omega_1 A_1 = \Omega_2 A_2 \qquad (1\text{-}42)$$

应用斯托克斯定理于一个涡管，由式(1-41)可得

$$-\Gamma_1+\Gamma_2=0$$

即

$$\Gamma_1=\Gamma_2 \tag{1-43}$$

由此可见：在涡管的任意断面上环量均相同。

1.6 亥姆霍兹速度分解定理

当流速场 $\boldsymbol{u}$ 给定，变形速率与流速场之间存在着运动学的关系。如图 1-14 所示，$P(\boldsymbol{x},t)$点处流速为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$，邻近一点 $Q(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t)$点处流速为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t)$，应用泰勒级数(Taylor series)展开，得

$$\begin{aligned}
u_i(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})&=u_i(\boldsymbol{x})+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_P\Delta x_j\\
&=u_i(\boldsymbol{x})+\Delta u_i\\
\Delta u_i&=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Delta x_j\\
&=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\Delta x_j\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\Delta x_j+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\Delta x_j\\
&=e_{ij}\Delta x_j+\xi_{ij}\Delta x_j
\end{aligned} \tag{1-44}$$

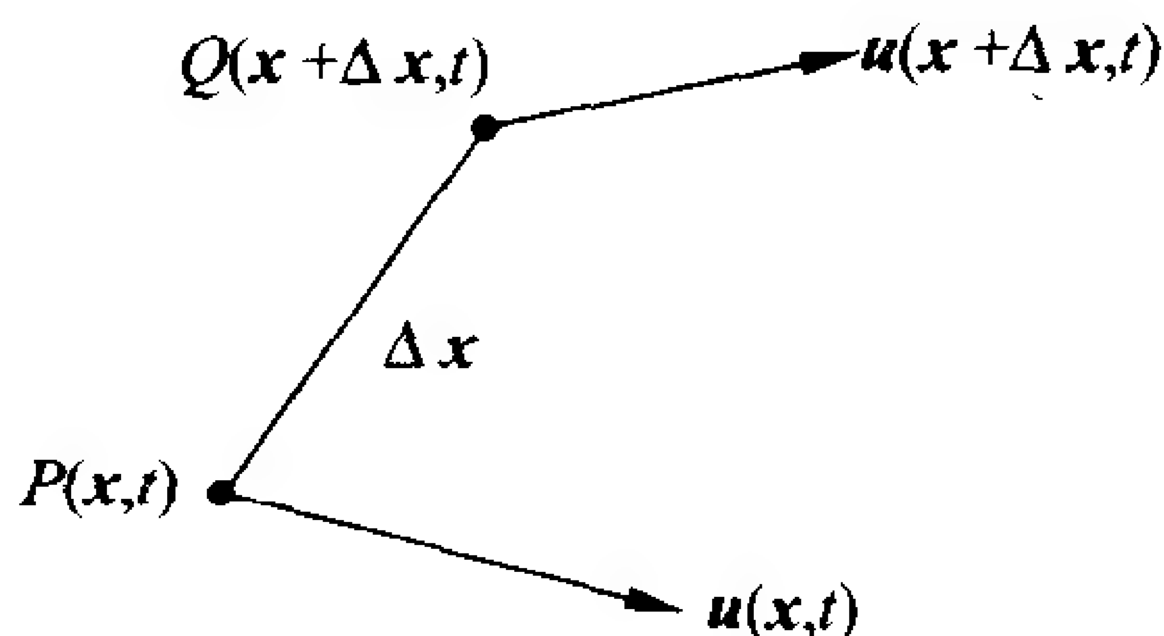


图 1-14 变形速率与流速场关系

根据附录 I.9，张量 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 可分解为一个对称张量 $e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ 和一个反对称张量 $\xi_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$，其中

$$e_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{1-45}$$

$$\xi_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{1-46}$$

e_{ij} 为流体运动中流体微团的变形速率张量；ξ_{ij} 为流体微团的角转速张量，或称转动张量。上述表达式中各项的物理意义如下：

1. 变形速率张量

考虑以 P 点为代表的流体微团，坐标原点位于 P 并跟随 P 点运动。这样可以把单纯位移的影响分离出去。

(1) 在 e_{ij} 中，如果除 $e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ 外，其他各项均为零，如图 1-15所示。经过 Δt 时间 S 点相对 P 点由于流体微团变形而移

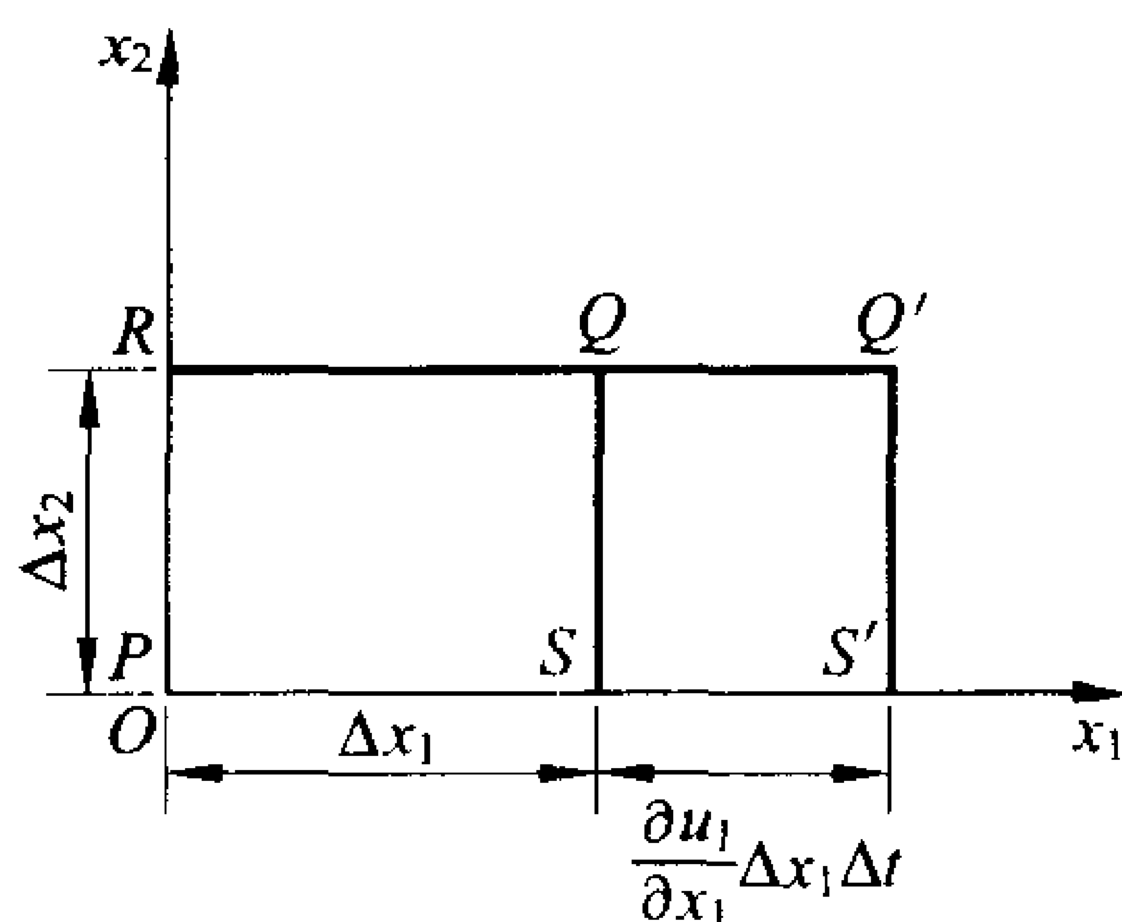


图 1-15　流体微团的线变形

至 S'处，即

$$SS'=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1\Delta t$$

由此可见：$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$是 PS 之间单位时间内单位长度的相对位移，称为线变形速率，同理$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$，$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$为 x_2，x_3 方向的线变形速率。体积膨胀率 e_{ii} 则为

$$e_{ii}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \tag{1-47}$$

（2）角变形率　　$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

由图 1-16 可知

$$\angle SPR-\angle S'PR'=\theta_1+\theta_2$$

$$\theta_1=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1\Delta t/\Delta x_1$$

$$=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta t$$

$$\theta_2=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta x_2\Delta t/\Delta x_2$$

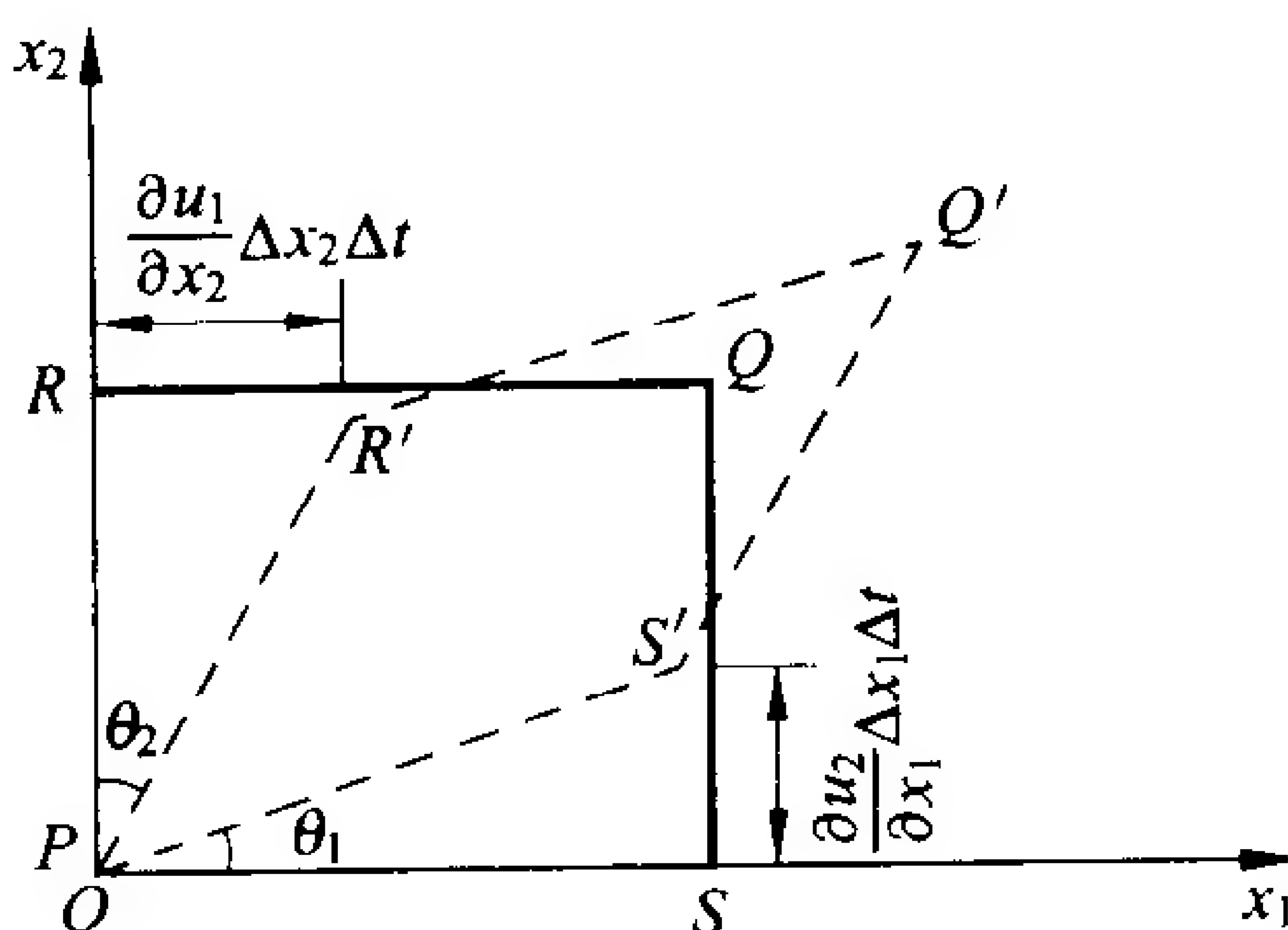


图 1-16　流体微团的角变形

$$=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta t$$

综合上述 3 式可得

$$\frac{\angle SPR-\angle S'PR'}{\Delta t}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=2e_{12}$$

同理可得 e_{13}，e_{23}

$$\left.\begin{aligned} e_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\\ e_{13}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\ e_{23}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1-48}$$

式中：e_{12}表示 x_1x_2 平面的角变形率；e_{13}表示 x_1x_3 平面的角变形率；e_{23}表示 x_2x_3 平面的角变形率。

2. 角转速张量 ξ_{ij}

角转速向量为 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}$。因此

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}&=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3\\ \omega_1&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\\ \omega_2&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\ \omega_3&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1-49}$$

如流体微团在流动中没有变形，$e_{ij}=0$，则由式(1-44)得

$$\Delta u_i=\xi_{ij}\Delta x_j$$

当 $i=1$，由式(1-46)可知 $\xi_{11}=0$，所以

$$\begin{aligned}\Delta u_1&=\xi_{12}\Delta x_2+\xi_{13}\Delta x_3\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\Delta x_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\Delta x_3\\ &=-\omega_3\Delta x_2+\omega_2\Delta x_3\end{aligned}\tag{1-50}$$

由理论力学可知：在图 1-17 中，当刚体绕 $O\text{-}O'$ 轴转动时，其上某一点 Q 之速度 $\Delta\boldsymbol{u}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}\times\Delta\boldsymbol{x}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{\omega}_1 & \boldsymbol{\omega}_2 & \boldsymbol{\omega}_3\\ \Delta\boldsymbol{x}_1 & \Delta\boldsymbol{x}_2 & \Delta\boldsymbol{x}_3\end{vmatrix}$$

$$\Delta u_i=\varepsilon_{ijk}\omega_j\Delta x_k \tag{1-51}$$

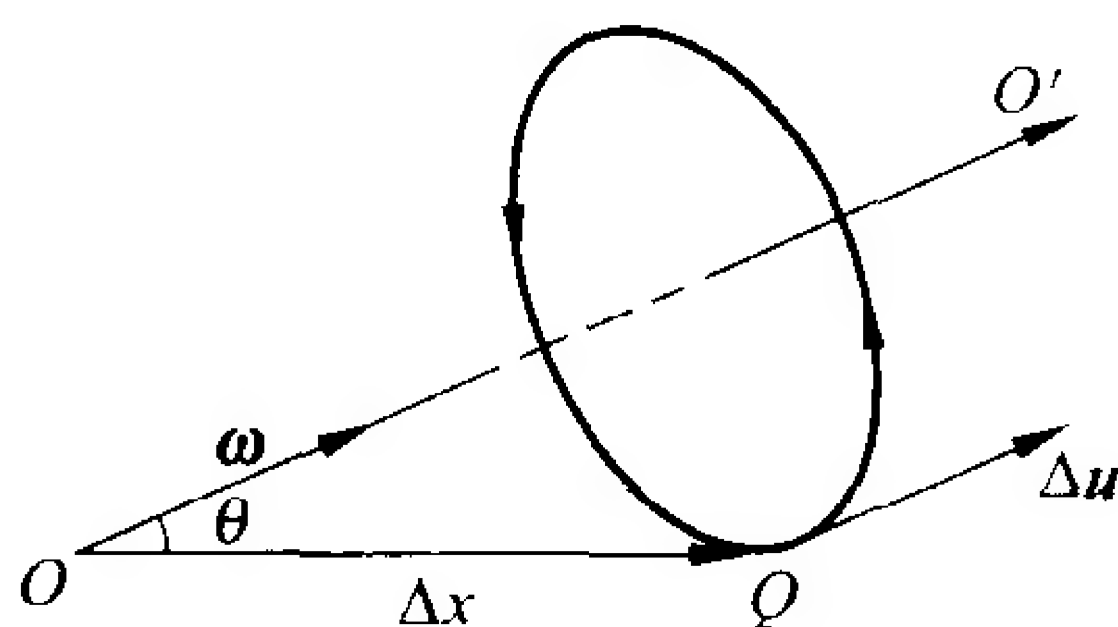


图 1-17 刚体的转动

由此可见：由转动引起的 x_1 方向的速度为

$$\Delta u_1=\omega_2\Delta x_3-\omega_3\Delta x_2$$

上式与式(1-50)完全相同。即 $\xi_{ij}\Delta x_j=(\boldsymbol{\omega}\times\Delta\boldsymbol{x})_i$，相当于具有角转速为 $\boldsymbol{\omega}$ 的刚体转动，ξ_{ij} 表示流体微团的角转速。二阶反对称张量 ξ_{ij} 还可以写为

$$\xi_{ij}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}[\varepsilon_{ijk}\Omega_k] \tag{1-52}$$

于是得到亥姆霍兹速度分解定理(Helmholtz velocity decomposing theorem)：流体运动中一点 P 与其邻近的 Q 点(图 1-14)，二者的速度差是由体积膨胀、剪切变形和转动三者组成。因此 Q 点的流速可分解为

$$u_i(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})=u_i(\boldsymbol{x})+e_{ij}\Delta x_j+\xi_{ij}\Delta x_j \tag{1-53}$$

1.7 有势流动

研究流体流动的特性，往往着眼于流场中某一处内大量流体质点所形成的流体微团在流动过程中的变化。由上节已知流体微团在流动过程中不仅有平移运动，而且由于流体质点之间的速度差别，在流动过程中出现流体微团的变形和旋转。而流动过程中流体微团是否存在旋转运动，对流动特性的影响最为重要。

流场中任一流体微团没有绕通过此微团的任何方向轴线旋转的流动，称为无旋流动或无涡流动。这时在整个流场中涡量处处为零，即 $\boldsymbol{\Omega}=0$。于是，根据斯托克斯定理式(1-35)，可得

$$\iint_A \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=\oint_L \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{1-54}$$

如果在流场中任意两点 A 和 B 之间绘出任意曲线 1 与 2 组成一个封闭环形曲线(见图 1-18)，则由 $\oint_L \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 可得

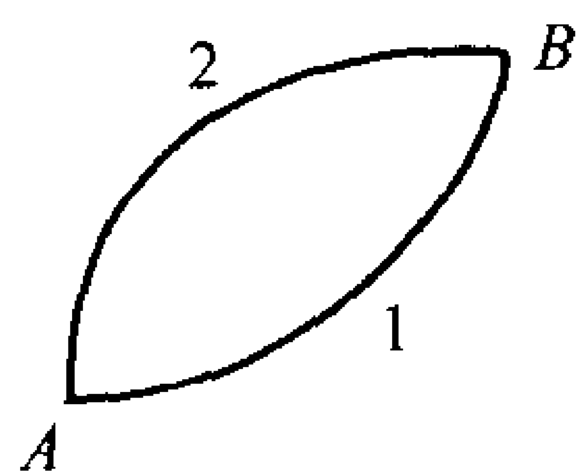


图 1-18 环形曲线

$$\int_{A\to 1}^{B}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{B\to 2}^{A}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

如果改变回转方向，则标量积 $\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 改变符号，即

$$\int_{B\to 2}^{A}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{A\to 2}^{B}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

代入上式得

$$\int_{A\to 1}^{B}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_{A\to 2}^{B}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

$$\int_{A\to 1}^{B}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{A\to 2}^{B}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-55}$$

式(1-55)说明：由 A 点至 B 点流速向量的曲线积分与路径无关，只决定于两个端点 A 与 B 的位置。这样的向量为有势向量(potential vector)，有势向量场中存在一个连续可微的标量函数

ϕ,称为势函数。对于流场而言,当流速向量为有势向量,势函数 ϕ 称为流速势(velocity potential)。具有流速势的流动称为有势流动(potential flow)。无涡流动就是有势流动。有势流动中,只要求得流速势函数 ϕ 在空间上的分布 $\phi(\boldsymbol{x})=\phi(x_1,x_2,x_3)$,就可求得流速向量,因为流速向量 $\boldsymbol{u}$ 与流速势 ϕ 的关系为

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi \tag{1-56}$$

空间任一点的流速在三个坐标轴上的分量为 u_1,u_2,u_3,由上式可知

$$u_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\quad u_2=\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\quad u_3=\frac{\partial\phi}{\partial x_3} \tag{1-57}$$

这时流场中涡量 $\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\nabla\times\nabla\phi=0$,可见是无涡的。

由无涡流动的条件 $\nabla\times\boldsymbol{u}=0$,可写出其分量形式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=0\quad\text{或}\quad\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\&\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0\quad\text{或}\quad\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\\&\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=0\quad\text{或}\quad\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\end{aligned}\right\} \tag{1-58}$$

从数学上讲,这就是使速度 u_1,u_2,u_3 的表达式($u_1\mathrm{d}x_1+u_2\mathrm{d}x_2+u_3\mathrm{d}x_3$)为某一标量函数 ϕ 的全微分的必要和充分条件。因此,无涡流动中有

$$\mathrm{d}\phi=u_1\mathrm{d}x_1+u_2\mathrm{d}x_2+u_3\mathrm{d}x_3=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \tag{1-59}$$

可见

$$u_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\quad u_2=\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\quad u_3=\frac{\partial\phi}{\partial x_3}$$

即

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi$$

与式(1-57)一致。

如把式(1-57)代入不可压缩流体的连续方程(1-17),得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0 \qquad (1\text{-}60)$$

使用拉普拉斯算子(Laplace operator)$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$,则

$$\nabla^2\phi=0 \qquad (1\text{-}61)$$

式(1-61)称为拉普拉斯方程(Laplace equation)。有势流动把流速的三个分量归并成一个流速势函数,只有一个未知量,从而使问题的求解大大简化。而且由于流速势满足拉普拉斯方程。拉普拉斯方程为二阶线性椭圆形的偏微分方程,数学上曾进行过大量的研究,从而使得在求解时,可充分发挥数学分析方法的优势。

在单连通域内,ϕ 为单值函数,即在域内每一点处只能有一个 ϕ 值。由式(1-56)可得 $\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\phi$,因此流场中一点 $P(\boldsymbol{x})$ 处的 ϕ 值为

$$\phi(P)=\int_A^P \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (1\text{-}62)$$

式中:A 为线积分的起点,该点处 ϕ 值应为零。对于不恒定流动,则 ϕ 不仅是空间点的函数而且是时间 t 的函数,即 $\phi=\phi(\boldsymbol{x},t)$。

单连通域势流流动中由于流速势为单值函数。因此流线不可能是封闭的,因为封闭的流线其环量不可能为零,从而违反了 ϕ 为单值函数的结论。

双连通域中,如图 1-12 的无限长柱形曲面之间的区域,由式(1-54),对于有势流动 $\boldsymbol{\Omega}=0$,因此可得

$$\Gamma_L-\Gamma_{L'}=0$$

$$\Gamma_L=\Gamma_{L'} \qquad (1\text{-}63)$$

在内、外边界之中取任意包围内边界 L' 的曲线 L_1,均可由同样的方法证明沿 L_1 曲线的环量 Γ_{L_1} 也等于 $\Gamma_{L'}$。由此可见:在双连通域有势流场中,包围内边界的任何封闭曲线上的环量为常数,等于

内边界周线 L'上的环量 $\Gamma_{L'}$。每绕包围内边界的封闭曲线一次，环量将增加 $\Gamma_{L'}$，若绕行 n 次则环量增加 $n\Gamma_{L'}$。封闭曲线上任一点的速度势 ϕ 也将随着绕内边界的次数而增加 $n\Gamma_{L'}$。可见：在双连通域中，有势流场中一点的速度势并不是单值函数而是多值的。任意两点之间的速度势的差值等于该两点之间任意曲线积分 $\int \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 加 $n\Gamma_{L'}$，视绕过内边界的次数 n 而定。

第2章

流体运动的基本方程

流体运动学只就流体运动的表现来研究流体运动，而不涉及流体运动的发生以及流体运动状态改变的原因，也就是没有研究力(force)的作用。本章将研究力对流体运动的作用，从而导出控制流体运动的基本方程式。首先给出研究真实流体，即考虑流体粘性时的动力学基本方程式——纳维-斯托克斯方程，进而建立对于理想流体流动的欧拉方程以及欧拉方程的积分——伯努利方程。

流体都是有粘性的，但在某些情况下粘性的作用很小以至可以忽略。忽略粘性的流体是一种理想化了的流体，故称理想流体。本书中主要研究对象是以水为代表的液体，因此可以不考虑压缩性。不考虑流体的粘性和压缩性使得流动问题的数学处理大为简化，因此理想流体运动的数学描述达到更加完美的地步。但是必须十分注意在哪些情况下可以把流体当作理想流体来处理，在有些情况下忽略粘性将招致重大的谬误。

一般情况下，当表征流体惯性力与粘性力之比的雷诺数(Reynolds number)很大时，粘性对流动的影响将集中于固体边界附近很薄的边界层(boundary layer)内，而边界层以外的广大区域流动完全可以看成是理想流体的运动。对于边界层而言，其外缘的流速及压强将由绕流物体的理想流体势流理论给出，可见对理

想流体运动的研究，即使在解决真实流体运动时，也具有十分重要的意义。

由于粘性流体运动已另有《粘性流体力学》①一书专门论述，因此本书将重点讨论理想流体的运动。在很多流体运动问题中，理想流动的研究往往具有基础性的意义。

在波浪运动的研究中也常常把流体看作理想流体，但这是基于假设某个特征长度（如波长）和某个特征速度（如波速）所组成的雷诺数很大，粘性的影响将只集中于沿固体边界或自由表面的边界层内。

本章给出的欧拉方程和第1章给出的连续方程构成了理想流体运动封闭的基本方程组。在给定的边界条件和初始条件下，原则上说可以解决所有理想流体的流动问题，求得其流速场和压强场。但是由于欧拉方程的非线性，基本方程求解仍很困难。当流动为恒定流动或无涡流动，欧拉方程可以通过积分得到伯努利方程。由于伯努利方程在工程实际中应用得很广泛，因此本章中对各种流动情况下的伯努利方程进行了深入的讨论。

2.1 流体中的作用力

流体的各种物理性质引发了各种不同性质的作用力，例如：由于流体具有质量，在万有引力场中有重力；由于流体的粘滞性，在流体内部或流体与边界之间有摩擦阻力；由于流体的压缩性，因而有弹性力；由于流体中分子运动的特点，在流体内部或流体与边界之间作用有压力等等。所有这些力如果按其作用于流体的方式，则可将作用力分为体积力和面积力两种：

① 章梓雄，董曾南. 粘性流体力学. 北京清华大学出版社，1998

1. 体积力(body force)

体积力是作用于流体质量上的非接触力，例如地心引力等。这种力作用于每一流体质点上。体积力可表示为$\rho f V$。其中：$\boldsymbol{f}$为单位质量力；ρf为单位体积力。

2. 面积力(surface force)

面积力为流体或固体通过接触面而施加在另一部分流体上的力。它是流体在运动过程中作用在流体内部假想的面积上的，由于流体的变形和相互作用而在流体内部产生的各种应力，或者是流动的固体边界对流体所施加的面积力。设单位面积上的面积力为$\boldsymbol{p}$，它是空间坐标$\boldsymbol{x}$，时间t和作用面外法线方向$\boldsymbol{n}$的函数，$\boldsymbol{n}$为单位法线向量。令

$$\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3) \tag{2-1}$$

$$\boldsymbol{n}=(n_1, n_2, n_3) \tag{2-2}$$

下标1,2,3分别表示为x_1, x_2, x_3轴上的分量。流场中某一坐标点处，某一时刻t时的流体面积力，由于它是向量$\boldsymbol{n}$的一个向量函数，所以可写为9项：

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\sigma_{11}n_1+\sigma_{21}n_2+\sigma_{31}n_3 \\ p_2&=\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{32}n_3 \\ p_3&=\sigma_{13}n_1+\sigma_{23}n_2+\sigma_{33}n_3 \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

一点的应力状态如图2-1所示，常用应力张量(stress tensor)σ_{ij}来表示，σ_{ij}下标中i表示作用面的外法线方向，j表示面积力的方向。σ_{ij}为空间点坐标及时间t的函数。

$$\sigma_{ij}\equiv\boldsymbol{\sigma}\equiv\begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} \tag{2-4}$$

式(2-3)写为张量形式为(见附录中Ⅰ.11)

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{2-5}$$

或

$$p_i=\sigma_{ji}n_j \tag{2-6}$$

式(2-5)表明面积力可以表示为受力面积外法线单位向量 $\boldsymbol{n}$ 与该点应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的点积。

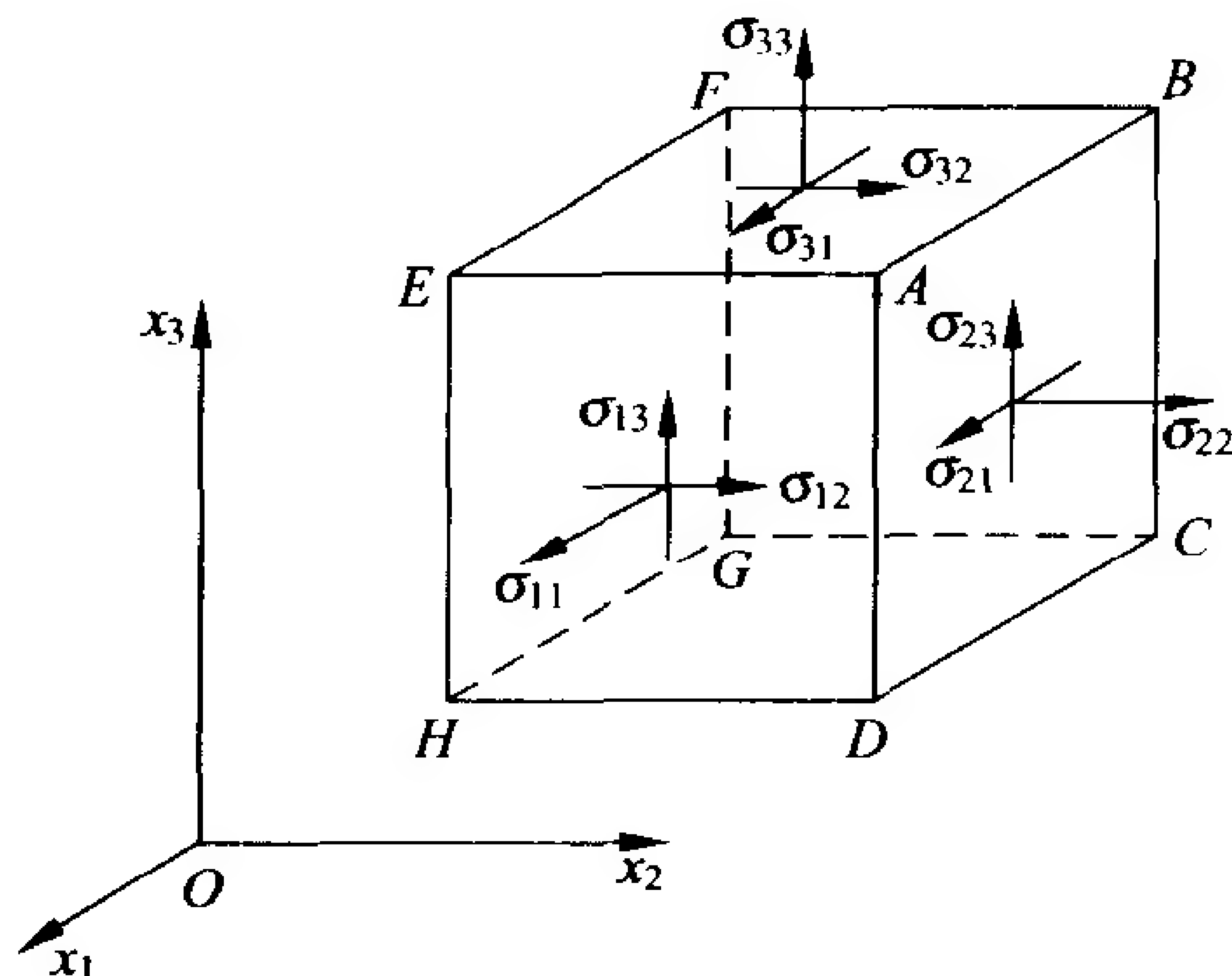


图 2-1　流体中一点的应力状态

2.2　纳维-斯托克斯方程

在明确了流体中的作用力后,可以推导实际流体中的动量方程式,即纳维-斯托克斯方程。

2.2.1　雷诺第二输运方程

应用输运方程(1-12),如把(ρF)看作某一物理量,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}(\rho F)\mathrm{d}V=\iiint_{V(t)}\left[\frac{\mathrm{d}(\rho F)}{\mathrm{d}t}+(\rho F)(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}V$$

$$=\iiint_{V(t)}\left[\rho\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+F\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho F(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}V$$

上式等号右侧第二、三两项可写为 $F\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right]$,由式(1-16)可知此项为零,于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}(\rho F)\mathrm{d}V=\iiint_{V(t)}\rho\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V\tag{2-7}$$

上式即为雷诺第二输运方程。

2.2.2 动量方程

动量方程(momentum equation)是动量守恒原理在流体运动中的表现形式。运动着的流体微团的动量可表示为

$$\boldsymbol{u}\mathrm{d}m = \rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V$$

动量守恒原理要求流体系统的动量变化率等于该系统上的全部外力的合力,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}\rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \sum\boldsymbol{F}$$

F 为外力,由 2.1 节可知外力包括了体积力和作用于控制体表面的面积力,于是动量方程式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}\rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \iiint_{V(t)}\rho\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V + \iint_{S(t)}\boldsymbol{p}\mathrm{d}S$$

此即拉格朗日型积分形式的动量方程。右侧第一项为体积力,第二项为面积力。由雷诺第二输运方程,上式改写为

$$\iiint_{V(t)}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \iiint_{V(t)}\rho\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V + \iint_{S(t)}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S$$

上式就是欧拉型积分形式的动量方程。上式也可写为

$$\iiint_{V(t)}\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \iiint_{V(t)}\rho f_i\mathrm{d}V + \iint_{S(t)}n_j\sigma_{ji}\mathrm{d}S$$

由高斯公式,上式等号右侧第二项的面积分可改写为体积分的形式,即

$$\iint_{S(t)}n_j\sigma_{ji}\mathrm{d}S = \iiint_{V(t)}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\mathrm{d}V$$

从而动量方程可写为

$$\iiint_{V(t)}\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \iiint_{V(t)}\rho f_i\mathrm{d}V + \iiint_{V(t)}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\mathrm{d}V \tag{2-8}$$

由于 $V(t)$ 是任取的一个控制体体积,可得微分形式的欧拉型动量

方程，即

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \tag{2-9}$$

式(2-9)的向量形式可写为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{2-10}$$

这里并未考虑作用力的物理性质，而只是考虑了力作用于流体的方式，即体积力与面积力的形式。

式(2-9)中物质导数展开后为

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \tag{2-11}$$

以 u_i 乘连续方程式(1-15)，即

$$u_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{2-12}$$

式(2-11)加式(2-12)，得

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \sigma_{ji}) \tag{2-13}$$

式中：$\rho u_i u_j - \sigma_{ji} = \pi_{ij}$ 称为动量通量张量(momentum flux tensor)，它是一个对称张量。所以式(2-13)又可写为

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} = \rho \boldsymbol{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} \tag{2-14}$$

现在来证明应力张量 σ_{ij} 为对称张量，即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$。由动量矩守恒原理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V(t)} \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{u}) \mathrm{d}V = \text{力矩之和}$$

式中：$\times$ 表示叉乘。在流体上作用的有体积力和表面力。力矩之和应为 $\iiint_{V(t)} \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{f}) \mathrm{d}V + \iint_{S(t)} \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathrm{d}S$。应用雷诺第二输运方程，上式等号左侧为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)} \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{u})\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)} \rho(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V(t)} \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V(t)} \rho\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{u}\right) + \left(\boldsymbol{x} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)\right]\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V(t)} \rho\, \boldsymbol{x} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

上式推导中应用了$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0$。

表面力力矩可应用附录 Ⅰ.8 所述的置换张量 ε_{ijk} 来表示两向量叉乘,则表面力力矩为

$$\iint_{S(t)} \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{S(t)} \varepsilon_{ijk} x_j (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})_k \mathrm{d}S$$

$$= \iint_{S(t)} \varepsilon_{ijk} x_j n_l \sigma_{lk} \mathrm{d}S$$

$$= \iiint_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (x_j \sigma_{lk})}{\partial x_l}\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_l}\sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V$$

式中:$\frac{\partial x_j}{\partial x_l}$ 可写为 δ_{jl} 形式的单位张量。于是表面力力矩进一步可写为

$$\iiint_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V = \iiint_{V(t)} \left(\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V \tag{2-15}$$

而体积力力矩为

$$\iiint_{V(t)} (\boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{f})\mathrm{d}V = \iiint_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k \mathrm{d}V \tag{2-16}$$

所以应用置换张量 ε_{ijk} 后，动量矩守恒方程式可写为

$$\iiint_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k \mathrm{d}V + \iiint_{V(t)} \left(\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}V \tag{2-17}$$

将动量方程式(2-8) 中 i 换为 k，j 换为 l，方程式仍成立，即

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V = \iiint_{V(t)} \rho f_k \mathrm{d}V + \iiint_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \mathrm{d}V \tag{2-18}$$

式(2-18)中每一项乘以 $\varepsilon_{ijk} x_j$，则

$$\iiint_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V = \iiint_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k \mathrm{d}V + \iiint_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \mathrm{d}V \tag{2-19}$$

将式(2-17)减式(2-19)，得

$$\iiint_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} \mathrm{d}V = 0$$

$V(t)$ 为任意一个控制体体积，所以

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$

对此式令 $i = 1$，则 $\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$；同理 $i = 2$、$-\sigma_{13} + \sigma_{31} = 0$；$i = 3$，$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$；可见

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2-20}$$

即证明了 σ_{ij} 为对称张量。同样可以证明 $\rho u_i u_j$ 是对称张量，因此 $\pi_{ij} = \rho u_i u_j - \sigma_{ij}$ 也是对称张量。

2.2.3 偏应力张量

对于静止流体，一点处的面积力与作用面外法线方向平行，但方向相反，且单位面积上的作用力的大小与作用面法线方向无关，即静止流体的面积力是不随方向变化的法向压应力 —— 压强。

$$p_i = \sigma_{ji} n_j = -p n_i \tag{2-21}$$

式中：p 为流体静压强，也是热力学平衡态压力，其大小与作用面法线方向 n_i 无关，只是坐标 $\boldsymbol{x}$ 与时间 t 的标量函数，即 $p=p(\boldsymbol{x},t)$。所以

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij} \tag{2-22}$$

式中：δ_{ij} 为单位张量(见附录 Ⅰ.8)。

在理想流体中，不论流体是静止还是流动，式(2-22)的关系永远存在。也就是说，理想流体中面积力只有压力且一点的压强与作用面法线方向无关。但是对于粘性流体流动时，面积力不仅有法向压应力，而且还有与作用面平行的切应力。粘性流动中一点处的压强不仅随空间坐标位置和时间而变化，而且也随作用面法线方向不同而变化。对于粘性流动，一点处的应力张量可写为

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\tau_{ij} \tag{2-23}$$

式中：τ_{ij} 表示由于流体粘性而产生的应力张量中与理想流体不同的那一部分，称为偏应力张量(deviatoric stress tensor)，或粘性应力张量(viscous stress tensor)。也就是粘性流动与理想流动在面积力方面的偏离。式(2-23)中 σ_{ij}，δ_{ij} 均为对称张量，因此 τ_{ij} 也是对称张量。由式(2-23)偏应力张量 τ_{ij} 为

$$\begin{aligned}\tau_{ij}&=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\sigma_{11}+p&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}+p&\sigma_{23}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}+p\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2-24}$$

由此，动量方程式(2-10) $\rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 中

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}&=\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}-p\boldsymbol{\delta})\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}-\nabla p\end{aligned}$$

于是动量方程又可写为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{2-25}$$

2.2.4 牛顿流体的本构方程

把应力张量 σ_{ij} 与变形速率张量 e_{ij} 联系起来的方程式称为本构方程(constitutive equation)。根据牛顿粘性切应力公式(0-2) 得

$$\tau_{21} = \mu \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_2} \tag{2-26}$$

斯托克斯提出了在牛顿流体中应力张量与变形速率张量之间的一般关系的三项假定:

(1) 在静止流体中,切应力为零。正应力的数值为流体静压强 p,即热力学平衡态压强。

(2) 应力张量 σ_{ij} 与变形速率张量 e_{ij} 之间为线性关系。

(3) 流体是各向同性(isotropic) 的,也就是说流体的物理性质与方向无关,只是坐标位置的函数。应力张量与变形速率张量的关系也与方向无关。

实验证明:宇宙中大量存在的、与人类生活密切相关的水和空气都是牛顿流体。本节中将只限于讨论牛顿流体中应力张量与变形速率张量的关系。

在式(2-23) 中,δ_{ij} 为单位张量,p 为流体的平衡态压强,因此应力张量中只有偏应力张量 τ_{ij} 为未知量。τ_{ij} 为一对称张量,当流体静止时或在均匀流动中,τ_{ij} 为零。因此粘性应力张量 τ_{ij} 只依赖于流体质点附近的瞬时流速分布情况,即只依赖于当地流速梯度 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$。流速梯度张量$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 是由变形速率张量 e_{ij} 与转动张量 ξ_{ij} 所组成。但转动对粘性应力张量 τ_{ij} 并无影响,因此把偏应力张量 τ_{ij} 与变形速率张量 e_{kl} 联系起来的本构关系应为

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} e_{kl} \tag{2-27}$$

式中:τ_{ij} 与 e_{kl} 均为对称张量,各有 6 个独立的分量。τ_{ij} 中每一个分

量均可表示为 e_{kl} 的 6 个分量的线性组合，因而联系二者的系数 A_{ijkl} 应有 36 个分量，均为待定值。它们依赖于当地的热力学状态，而与 e_{kl} 无关。

由斯托克斯的第三项假定 —— 流体为各向同性，坐标系方向的选择将不影响处理流体运动的结果。A_{ijkl} 为一各向同性的四阶张量。偶数阶的各向同性张量均可写为单位张量乘积的组合①，即

$$A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu'\delta_{il}\delta_{jk} \tag{2-28}$$

式中：λ,μ,μ' 为标量。由于 A_{ijkl} 为对称张量，当 i 与 j 对调，k 与 l 对调该张量应不变，因此必然得到 $\mu=\mu'$。于是式(2-28)又可写为

$$A_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

把上式代入式(2-27)，得

$$\tau_{ij}=[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})]e_{kl} \tag{2-29}$$

利用除非 $l=k$，否则 $\delta_{kl}=0$ 的关系，把上式等号右侧第一项的 l 均以 k 代之，即

$$\lambda\delta_{ij}e_{kk}=\lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=\lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

同样如以 i 代替 k，j 代替 l，则式(2-29)等号右侧第二项为 μe_{ij}；以 i 代替 l，j 代替 k，则式(2-29)等号右侧第三项为 μe_{ji}。e_{ij} 为对称张量，即 $e_{ij}=e_{ji}$，从而式(2-29)又可写为

$$\tau_{ij}=\lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{u}+2\mu e_{ij} \tag{2-30}$$

上式代入式(2-23)即得牛顿流体的本构方程式

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{u}+2\mu e_{ij} \tag{2-31}$$

上式表示应力张量可由一个二阶的变形速率张量表示。式中：系数 μ 为粘度；λ 为第二粘度。μ 和 λ 只能由试验得到。

当流体静止时 $\tau_{ij}=0$，p 为流体静压强，此时由式(2-23)可得 $\sigma_{11}=-p$，$\sigma_{22}=-p$，$\sigma_{33}=-p$，故

---

① 王甲升．张量分析及其应用．北京：高等教育出版社，1987.90

$$\sigma_{ii}=-3p$$

或

$$p=-\frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

将此式引申至粘性流动中，如果定义在流动着的粘性流体中一点的压强为

$$\overline{p}=-\frac{1}{3}\sigma_{ii} \tag{2-32}$$

称 $\overline{p}$ 为一点处的平均压强。于是可得

$$-3\overline{p}=\sigma_{ii}=-3p+3\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}+2\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

$$p-\overline{p}=\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\mu_v\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{2-33}$$

式中：μ_v 称为容积粘度(bulk viscosity)。$\mu_v=\lambda+\frac{2}{3}\mu$。由式(2-33)可知：除非 μ_v 或$\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 为零，否则粘性流动中一点的平均压强 $\overline{p}$ 与静水压强或热力学平衡态压强并不相同。这里所以用 σ_{ii}来定义 $\overline{p}$ 是因为 σ_{ii} 在坐标变换中是应力张量中的不变量。对于单原子气体，$\mu_v=0$，因而 $\lambda=-\frac{2}{3}\mu$，而且 $\overline{p}=p$；对于双原子气体或多原子流体 μ_v 不是零，但一般都是很小的数值，如果采用斯托克斯假设则 $\mu_v\equiv0$；对于理想流体($\tau_{ij}=0$)和不可压缩流体($\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$)，同样都可从式(2-33)得知 $\overline{p}=p$。

对于不可压缩的粘性流动$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$，则由式(2-31)可得

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{2-34}$$

从而得到三个坐标轴方向的正应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}&=-p+2\mu e_{11}=-p+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\ \sigma_{22}&=-p+2\mu e_{22}=-p+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\\ \sigma_{33}&=-p+2\mu e_{33}=-p+2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{aligned}\right\} \tag{2-35}$$

由此可见：不可压缩的粘性流动在不同方向上的正应力具有不同的数值，但式(2-35)的三个分式相加后仍然得到

$$\overline{p}=-\frac{1}{3}\sigma_{ii} \tag{2-32}$$

2.2.5 纳维-斯托克斯方程

微分形式的动量方程为

$$\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\rho f_i+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} \tag{2-9}$$

当容积粘度 $\mu_v=0,\lambda=-\frac{2}{3}\mu$，由牛顿流体本构方程式(2-31)可得

$$\sigma_{ij}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{2-36}$$

将式(2-36)代入式(2-9)得

$$\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\rho f_i-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2-37}$$

此式为牛顿流体的运动方程，称为纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes equation)，简称 N-S 方程。这一方程于 1821 年由法国力学家纳维提出，1845 年英国力学家斯托克斯完成最终的型式。如果 μ 为常数，则式(2-37)又可写为

$$\begin{aligned}\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}&=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\\&\quad+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\\&=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right]\end{aligned} \tag{2-38}$$

对于不可压缩流动 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$，上式变为

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{2-39}$$

上式的向量形式为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho \boldsymbol{f}-\nabla p+\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{2-40}$$

式中$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$称为拉普拉斯算子。

2.2.6 纳维-斯托克斯方程的初始条件和边界条件

在建立 N-S 方程后，为了确定粘性流动的流场，必须给定流动问题的初始条件和边界条件。

对于不恒定的粘性流动，需给出流场在初始时刻($t=t_0$)的状态，即 $t=t_0$ 时各种物理量在空间的分布，包括速度、压强等，即为初始条件。对于恒定流动，则各种物理量并不随时间变化因此不需要初始条件。

流体运动的控制方程，包括连续方程和 N-S 方程，对于任何流动都是一致的。但是自然界中的流动却千差万别，其主要原因在于边界条件的不同。从物理方面讲，在连续介质假定下，由试验所确定的粘性流动的边界条件是在流体与固体的交界面处，流体与固边边界无相对滑移。当然从分子的尺度来看，滑移是可能的，但这种滑移只限于其厚度仅有一个分子平均自由程量级的薄层内。

在固体边界处，如果固体边界的速度为 $\boldsymbol{U}$，则粘性流动的边界条件即粘性流体边界的速度为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U} \tag{2-41}$$

如将流速分解为沿固体壁面法线与切线方向的两个分速，则切线方向的分速为

$$u_t=U_t \tag{2-42}$$

式(2-42)称为无滑移条件(no slip condition)。这一条件是粘性

流动与无粘性流动的重要区别。对于无粘性流动不存在无滑移条件，边界上流体质点允许与固体边界有相对滑动。流速在法线方向的分速为

$$u_n = U_n \tag{2-43}$$

式(2-43)称为无穿透条件(impermeable condition)。这一条件对于粘性或无粘性流体并无区别，但如固体边界为透水边界则应另行处理。最简单的情况是当流动的固体边界为静止不动，这时$u_n = U_n = 0$。如果边界在运动，则式(2-43)成立。设边界面的方程式为

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \tag{2-44}$$

边界面上任意一点(x_1, x_2, x_3)其单位法线向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \dfrac{\partial F}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial F}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2}} \tag{2-45}$$

令

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2} = R \tag{2-46}$$

则单位法线向量 $\boldsymbol{n}$ 沿三个坐标轴的分量为

$$n_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial x_1},\ n_2 = \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial x_2},\ n_3 = \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial x_3} \tag{2-47}$$

(x_1, x_2, x_3)点处固体边界运动的速度为

$$\boldsymbol{U} = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 \tag{2-48}$$

(x_1, x_2, x_3)点处流体质点的速度为

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2-49}$$

这两个速度在(x_1, x_2, x_3)点处法线方向的分量分别为U_n和u_n。

固体边界运动的速度在(x_1, x_2, x_3)点处法线方向的分速为

$$U_n = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2-50}$$

式(2-44)对任何时间都是成立的，因此对该式在$(t+\Delta t)$时间展开有

$$0=F(\boldsymbol{x},t+\Delta t)=F(\boldsymbol{x},t)+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\Delta t+O(\Delta t)^2$$

由于$F(\boldsymbol{x},t)=0$和忽略二阶小量$O(\Delta t)^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2-51}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial F}{\partial t}$$

把上式代入式(2-50)可得

$$U_{\mathrm{n}}=\frac{1}{R}\left(-\frac{\partial F}{\partial t}\right) \tag{2-52}$$

流体质点的速度在(x_1,x_2,x_3)点处法线方向的分速为

$$u_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{R}\left(u_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial F}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial F}{\partial x_3}\right) \tag{2-53}$$

从而得到无穿透的边界条件的普遍形式为

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u_i\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2-54}$$

对于理想流体，这一边界条件已经足够，但是对于粘性流体，还必须考虑无滑移条件。

如果考虑流场中的热效应，则壁面处流体的温度T应与壁面本身的温度T_ω相同。即

$$T=T_\omega \tag{2-55}$$

如果边界壁面温度未知，则应用富里哀热传导定律，即边界的瞬时热通量(heat flax)q_ω为

$$q_\omega=-\left(K\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\omega \tag{2-56}$$

式中：K为导热系数(thermal conductivity)；n为壁面法线方向。

在无穷远处，流动应与未扰动流体的状态相衔接，如未扰动流体为静止状态，则

$$\boldsymbol{x} \to \infty,\ \boldsymbol{u} \to 0 \tag{2-57}$$

除上述流体与固体分界面上的条件以外还会遇到两种不同流体的分界面。如两种流体均为液体，则在分界面两侧其速度、压强与温度均相等，即

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2,\ p_1 = p_2,\ T_1 = T_2 \tag{2-58}$$

式中：下标 1,2 分别指两种液体。切应力 τ 和通过分界面的热传导量 q 也相等，即

$$\tau = \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 = \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2 \tag{2-59}$$

$$q = -K_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_1 = -K_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_2 \tag{2-60}$$

式中：K_1, K_2 分别为两种液体的导热系数。

如果两种流体分别是液体和气体，一般情况下最常见的液体和气体的分界面为液体与大气的分界面，称为自由表面（free surface），其边界条件将在第 10 章波浪运动中详述。

例 设一半径为 r 的圆球，球心沿 x_1 轴方向运动速度为 U，则球面作为运动中的固体边界，其边界面的方程式为

$$F = (x_1 - Ut)^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0$$

则固体边界的无穿透条件为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

由于

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2U(x_1 - Ut)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - Ut)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3$$

所以

$$-2U(x_1-Ut)+2u_1(x_1-Ut)+2u_2x_2+2u_3x_3=0$$

得

$$(u_1-U)(x_1-Ut)+u_2x_2+u_3x_3=0$$

球面上任何点处均须满足上式所示的边界条件。对于考虑粘性的实际流体则尚需增加固体边界处的无滑移条件。

2.3 欧拉方程

对于不考虑其粘性的理想流体，$\mu=0$，因此纳维-斯托克斯方程(2-37)可写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{f}-\nabla p \tag{2-61}$$

上式为欧拉方程（Euler equation），是欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）于1755年提出的。对于理想流体，欧拉直接应用流体运动的动量方程，但面积力中只考虑压力而不考虑粘性切应力。欧拉方程的推导中并未对流体的压缩性做任何限制，因此它对于不可压缩流体及可压缩流体都是适用的。本书主要研究不可压缩流体运动，因而流体密度 ρ 为常数，其数值由流体的种类而定，且热力学方程并不出现。

欧拉方程中有4个未知量，即流速 u_1,u_2,u_3 和压强 p，但方程式只有3个，只有与连续方程联立才能使方程式封闭。欧拉方程(2-61)与连续方程(1-17)构成了理想流体运动的基本方程组。方程组中的未知量包括流速 $\boldsymbol{u}(u_1,u_2,u_3)$ 和压强 p 都是坐标 $\boldsymbol{x}$ 和时间 t 的连续函数。

对理想流体运动的基本方程——欧拉方程(2-61)与实际流体的基本方程——纳维-斯托克斯方程(2-40)相比较，其微分方程由二阶降为一阶，因此边界条件也要相应减少一个。减少的是

无滑移条件。因为理想流体忽略了粘性的作用，无滑移条件不再存在，只保留式(2-43)的无穿透条件。从物理方面考虑这就意味着在理想流体运动中固体边界演变为一条流线。

2.4 欧拉方程的积分——伯努利方程

作为运动方程的欧拉方程，式中每一项代表一种作用力，把这个方程式积分则可以得到某种形式的能量关系，这就是伯努利方程的意义。为了运算的方便，首先导出欧拉方程的另外一种表示形式，即兰姆-葛罗米柯方程式。

2.4.1 兰姆-葛罗米柯方程

在理想流体中，如质量力为保守力(conservative force)，即质量力为有势力，从而存在力势函数，则当流动为恒定流动(steady flow)或者是无涡流动时，欧拉方程可以积分，并得到一个标量方程式，称为伯努利方程。伯努利方程在工程中有着广泛的应用。

欧拉方程为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{f} - \nabla p \tag{2-61}$$

上式可改写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \tag{2-62}$$

由向量的基本运算中的向量恒等式可知，上式等号左侧第二项——流速的迁移变化项(convective term)可以写为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} &= \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\right) - \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) \\ &= \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\right) - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega}\end{aligned}$$

于是，欧拉方程可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2-63}$$

设质量力的力势函数(force potential function) 为 G,则 $\boldsymbol{f}=\nabla G$。式(2-63) 改写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}=\nabla G-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2-64}$$

式(2-63) 和式(2-64) 均称为兰姆-葛罗米柯方程(Lamb-Громеко equation)。下面对上两方程式等号右侧的第二项——压力梯度项进行处理。若空间一点处微元弧向量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,做 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与向量 $\frac{1}{\rho}\nabla p$ 的点积,即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\frac{1}{\rho}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla p)$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla=\mathrm{d}x_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\mathrm{d}x_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\mathrm{d}x_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)=\mathrm{d}$,表示沿空间一微元弧 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的全微分,它是一个标量算符,则上式可改写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p$$

如果运用“d” 及相应的积分符号“$\int$”,则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\mathrm{d}\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\left(\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\right)$$

由上式可得

$$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\left(\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\right) \tag{2-65}$$

代入方程式(2-64) 得

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\left(\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega} \tag{2-66}$$

对于恒定流动(不论是有涡流动或无涡流动) 或者无涡流动(不论是恒定或非恒定流动),式(2-66) 形式的欧拉方程均可积分。

2.4.2 伯努利方程

首先考虑恒定流动的情况，恒定流动时，$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$ 项为零，式(2-66)变为

$$\nabla\left(\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega} \tag{2-67}$$

以流速向量 $\boldsymbol{u}$ 点积式(2-67)，则有

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\left(\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})$$

上式中，等号右侧 $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})$ 应为零，因为 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}$ 所得的向量应与 $\boldsymbol{u}$ 向量垂直，垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的向量与 $\boldsymbol{u}$ 点积必为零，即

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\left(\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)=0 \tag{2-68}$$

而($\boldsymbol{u}\cdot\nabla$) 表示物质导数中迁移变化的部分，在恒定流动中它也就是物质导数，因此式(2-68) 表示：在恒定流动中当流体质点沿其本身流线运动时，$\left(\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)$的物质导数为零。将此式沿流线积分可知$\left(\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)$应为常数，即

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G=C \tag{2-69}$$

此式称为欧拉方程的伯努利积分(Bernoulli integral)，或称为伯努利方程(Bernoulli equation)。它的最初形式出现于丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli，1700—1782) 在 1938 年出版的《水动力学，关于流体中力和运动的说明》一书中。式(2-69) 中常数 C 称为伯努利常数(Bernoulli constant)。对于每一条流线而言 C 有相应的数值，不同的流线常数 C 并不相同。式中的$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$ 项只有在 $\rho=\rho(p)$ 即密度 ρ 仅仅是压强 p 的函数时才可以积分，这种流体称为正压流体

(barotropic fluid)。对于不可压缩流体，$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$，如果又是恒定流动，则 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho=0$，即沿流线 ρ 为常数，此时式(2-69) 可写为

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G=C \tag{2-70}$$

如果整个流场中 ρ 均为常数，对于这种流动式(2-70) 当然也成立。

如果用涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 点积式(2-66) 可得到与上述相同的伯努利积分，这是因为 $\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})$ 同样为零。可见沿一条涡线同样可得到伯努利方程。

当体积力只有重力时，重力为有势力，设 z 为铅垂向上方向的坐标，则 $G=-gz$，式(2-70) 可写为

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}+z=C' \tag{2-71}$$

方程式(2-71) 实质上是流体运动能量守恒关系的一种表达形式。式中：$\gamma=\rho g$ 为流体的重度(specific weight)；$\frac{p}{\gamma}$ 称为压强水头(pressure head)，表示单位重量流体的压能，以其具有长度量纲(dimension) 而称为压强水头；$\frac{u^2}{2g}$ 表示单位重量流体所具有的动能，称为流速水头(velocity head)；z 表示单位重量流体所具有的位能，而称为位置水头(elevation head)。三者之和$\left(\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}+z\right)$称为总水头(total head)。事实上单位重量流体所具有的总能量中还应包含内能(internal energy) 的部分，但在研究以水为代表的液体流动时，一般并不考虑热的作用而只考虑其机械能的部分，因此这里的总水头就代表单位重量流体所具有的总的机械能量。对于一条流线上的两个地点，其流动应符合

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{u_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{u_2^2}{2g}+z_2 \tag{2-72}$$

上式也称为伯努利方程，广泛应用于水力学中。此式说明由压能、

动能和位能所表示的流体质点的总机械能量沿流线保持不变。

对于非恒定流动，则以流线上的微元弧向量 d$\boldsymbol{r}$ 点积式(2-66)。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot \nabla\left(\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})$$

式中的 d$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})$ 为零，这是因为 d$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 方向相同，而 d$\boldsymbol{r}$ 与 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})$ 互相垂直故其点积为零。前已述及，对流场中任意微元弧向量 d$\boldsymbol{r}$ 有 d$\boldsymbol{r}\cdot\nabla=$ d，当然应该包括沿流线的微元弧向量，所以这里d$\boldsymbol{r}\cdot\nabla=$ d表示沿流线微元弧 d$\boldsymbol{r}$ 的全微分。当ρ为常数对上式沿流线进行积分，得

$$\int \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}r+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+gz=C \tag{2-73}$$

对同一流线上的两点写出以下的伯努利方程：

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{u_2^2}{2}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}r \tag{2-74}$$

这就是非恒定流情况下的伯努利方程，但$\int\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}r$ 项很难计算，只是在某些特定的情况下才可以求得。

从式(2-71) 和式(2-73) 可知：对于有涡流动，只有用流速向量 $\boldsymbol{u}$ 或沿流线的微元弧向量 d$\boldsymbol{r}$ 点积兰姆-葛罗米柯方程式(2-66)，从而消去涡量项 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}$，才能得到欧拉方程的积分形式 —— 伯努利方程。这样得到的伯努利方程只是沿一条流线有效，不同流线则具有不同的积分常数 C。

如果体积力为重力与离心力共同作用的力，例如图 2-2 所示的水泵转轮，选择的坐标系如图所示。转轮绕通过 O 点垂直于纸面的轴转动，转速为 $\boldsymbol{\omega}$。液体自半径为 r_1 的圆周进入转轮，流经被转轮叶片所隔成的流道，从半径为 r_2 的圆周离开转轮。流动相对于转轮是恒定的。现在研究相对于转轮的流动，图 2-2 中 1-2 为一流线，设流线上半径等于 r 处的一流体质点 A，它相对于转轮的流速

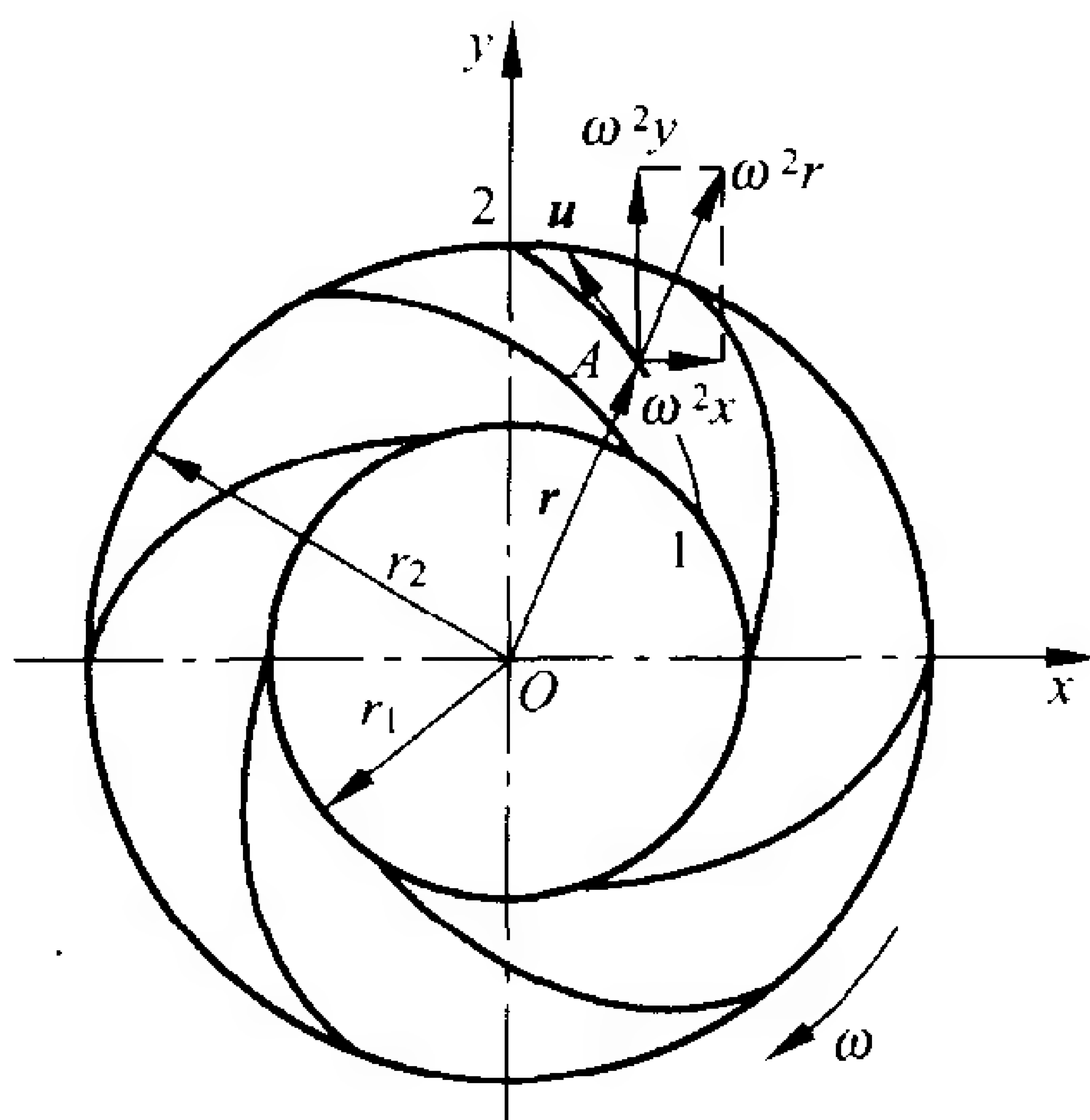


图 2-2　水泵转轮内流动

为 $\boldsymbol{u}$。将欧拉方程沿相对流线积分，此时体积力除重力外还有离心力。单位质量流体的科氏力(Coriolis force)为 $2\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}$，它与相对流速 $\boldsymbol{u}$ 垂直，因此沿流线不会作功，可不予考虑。单位质量流体的离心力为 $-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\omega^2 x\boldsymbol{i}+\omega^2 y\boldsymbol{j}$。单位质量流体的重力则为 z 方向的 $-g\boldsymbol{k}$。这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为坐标轴 x,y,z 方向的单位向量。于是单位质量的质量力 $\boldsymbol{f}$ 为

$$\boldsymbol{f}=\omega^2 x\boldsymbol{i}+\omega^2 y\boldsymbol{j}-g\boldsymbol{k}$$

由 $\boldsymbol{f}=\nabla G$ 可以推求力势函数 G 应为

$$G=\frac{\omega^2 x^2}{2}+\frac{\omega^2 y^2}{2}-gz=\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz$$

把上式代入式(2-70)，则得不可压缩流体恒定流动中重力与离心力同时作用的伯努利方程为

$$\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+\left(gz-\frac{\omega^2 r^2}{2}\right)=C$$

也可写为

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}+z-\frac{\omega^2 r^2}{2g}=C' \tag{2-75}$$

式中：常数 C' 在每一条相对流线上为常数。将此式应用于同一条流线上 1,2 两点则有

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{u_1^2}{2g}+z_1-\frac{\omega_1^2 r_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{u_2^2}{2g}+z_2-\frac{\omega_2^2 r_2^2}{2g} \tag{2-76}$$

上式就是在重力和离心力共同作用下流体的能量方程式，其中每一项代表一种水头。这个方程式常用来分析研究水力机械中的液体流动。

2.4.3 无涡流动的伯努利方程

当流动无涡 $\boldsymbol{\Omega}=0$ 时，欧拉方程(2-66) 也可积分。此时欧拉方程式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\left(\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-G\right)=0 \tag{2-77}$$

无涡流动中流速向量为标量函数流速势 ϕ 的梯度，即式(1-56) 所示 $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$。对于任意 ϕ 函数，$\nabla\times\nabla\phi=0$。以$\nabla\phi$ 代替式(2-67) 中的 $\boldsymbol{u}$，得

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi-G\right)=0 \tag{2-78}$$

再一次使用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla=\mathrm{d}$ 的关系，这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为流场中一点处任意微元弧向量，注意：这里并没有要求 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为沿流线方向，而是任意方向。将式(2-78) 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 点积，得到一个标量方程式，即

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi-G\right)=0$$

把上式积分可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi-G=F(t) \tag{2-79}$$

$F(t)$ 为不恒定伯努利常数(unsteady Bernoulli constant)，严格来

说它并不是常数而是随时间变化的，不过对于不同的流线，$F(t)$ 却是一致的。即 $F(t)$ 在流场内各处一致，只是由于整个流动的不恒定而随时间变化。可见式(2-79)对于整个流场都是适用的，并不只限于一条流线。因为在速度势 ϕ 中加入一个常数并不影响结果的普遍性，$F(t)$ 可以吸收到 $\phi(t)$ 中去而使方程式更为简化，令

$$\Phi = \phi - \int F(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - F(t)$$

$$\nabla \Phi = \nabla \phi$$

于是式(2-79)可改写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - G = 0 \tag{2-80}$$

如果无涡流动为恒定流动，则流速势不随时间变化，由式(2-79)得

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - G = F \tag{2-81}$$

F 在流场中处处为同一常数。对于不可压缩流体，当密度 ρ 为常数时，式(2-81)可写为

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - G = F \tag{2-82}$$

当只有重力作用时，$G = -gz$，伯努利方程可写为

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + z = H \tag{2-83}$$

式(2-83)为水力学中常见的伯努利方程形式。常数 H 即为总水头，对于无涡流动，在整个流场中 H 为常数。

2.4.4 恒定总流的伯努利方程

流体的运动都是在三维空间内发生和发展的，但像管道或明

槽水流则流动均有一个主要方向，需要研究的是沿这个方向流动的状况与变化。管道或明槽水流可以看成是由很多元流组成的总流。对于元流而言，由于其过流断面无限小，因而流动物理量，如流速、压强等在其过流断面上可认为是均匀分布的。对于总流而言，其过流断面上的流速、压强等一般都不是均匀分布的，这时只能寻求一个过流断面上的平均值来代替。适用于每条流线的伯努利方程也需要寻求另外的形式以应用于总流。

1. 动能

设一流动，其过流断面 1-1 上的流速分布如图 2-3 所示。在断面 1-1 上取一微分面积 ΔA，单位时间里通过 ΔA 的流体质量为 $\rho u \Delta A$。对以 ΔA 为过流断面的流管而言，伯努利方程可写为

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}+z=H \tag{2-83}$$

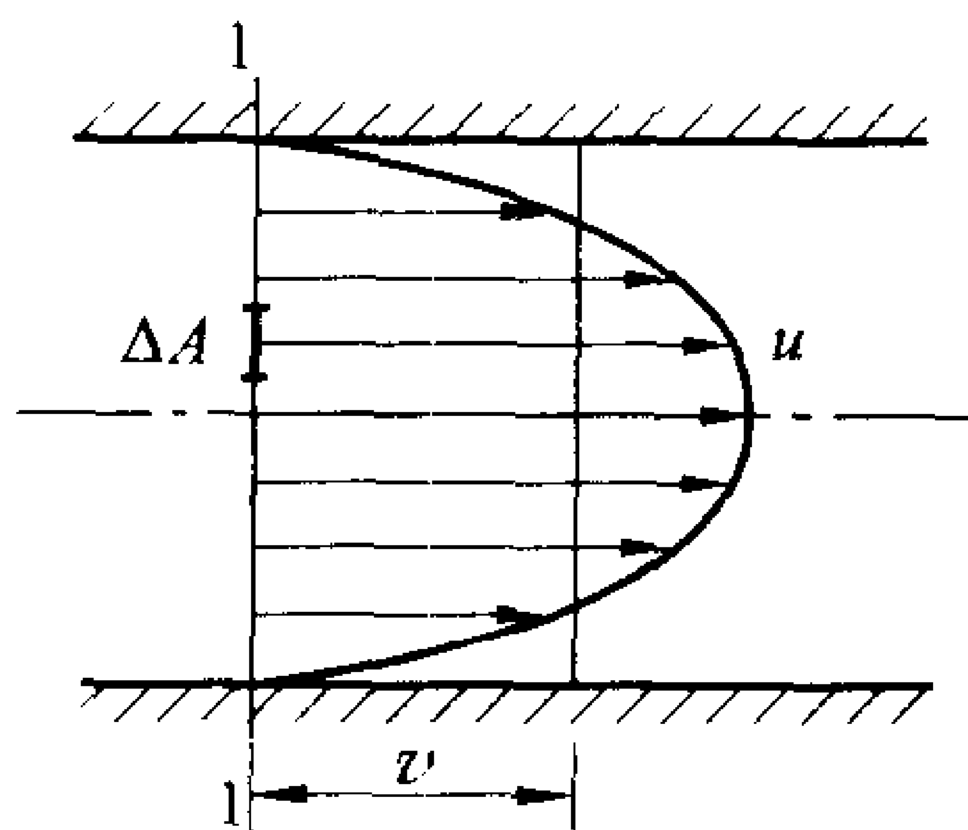


图 2-3 过流断面 1-1 上的流速分布

设流动无涡，则积分常数 H 值在整个流动中为相同数值。要把一个流管扩大到整个流股，即总流的情况，需把式(2-83)各项按流管的流量在总流过流断面上进行加权平均。首先考虑动能项 $\frac{u^2}{2g}$。

$$\int_A \frac{u^2}{2g}\gamma \mathrm{d}Q=\int_A \frac{u^2}{2g}\gamma u \mathrm{d}A=\frac{\gamma}{2g}\int_A u^3 \mathrm{d}A$$

设过流断面的平均流速为 v，可定义为

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{\int_A u \mathrm{d}A}{A} \tag{2-84}$$

由于断面平均流速 v 与断面上各点流速并不相等，因此 $\int_A u^3 \mathrm{d}A \neq \int_A v^3 \mathrm{d}A$。动能项在总流过流断面上的加权平均值为

$$\frac{\int_A \frac{u^3}{2g}\gamma \mathrm{d}A}{\int_A \gamma u \mathrm{d}A} \neq \frac{v^2}{2g}$$

这里引入一个动能修正系数 α，使

$$\frac{\int_A \frac{u^2}{2g}\gamma \mathrm{d}Q}{\gamma Q} = \frac{\alpha v^2}{2g}$$

所以

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 \mathrm{d}A}{v^3 A} \tag{2-85}$$

由式(2-85)可知，动能修正系数 α 是过流断面上实有的单位重量流体所具有的动能的断面平均值与以断面平均流速所表示的单位重量流体具有动能的比值。断面上流速分布越均匀，则 α 趋于1.0；而流速分布不均匀，则 $\alpha > 1.0$。对总流进行流动分析时，一般并不知道断面上的流速分布，因此也不能精确确定 α 值，只能根据经验选定 α 值。

2. 压强

为了研究过流断面上压强的分布，首先要判别流动是渐变流动(gradually varied flow)，还是急变流动(rapidly varied flow)。流动中如果各流线之间夹角很小，流线接近于平行或流线虽略有弯曲但曲率很小，这样沿流动方向的流速的大小与方向均变化极为缓慢，这种流动称为渐变流动。反之，如果流线相互之间有较大夹角，或流线弯曲的曲率较大，则沿流程的流速的大小或方向变化急剧，这种流动称为急变流动。由于急变流动中惯性力不能忽略，因此其过流断面上的压强分布与渐变流动下有很大的不同。

为了分析渐变流动的压强分布规律，现对图 2-4 所示的流动进行讨论。图 2-4 所示的流动为一顺直的明槽流动，其流线均为平

行直线。设流动为恒定，且 $u_2=0, u_3=0, \frac{\partial u_1}{\partial x}=0$，根据式(2-39)写出纳维 - 斯托克斯方程为

$$0=\rho f_1-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) \tag{a}$$

$$0=\rho f_2-\frac{\partial p}{\partial x_2} \tag{b}$$

$$0=\rho f_3-\frac{\partial p}{\partial x_3} \tag{c}$$

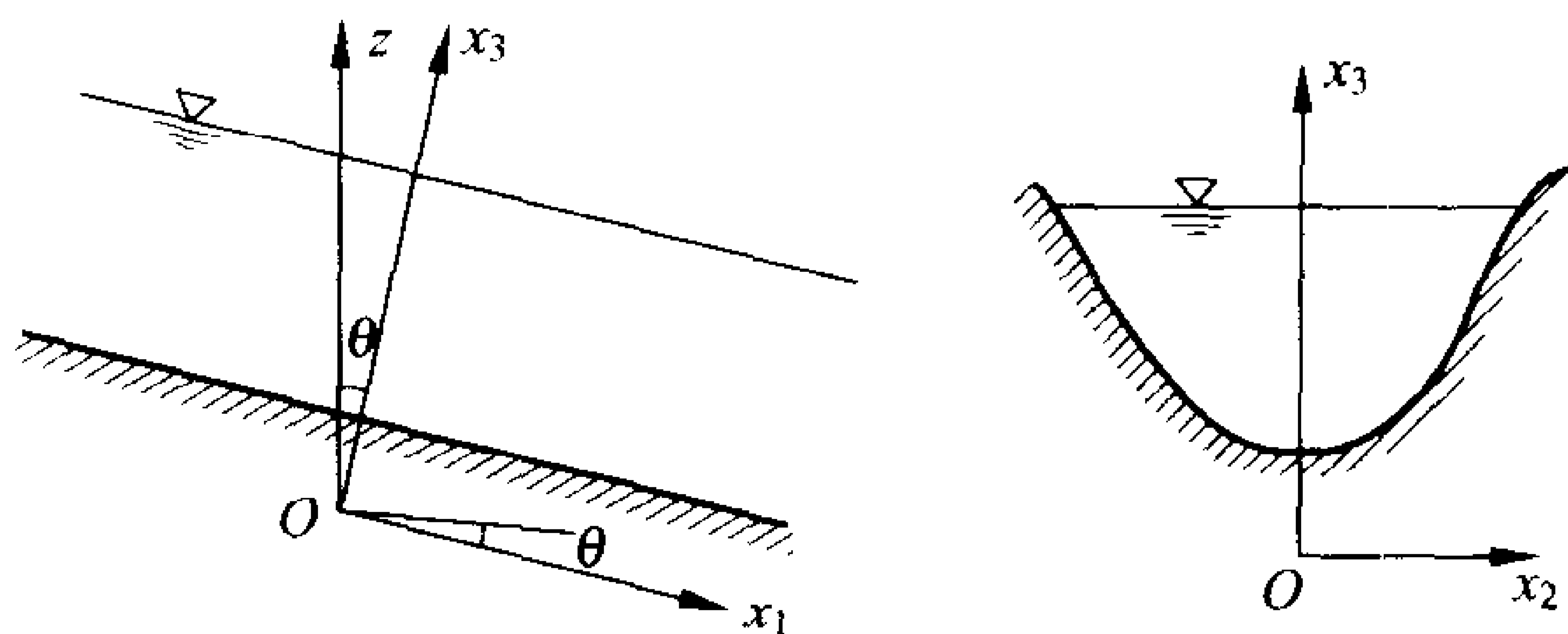


图 2-4 渐变流动

若体积力只有重力，即 $f_1=g\sin\theta, f_2=0, f_3=-g\cos\theta$。式(a)表示沿流动方向不同断面处压强的变化，暂不予讨论。由式(b) $\frac{\partial p}{\partial x_2}=0$，说明在 x_2 方向压强并不变化。由式(c) $0=-\rho g\cos\theta-\frac{\partial p}{\partial x_3}$，沿 x_3 方向积分可得 $\frac{p}{\gamma}+x_3\cos\theta=C$，取铅垂向上的坐标为 z，则 $z=x_3\cos\theta$，所以

$$\frac{p}{\gamma}+z=\text{const} \tag{2-86}$$

渐变流动与这里讨论的流线为平行直线的均匀流动(uniform flow)近似，因此 $\frac{p}{\gamma}+z=\text{const}$ 的结论对渐变流动也可近似应用。

说明在渐变流动中，如果流动恒定则过流断面上的压强分布规律与静水压强的分布规律是相同的，同一过流断面上各点处的测管水头(piezometric head) $\frac{p}{\gamma}+z$ 均相等。因此对伯努利方程中 $\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)$ 项按流管流量在总流的过流断面上取加权平均值仍是 $\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)$，为常数。于是由式(2-83)可得出恒定渐变流动的总流伯努利方程为

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+z_2+h_{w_{1-2}} \tag{2-87}$$

式中：$h_{w_{1-2}}$ 表示由于实际流体的粘性，使流动过程中由断面1至断面2之间损耗的机械能，称为水头损失(head loss)。对于理想流体，$h_{w_{1-2}}$ 为零。如流动为非恒定，则需在式(2-87)中加入惯性项。由式(2-74)知，对于一条流线而言惯性项为 $\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x$，这里 $\mathrm{d}x$ 为沿流线的微元线段，这一项在过流断面上按流管流量的加权平均值为

$$\frac{\int_A\left(\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\right)u\,\mathrm{d}A}{vA}=\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial \beta v}{\partial t}\mathrm{d}x$$

式中的 β 为动量修正系数，其值为 $\frac{\int_A u^2\mathrm{d}A}{v^2 A}$，通常取为1。可见非恒定渐变流动的总流伯努利方程为

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+z_2+h_{w_{1-2}}+\frac{\beta}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}x \tag{2-88}$$

对于急变流动，由于在过流断面上 $\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)$ 并非均匀分布，因

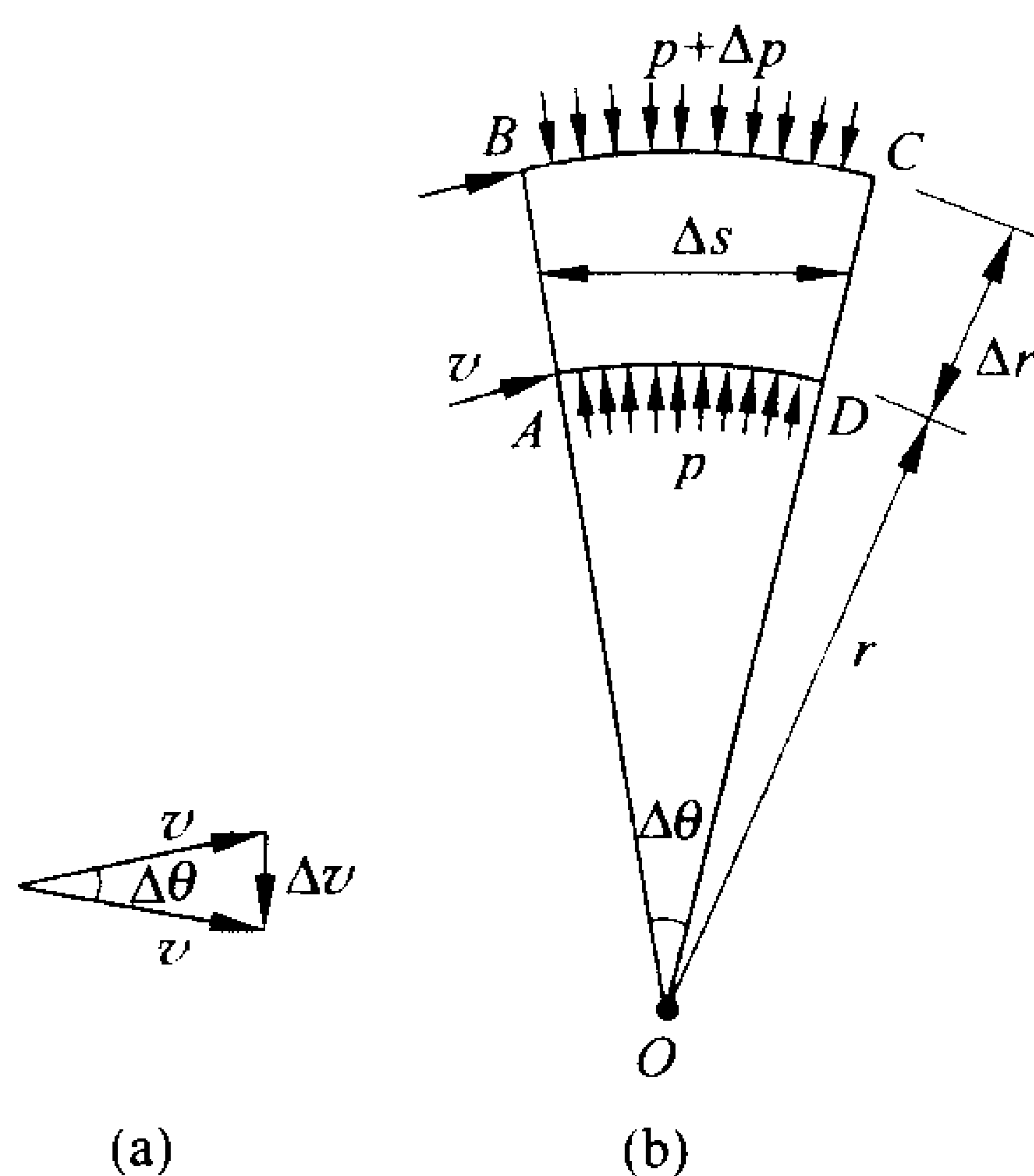


图 2-5　急变流动中的压强分布

而在运算上带来了困难。图 2-5 所示为一弯曲段流动，AD，BC 为两条弯曲流线。两条流线间取控制体 $ABCD$，长度为 Δs，垂直纸面为单位厚度。流线 AD 的半径为 r，压强为 p，AB 断面上和 DC 断面上速度大小均为 v，但方向有改变。由图 2-5(a) 看出，由于方向的变化，产生了一个与流线方向垂直的径向流速 Δv。流线 BC 的半径为 $r+\Delta r$，压强为 $p+\Delta p$。AB 与 DC 之间夹角为 $\Delta\theta$。通过动量定理可以看出：正是由于径向的压力差而导致了径向动量发生变化。进入和流出控制体的流体质量为 $\rho v\Delta r$，与进口断面 AB 相比，单位时间内出口断面 DC 处径向动量增加了 $\rho v\Delta r\Delta v$。而 $\Delta v = v\Delta\theta$，$\Delta\theta = \dfrac{\Delta s}{r}$，因此 $\Delta v = v\dfrac{\Delta \mathrm{s}}{r}$。径向作用力为 BC 与 AD 之间的压力差 $[(p+\Delta p)-p]\Delta s$，所以

$$[(p+\Delta p)-p]\Delta s = \rho v\Delta r v\frac{\Delta s}{r} = \rho v^2\Delta r\frac{\Delta s}{r}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = \rho\frac{v^2}{r} \tag{2-89}$$

上式为流线曲率所产生的径向压强梯度，这是重力以外由离心力

所产生的压强梯度，可见弯曲流线处的压强分布与静水压强分布规律并不相同。只有当 $r \to \infty$ 时，流线趋于直线，压强才能按静水压强分布。

明槽水流中断面的压强分布为图 2-6 所示。图 2-6(a) 表示明槽水流为渐变流情况，压强为静水压强分布。图 2-6(b) 表示明槽底为凹曲面，沿过水断面除静水压强分布外，离心力使压强增加值为

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{R} \Delta R \qquad (2\text{-}90)$$

式中：R 为水面曲率半径；v 为断面平均流速。这里采用的断面平均流速是一种近似的算法，这时对于一个断面 $\rho \dfrac{v^2}{R}$ 为常数，压强为线性变化。事实上流速并非均匀分布，如果曲率半径 R 与水深 h 相比不是大数，则 $\rho \dfrac{v^2}{R}$ 为变数，压强增量也不是线性分布。图中 ABC 为静水压强分布图，ACD 为由离心力引起的压强增量。图 2-6(c) 中的明槽底为凸曲面状，离心力使压强减小，自由水面仍保持为大气压强，沿水深离心力的压强增量为

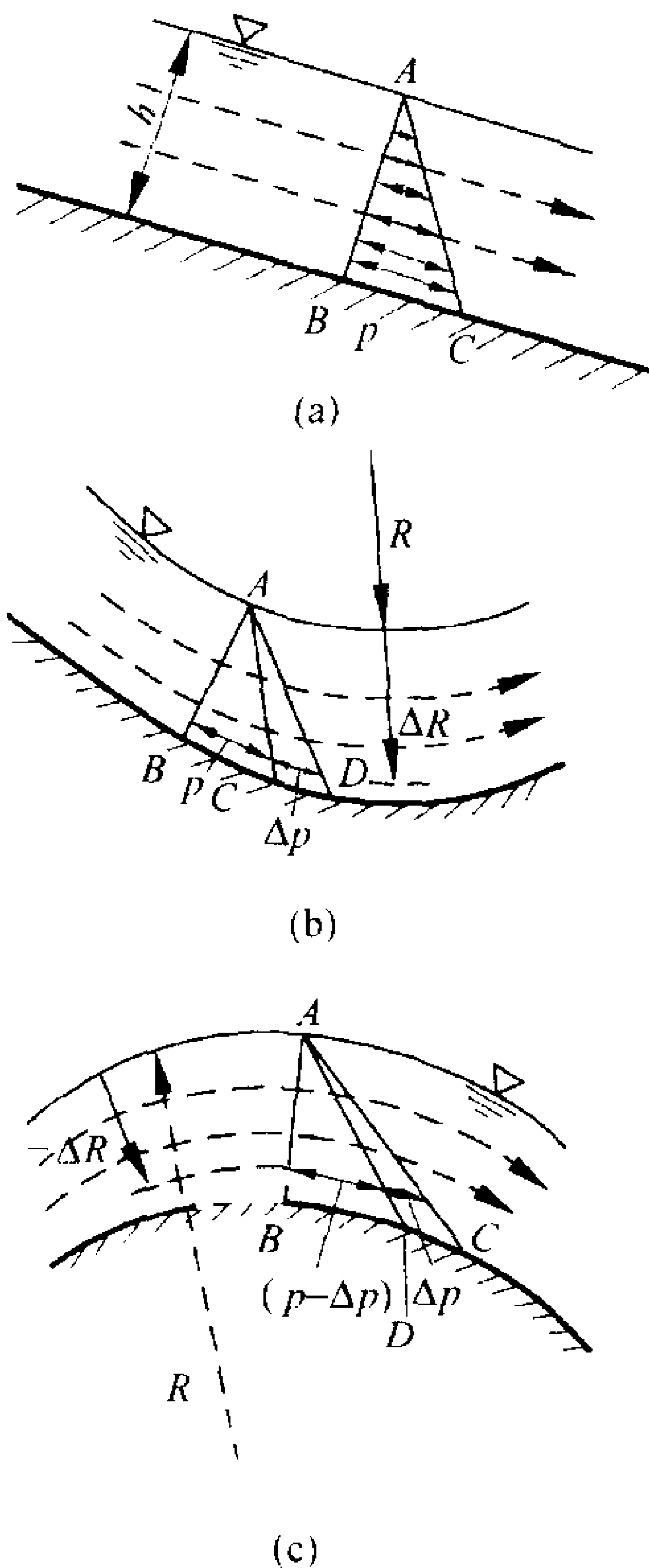


图 2-6　明槽水流压强分布

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{R}(-\Delta R) \qquad (2\text{-}91)$$

2.4.5　当考虑动水压强时的伯努利方程

欧拉方程式(2-61) 中如果 $\boldsymbol{u} = 0$，则表示流体静止不动的情

况，这时

$$f-\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \tag{2-92}$$

如果只考虑重力作用，$\boldsymbol{f}=\nabla G=\nabla(-gz)$，于是有

$$\rho\nabla(-gz)-\nabla p=0$$

即

$$-\nabla(p+\rho gz)=0$$

由上式可得

$$p+\rho gz=p+\gamma z=\text{const} \tag{2-93}$$

如图 2-7 所示，将坐标轴设置于自由水面上，z 轴向上。自由水面处 $z=0$，相对压强 $p=0$，则式(2-93) 中的常数即为零。于是，式(2-93) 可改写为

$$p=-\rho gz=-\gamma z \tag{2-94}$$

这时的压强 p 称为流体静压强或静水压强(hydrostatic pressure) 以 p_s 表示。水下一点 A 处，其水下深度 $h=-z$，所以

$$p_s=\gamma h \tag{2-95}$$

对于流动着的流体常使用不包含静水压强的动水压强(hydrodynamic pressure) 则更为方便。令 p 代表全压强，p_d 代表动水压强，p_s 代表静水压强，全压强为动水压强与静水压强之和，即

$$p=p_d+p_s=p_d-\rho gz \tag{2-96}$$

所以动水压强是流体运动时，由于流体运动而使压强与静水压强偏离的那部分压强。

欧拉方程(2-61) 中的压强项应为全压强，将式(2-96) 代入式(2-61)，得到只考虑重力作用下的欧拉方程为

$$\begin{aligned}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}&=-\nabla p+\rho\boldsymbol{f}\\&=-\nabla p-\nabla\rho gz\\&=-\nabla(p+\rho gz)\end{aligned}$$

$$= -\nabla p_{\mathrm{d}} \tag{2-97}$$

于是在欧拉方程的积分形式伯努利方程中，当考虑以动水压强代替其中的压强项时，恒定无涡流动的式(2-83)写为

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + z = \frac{p_{\mathrm{d}}}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \mathrm{const}$$

或

$$p_{\mathrm{d}} + \frac{\rho u^2}{2} = \mathrm{const} \tag{2-98}$$

上式表明了动水压强与流速之间的关系。

考虑不恒定的因素后，上式可写为

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_{\mathrm{d}} + \frac{\rho}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = C(t) \tag{2-99}$$

第3章

流体静力学

研究流体处于静止状态时，作用于流体各种力的平衡规律及其应用的科学称为流体静力学，在工程实践中具有重要和广泛的用途。所谓流体的静止状态是指该流体对于选用的坐标系无相对运动的状态。如果把参考坐标系固定在地球上也就是惯性坐标系，则相对于这个坐标系没有运动的流体就是相对于地球而言该流体处于静止状态。如果坐标系相对于地球在运动(指相对地球的各种变速运动)为非惯性坐标系，对于非惯性坐标系为静止状态的流体，相对于地球而言则在运动着，这种流体静止或平衡称为相对静止或相对平衡。处于静止或相对静止状态的流体，其流体内部质点之间没有相对运动，因此流体的粘性不起作用。由 2.2 节的讨论可知：在流体静止时，作用于流体的面积力只有与作用面外法线方向平行而方向相反的压力，而且一点处的压强与方向无关，只是该点位置的函数。

3.1 静止流体的平衡方程式

3.1.1 平衡方程式

由式(2-61)可得到流体静止时($\boldsymbol{u}=0$)的欧拉方程式为

$$f - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad 或 \quad f = \frac{1}{\rho} \nabla p \tag{3-1}$$

上式在直角坐标(x, y, z)中各坐标轴方向的投影形式为

$$f_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad f_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \tag{3-1'}$$

这就是静止流体的平衡方程式,流体上各种作用力相平衡,是保证流体静止状态的必要和充分条件,是流体静力学微分形式的基本方程。

将平衡方程式(3-1)两侧与静止流场中任意微元弧向量 d$\boldsymbol{r}$ 点积,得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p$$

由 2.4.1 节可知: $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla = \mathrm{d}$ 为一标量算符,表示沿空间一微元弧 d$\boldsymbol{r}$ 的全微分。所以

$$\mathrm{d}p = \rho(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z) \tag{3-2}$$

上式为压强 p 的全微分公式。

3.1.2 流体静止的质量力条件

由式(3-1)可以看出:能使流体处于静止状态的质量力是有条件的。为了明确这个条件,对式(3-1)两侧取旋度,于是有

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \tag{3-3}$$

因为$\nabla \times \nabla p = 0$。将式(3-1)与上式两侧进行点积,得

$$\boldsymbol{f} \cdot [\nabla \times \boldsymbol{f}] = \frac{\nabla p}{\rho} \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \right] = 0 \tag{3-4}$$

式中: $\boldsymbol{f} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0$ 就是流体静止时质量力需要满足的必要条件。

对于不可压缩流体,由于 $\rho = \mathrm{const}$,方程式(3-3)可以写为

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = 0 \tag{3-5}$$

上式是不可压缩流体静止状态时，对质量力所提出的限制条件，这个条件就是质量力必须有势。设力势函数为 U 则有

$$f = \nabla U \tag{3-6}$$

将式(3-6)代入式(3-1)，且考虑到流体为不可压缩，有

$$\nabla U = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

将上式积分，并取积分常数为零，则

$$U = \frac{p}{\rho} + \text{const} = \frac{p}{\rho} \tag{3-7}$$

对于不可压缩流体，静止状态时质量力势等于$\frac{p}{\rho}$。

对于正压流动，即流体中任一点的压强只是密度的函数，这时 $\rho=\rho(p)$而不是常数，这个条件实质上是对流场的热力学过程的一种限制。例如：等温流场(isothermal flow field)中，$\frac{p}{\rho}=\text{const}$；等熵流场(isentropic flow field)中，$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\text{const}$，$\gamma$ 为质量热容比。这两种情况均为正压流场。正压流场的主要特征是等压面与等密度面重合。

定义压力函数 $\mathscr{P}$ 为

$$\mathscr{P} = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{3-8}$$

正压流场中，压力函数可以写为

$$\mathscr{P} = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho p} = \mathscr{P}(p)$$

因此

$$\nabla \mathscr{P} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}p}\nabla p = \frac{1}{\rho(p)}\nabla p$$

把上式代入平衡方程式(3-1)中，得

$$f = \nabla \mathscr{P} \tag{3-9}$$

对上式取旋度,有

$$\nabla\times \boldsymbol{f} = \nabla\times \nabla\mathscr{P} = 0$$

即

$$\nabla\times \boldsymbol{f} = 0 \tag{3-10}$$

从而可知:质量力必须为有势力,也就是说正压流场中流体处于静止状态的必要条件同不可压缩流体一样,也是质量力有势。由式(3-6)与式(3-9)比较可得力势函数与压力函数的关系为

$$U = \mathscr{P}(p) \tag{3-11}$$

可见:在静止状态下,正压流场质量力势等于压力函数,显然等压面与等势面必重合。由此得出结论:正压流场静止时等压面,等密度面与等势面(质量力势)三者重合。还可以证明在质量力有势的条件下,处于静止状态的流场必然是正压流场或不可压流场。不满足 $\rho=\rho(p)$ 关系的流体称为斜压流体(baroclinic fluid),流体压力不仅是密度的函数,而且还和其他热力学参量如温度等有关。斜压流体静止时,其质量力必须满足 $\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})=0$ 的条件。

3.1.3 静止流体的分界面

密度分别为 ρ_1,ρ_2 的两种互不混合的流体处于静止状态时,它们之间具有明确的分界面。当质量力有势,两种流体的平衡方程式可分别写为

$$\boldsymbol{f}_1 = \nabla U_1 = \frac{1}{\rho_1}\nabla p_1$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \nabla U_2 = \frac{1}{\rho_2}\nabla p_2$$

式中:下角标 1,2 分别代表两种流体。分界面上任意线段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上的压强差可分别表示为

$$\mathrm{d}p_1 = \nabla p_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \rho_1 \nabla U_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \rho_1 \mathrm{d}U_1 \tag{3-12}$$

$$\mathrm{d}p_2 = \nabla p_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \rho_2 \nabla U_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \rho_2 \mathrm{d}U_2 \tag{3-13}$$

分界面上任一点处两种流体的压力及质量力势均应相等,否则分

界面将不会处于静止平衡状态，所以经过 dl 的距离两种流体的压强增量及质量力势增量均应相同，即

$$dp_1 = dp_2 = dp$$
$$dU_1 = dU_2 = dU$$

把上两式代入式(3-12)和(3-13)中，并相减可得

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)dp = 0$$

由于 $\rho_1 \neq \rho_2$，因此必须 $dp=0$。由此可见：在分界面上压强为常数，即分界面是等压面，显然分界面也是等势面。

3.1.4 重力场中的平衡方程式

在地球引力场中最重要，而且普遍存在的一种质量力是重力，重力为有势力，其力势函数 $U=-gz$。z 为直角坐标系中与地面垂直，向上为正的坐标轴。则由 $f=\nabla U$ 可知

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \\ f_z &= -g \end{aligned}\right\} \tag{3-14}$$

由平衡方程式(3-1′)可以得到

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

因此水平面(与 z 轴垂直的面)就是等压面，也就是等势面和等密度面。由(3-1′)式还得到

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{3-15}$$

积分上式，并考虑液体中密度 ρ 的变化一般可以忽略，得

$$p = -\rho gz + c \tag{3-16}$$

式中的 C 为积分常数。如果把坐标系放在自由水面上，$z=0$ 处的压强为 p_0 代入上式可得

$$p = p_0 - \rho gz \tag{3-17}$$

对于液体中各点而言，往往用液面以下的深度 h 代替 z 坐标更为方便，即 $h=-z$，又 $\rho g=\gamma$ 为重度。

$$p = p_0 + \gamma h \tag{3-18}$$

上式是重力作用下液体的平衡方程式，即静止液体基本方程。

在流体的平衡和运动中，起作用的是两点处的压强差而不在于压强本身的绝对值。在一般压强的测量中也是测量压强差。压强测量是用大气压强 Pa 作为基准，以大气压强为基准的压强称为相对压强(gage pressure)。为了避免各地大气压强变化所引起的不便，国际间规定了标准大气压强(standard atmosphere)作为相对压强的共同基准。一个标准大气压强等于 $101.325\text{kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 或 kPa(由完全真空算起)，相当于在重力加速度为 9.80665m/s^2，温度为 0℃ 时 760mm 水银柱的压强。工程上为便于计算，称 100kPa 为一个工程大气压。从完全真空为零起算的压强称为绝对压强(absolute pressure)。

把式(3-16)写为以下形式：

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const} \tag{3-19}$$

上式表明：在静止流体中压强水头 $\frac{p}{\gamma}$ 加位置水头 z 为常数。由图3-1可看出：$\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$ 就是测压管中的液柱高度，所以称为测管水头。

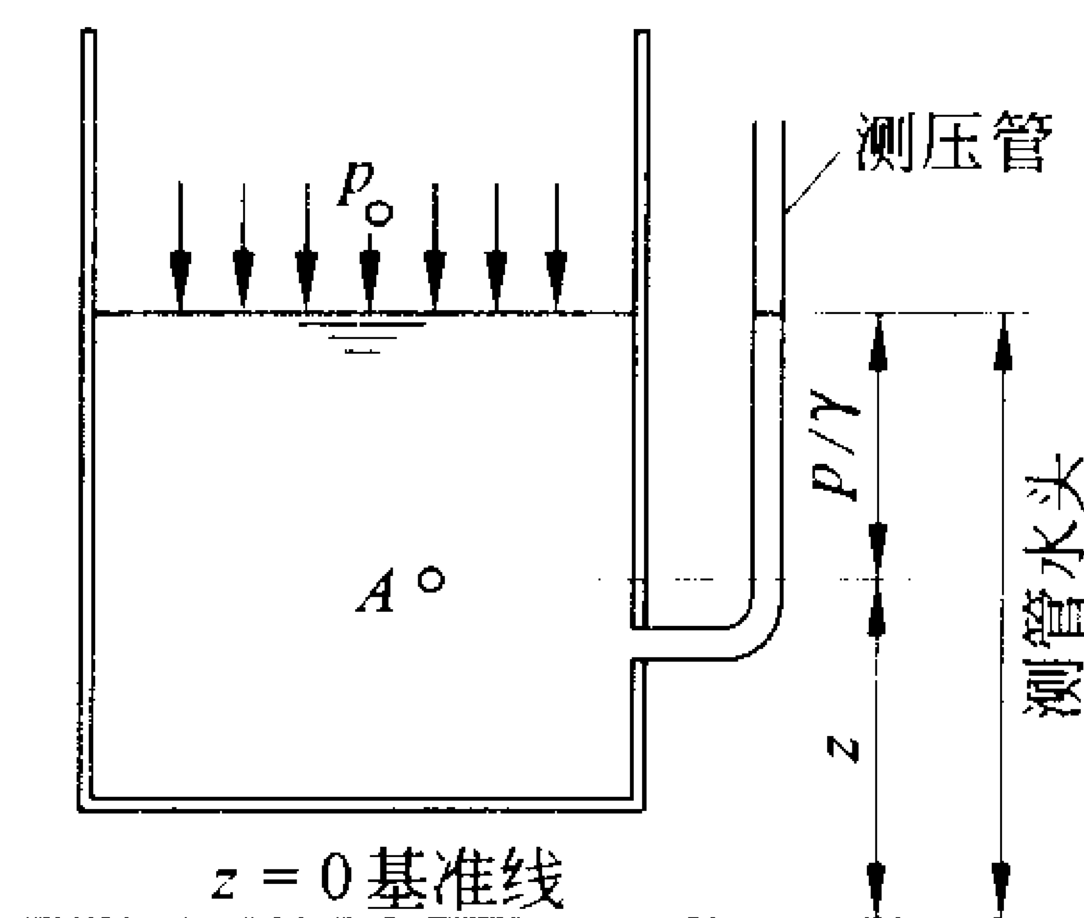


图 3-1 水头的定义

3.1.5 巴斯加原理

设有一密封容器如图 3-2 所示。容器的一部分边界是活塞，外力 F 通过活塞向容器内的液体加压，其压强为

$$p_0 = \frac{F}{A}$$

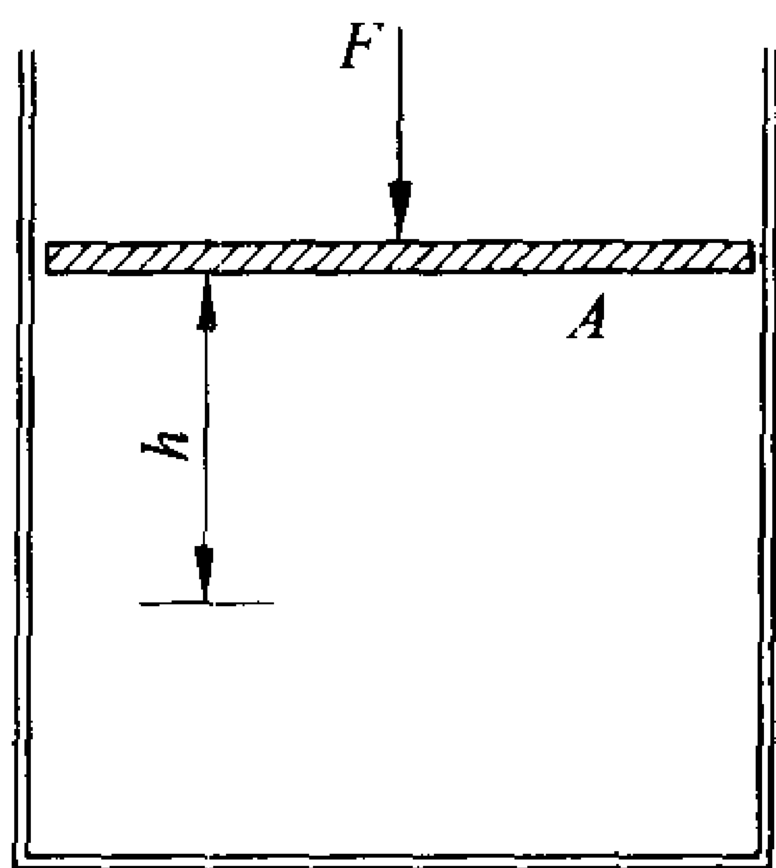


图 3-2　巴斯加原理[5]

式中：A 为活塞面积。

可以将这个压强 p_0 看作是边界条件，则由式(3-18)得

$$p = p_0 + \gamma h$$

如果 p_0 增加某一数值，则全部液体中各点的压强也均增加同一数值。由此可见：密封容器中的静止流体，由于部分边界上承受外力而产生的流体静压力，将均匀地传播到流体内所有各点上去，这就是著名的巴斯加原理(Pascal principle)。如果 $p_0 \gg \gamma h$，可认为密封容器内的压力处处相等。

3.2　重力场中静止液体作用于物体壁面上的合力

重力场中静止液体作用于物体壁面上的合力在工程实践中常称为静水总压力，需要确定其数值的大小，作用方向及作用点的位置。

3.2.1　平面上的静水总压力

由式(3-18)可知水下物面上任一点处的静水压强为

$$p = p_0 + \gamma h \tag{3-18}$$

因此静止液体作用于物面上的合力为

$$\boldsymbol{P} = \iint_A -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = \iint_A -(p_0 + \gamma h)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A \tag{3-20}$$

式中：$\boldsymbol{P}$ 为压力合力，即静水总压力；A 为液体与物体接触的表面总面积；$\boldsymbol{n}$ 为物面的单位法线向量(指向流场)。

静止液体作用于物面上对某一参考点 O 的合力矩为

$$\boldsymbol{M}=-\iint_A(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}p)\mathrm{d}A \tag{3-21}$$

式中：$\boldsymbol{r}$ 为 O 点到物面上各点的向径。根据刚体力学中寻求合力中心的原理，只有在 $\boldsymbol{P}\perp\boldsymbol{M}$ 的条件下，才能找到合力中心 C，$\boldsymbol{r}_C$ 为 O 点到合力中心 C 的向径，从而可得 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{P}$。只有当物面为平面时才符合这一条件，这时平面上的静水压力为一平行力系。合力中心即为总压力 $\boldsymbol{P}$ 在物面上的作用点，通常称为压力中心(center of pressure)，用符号 D 表示。由于静水压强与水下深度成正比，越靠下部的压强越大，所以压力中心 D 通常低于水下物面的形心 C 点。

例　求水下某一斜平面上的静水作用力，如图 3-3 所示。斜平面 $A'B'$ 与水平面的夹角为 α，$A'B'$ 平面的形状如图示，其面积为 A，外法线单位向量为 $\boldsymbol{n}$。斜面下部为大气压强。

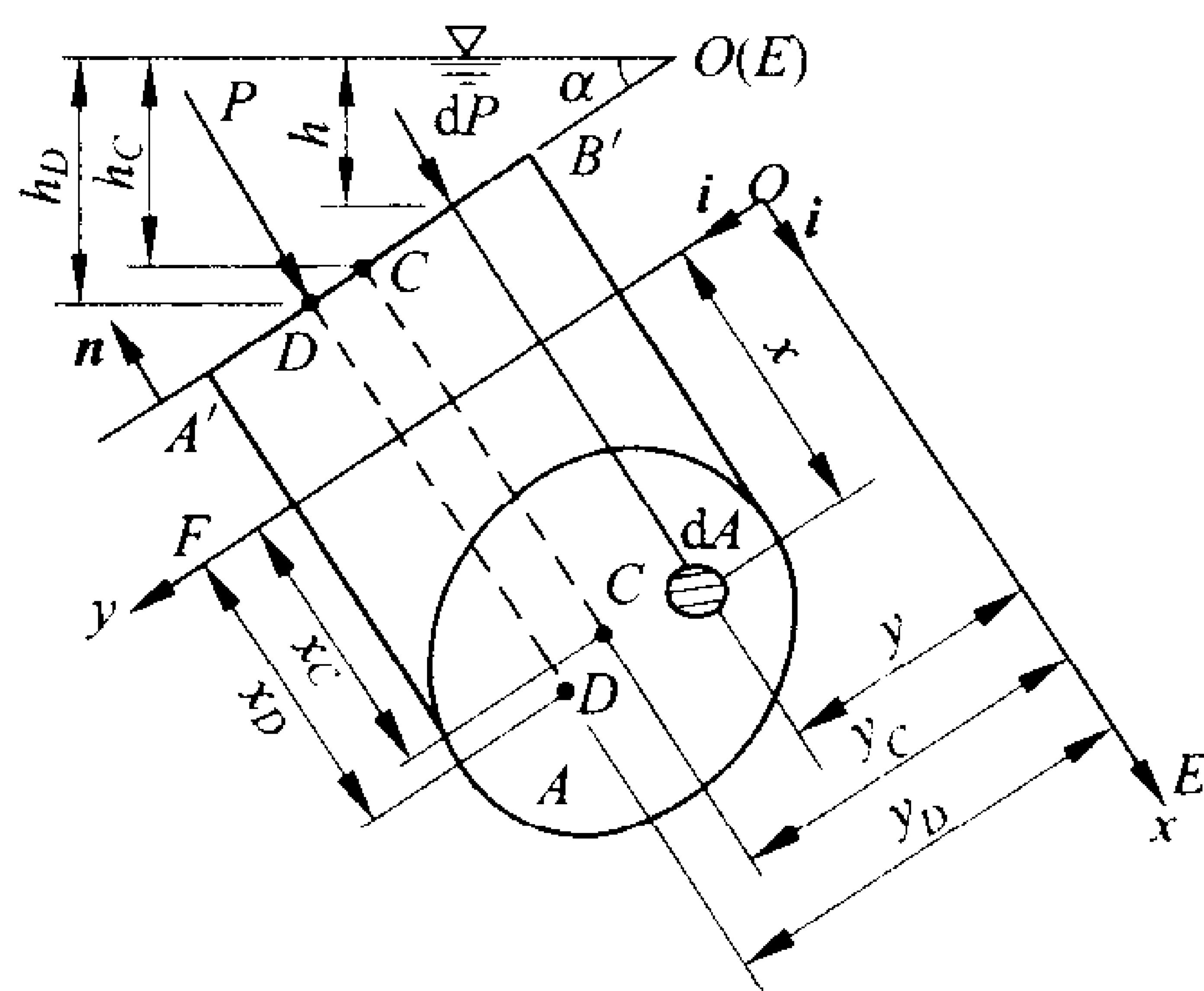


图 3-3　平面静水总压力[3]

解　总压力可由式(3-20)写为

$$P=\iint_A -[(p_0+\gamma h)-p_0]\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$$

$$=-\boldsymbol{n}\iint_A \gamma h\,\mathrm{d}A$$

$$=-\boldsymbol{n}\gamma\sin\alpha\iint_A y\mathrm{d}A$$

其中 $\iint_A y\mathrm{d}A$ 为面积 A 对于 Ox 轴的静面矩 $S_x=y_C A$，y_C 为形心 C 在 y 轴上的坐标位置。于是

$$\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{n}\gamma\sin\alpha y_C A=-\boldsymbol{n}\gamma h_C A=-\boldsymbol{n}p_C A \qquad (3\text{-}22)$$

也就是：作用在任意形状平面上的静水总压力，其大小等于该平面的面积与其形心处的静水压强 p_C 的乘积，而方向为指向斜面。由此可见：形心处的静水压强也就是整个平面的平均静水压强。至于总压力的作用点，则需通过式(3-21)求出，式(3-21)可写为

$$\boldsymbol{M}=-\iint_A[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}(p-p_0)]\mathrm{d}A$$

$$=\boldsymbol{n}\times\iint_A \gamma y\sin\alpha(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\mathrm{d}A$$

$$=\gamma\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{i}\iint_A xy\mathrm{d}A+\boldsymbol{j}\iint_A y^2\mathrm{d}A\right)\sin\alpha$$

由此可见：合力矩 $\boldsymbol{M}$ 与平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，因而 $\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{P}$，通过 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_D\times\boldsymbol{P}$ 可以得到总压力作用点位置 $\boldsymbol{r}_D$。即

$$\boldsymbol{M}=\gamma\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{i}\iint_A xy\mathrm{d}A+\boldsymbol{j}\iint_A y^2\mathrm{d}A\right)\sin\alpha=\boldsymbol{r}_D\times(-\boldsymbol{n}\gamma h_C A)$$

$$\boldsymbol{r}_D=x_D\boldsymbol{i}+y_D\boldsymbol{j}$$

$$=\left[\frac{\boldsymbol{i}\iint_A xy\mathrm{d}A}{h_C A}+\frac{\boldsymbol{j}\iint_A y^2\mathrm{d}A}{h_C A}\right]\sin\alpha$$

$$
= \frac{\iint_A xy\,\mathrm{d}A}{y_C A}\boldsymbol{i} + \frac{\iint_A y^2\,\mathrm{d}A}{y_C A}\boldsymbol{j} \tag{3-23}
$$

式中：$\iint_A y^2\,\mathrm{d}A$ 为面积 A 对 Ox 轴的惯性矩。

3.2.2 曲面上的静水总压力

如果物面为曲面，如图 3-4 所示，则面上各点作用的压力其方向并不平行，也就是说物面上各处的压力不是平行力系而是一个空间力系，其合力与合力矩一般并不互相垂直，$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{M}\neq 0$，从而无法确定压力中心。简单的方法是把曲面上各微元面积处的压力($-p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A$)分解为沿某一直角坐标系三个轴的分量，从而形成三组平行力系。对于每组平行力系可求得一个合力，合力矩及合力作用点。三个方向的合力未必能相交于物面上的一点。

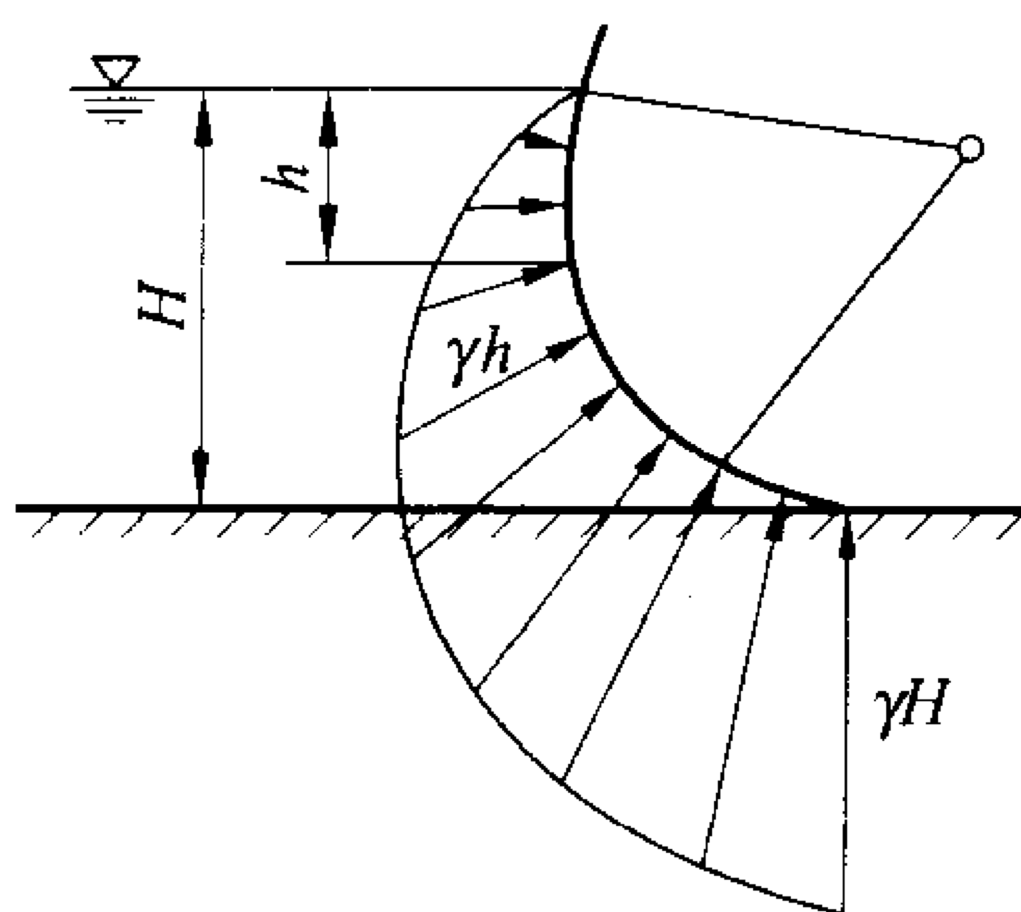


图 3-4 曲面静水压强分布[3]

3.2.3 潜体与浮体所承受的静水总压力

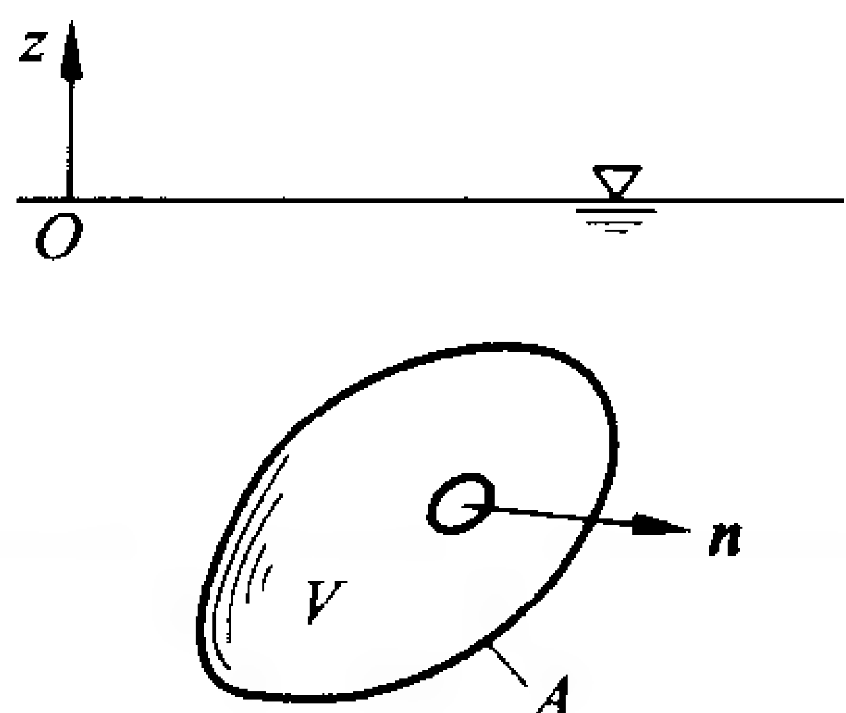


图 3-5 潜没物体的浮力

潜没于水下的物体，如图 3-5 称为潜体(submerged body)，其与液体接触的表面上也处处受到静水压力的作用。各微元面积上静水压力的总合就是该物体所承受的静水总压力，式(3-20)与式(3-21)同样适用。利用高斯公式(见式Ⅰ-15)，将以上两式由面积分的形式转

化为体积分的形式，则得

$$\boldsymbol{P}=-\iiint_V \nabla p \mathrm{d}V \tag{3-24}$$

$$\boldsymbol{M}=-\iiint_V (\nabla\times p\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \tag{3-25}$$

由式(3-15)可得

$$\begin{aligned}\nabla p &= \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\\ &=-\rho g\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{3-26}$$

$\boldsymbol{k}$ 为铅垂坐标 z 方向的单位向量。因此由式(3-24)得

$$\boldsymbol{P}=\iiint_V \rho g\boldsymbol{k}\mathrm{d}V=\rho gV\boldsymbol{k} \tag{3-27}$$

式(3-27)说明潜没水下的物体表面的静水总压力为物体所排开的相同体积液体的重量，方向为铅垂向上与重力加速度方向相反。

在式(3-25)中，由于$\nabla\times p\boldsymbol{r}=p\,\nabla\times\boldsymbol{r}+\nabla p\times\boldsymbol{r}$，其中$\nabla\times\boldsymbol{r}=0$，$\nabla p=-\rho g\boldsymbol{k}$，所以式(3-25)可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=-\iiint_V(-\rho g\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}V\\ &=\rho g\boldsymbol{k}\times\iiint_V\boldsymbol{r}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

其中 $\iiint_V\boldsymbol{r}\mathrm{d}V$ 可用体心公式$\iiint_V\boldsymbol{r}\mathrm{d}V=\boldsymbol{r}_CV$ 表示，因此

$$\boldsymbol{M}=\rho g\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_CV=\rho gV\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_C=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{r}_C \tag{3-28}$$

式(3-28)说明：$\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{P}$，合力通过体心，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_C$。潜没于静止液体中物体所受到的静水总压力，以其方向向上而通称浮力(buoyancy)，浮力作用线通过潜没物体的几何中心——体心称为浮心(center of buoyancy)。浮力理论称为阿基米德原理(Principle of Archimedes)，可表述如下：潜没于液体中的物体承受浮力，其大小等于物体所排开的液体重量，作用线通过物体的体心，方向铅垂向上。

漂浮在液体自由表面上，只是部分地淹没在液体中的物体称为浮体(floating body)。浮体所受到的浮力等于被淹没部分物体所排开的液体重量，浮力作用线通过淹没部分物体的体心，方向铅垂向上。

3.3 潜体与浮体的平衡与稳定

一切潜没于水中或漂浮于水面上的物体都受到两个力的作用，即物体的重力 G 和浮力 P_z。重力的作用线通过重心，铅垂向下。浮力的作用线通过浮心，铅垂向上。由于一般物体的质量并不均匀，故重心和浮心并不重合。只有在均质物体时重心与浮心完全重合。当重力 G 大于浮力 P_z，物体将沉于水的底部，称为沉体。如果重力 G 与浮力 P_z 相等，物体可以在液体中任何深度处维持平衡，这时由于物体潜没于水中，称物体为潜体。而当重力 G 小于浮力 P_z 时，物体将上浮，直至部分物体露出水面，减小了排开水体的重量，使浮力与重力相平衡，部分露出水面的物体称为浮体。

3.3.1 潜体的平衡及其稳定性

潜没于液体中的物体，重力与浮力相等只是维持它平衡的必要条件，要保证潜体的平衡还需要重心与浮心同在一条铅垂线上，这样潜体既不移动也不转动，维持平衡。除此之外还有一个重要问题，即平衡的稳定性问题。如果由于各种原因，使潜体在它的平衡位置略有偏离，潜体如能自动恢复它原有的平衡位置，则这个潜体的平衡是稳定的。如果潜体不能恢复原有的平衡位置，而且偏离越来越大，则潜体的平衡是不稳定的。潜体平衡的稳定性取决于重心 C 和浮心 D 在同一条铅垂线上的相对位置。

图 3-6 表示潜体在水中的平衡及其稳定性。如重心 C 位于浮心 D 之下方，当潜体由于外力扰动发生倾斜时，重力 G 与浮力 P_z 形成一个使潜体回复到原有平衡状态的转动力矩，以反抗使潜

体倾倒的趋势，而一旦外界干扰消失，潜体自动恢复到原有的平衡位置，这种情况下平衡是稳定的，如图 3-6(a)所示；图 3-6(b)重心 C 在浮心 D 之上，潜体如有倾斜，重力 G 与浮力 P_z 将形成一个使倾倒加剧的转动力矩，潜体不可能自动恢复到原来的平衡位置，是为不稳定的平衡状态；图 3-6(c)中重心 C 与浮心 D 重合，潜体处于任何位置都是平衡的，称为随遇平衡。

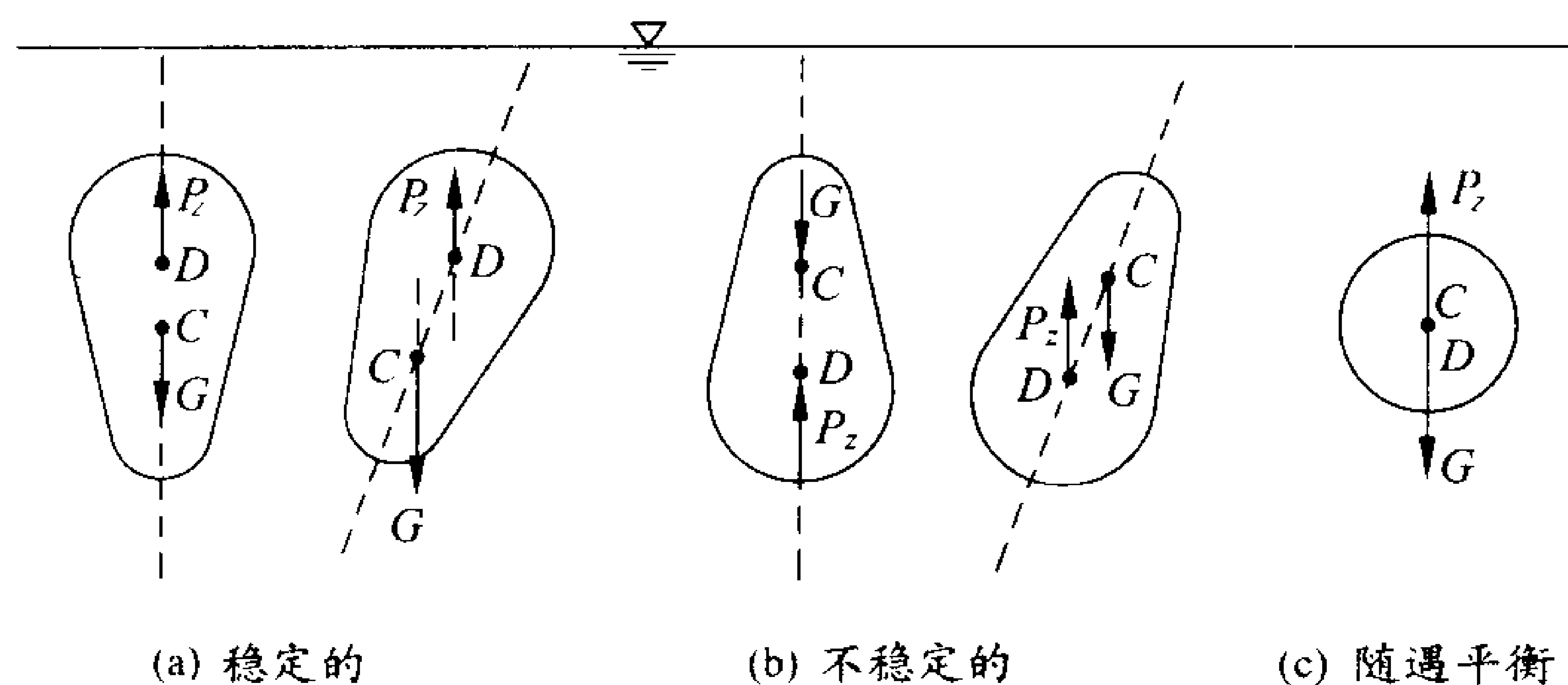


图 3-6　潜体的稳定

3.3.2　浮体的平衡及其稳定性

浮体的稳定是船舶设计中的重要问题。漂浮于液体表面的物体，其平衡条件与潜体相同，即浮体的重力与浮力相等，重心 C 与浮心 D 在同一铅垂线上。但浮体的稳定性较为复杂，这是由于当浮体稍有倾斜后，浸没在水中的部分形状改变了，从而使浮心位置发生变化，使问题变得复杂。浮体在垂向和水平方向的位移变化不会导致平衡失去稳定。关键在于浮体的倾斜，即对于平衡轴线发生角位移的情况。图 3-7 表示浮体平衡的稳定性。图3-7(a)所示的宽浅物体，当发生转动后，由于物体浸入水中部分形状的改变，使浮心由 D 点移至 D' 点。重心在对称中心轴上的位置并没有改变(如果坐标系不是固定于浮体上而是固定于水面某点处，则

由于中心轴转动了一个角度，因此重心 C 也随之在空间上有一个小的移动)。与潜体的情况相似，当浮力 P_z 与重力 G 所形成的转动力矩使浮体回复到原平衡位置时，浮体是稳定的，如图3-7(a)所示；当重力与浮力形成的转动力矩使浮体进一步倾斜，如图3-7(b)则浮体不稳定；图 3-7(c)则表示随遇平衡的情况。浮体与水面相交的平面称为浮面，垂直于浮面并通过重心 C 的垂直线称为浮轴。当浮体处于原来的平衡位置时浮心和重心均在浮轴上，而当浮体由于某些原因发生转动而倾斜时，浮心将移到另外的位置，通过浮心的浮力作用线将与原浮轴交于一点 M，称为定倾中心(metacenter)。在图 3-7 中标出了定倾中心 M 的位置。由图可见：浮体的稳定性取决于定倾中心 M 与重心 C 的位置关系，如果 M 点高于 C 点，浮体是稳定的；反之，如果 M 点低于 C 点，则浮体不稳定。如果定义 M 点到 C 点的高度为定倾高度(metacentric height)m，则当 M 点高于 C 点，m 为正值($m>0$)，浮体稳定；反之，当 $m<0$，浮体不稳定。定倾高度 m 的数值越大，浮体的稳定性越好。

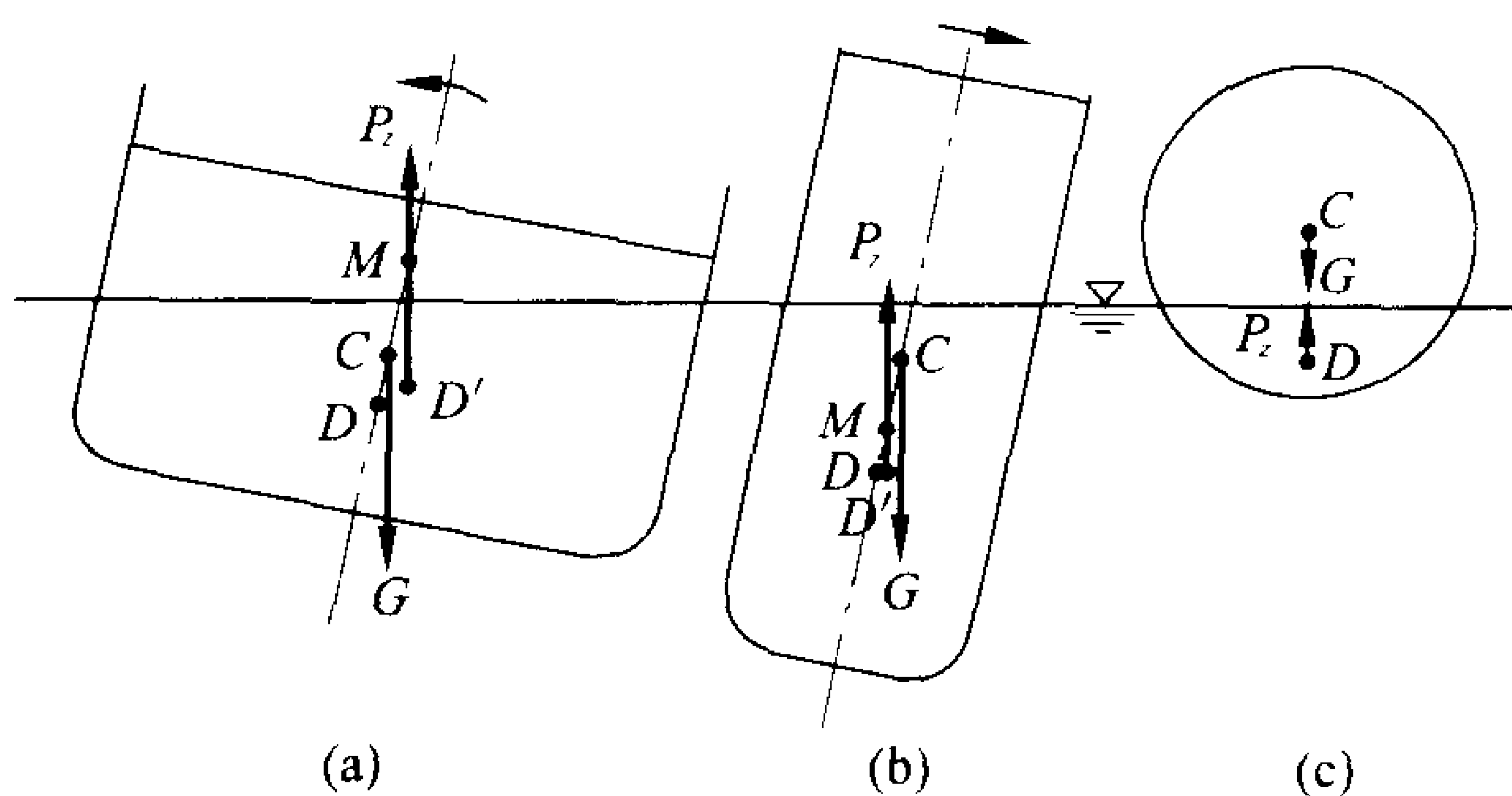


图 3-7　浮体的稳定性[1]

图 3-8 所示为一对于中心对称平面对称的浮体(船)。设浮体绕浮面上惯性中心(center of inertia)轴 O-O 逆时针转动一个小

角度α。重心在原浮轴上的位置虽无变化，但它在空间上的位置却由于浮轴的转动而由C点移至C'点。如果船内装有液体，则当船体倾斜后整个船的重心在原浮轴上的位置也将有所改变。由于浮体浸没于水中的部分体积虽未改变但形状却改变了。所以浮心将移至D'点。

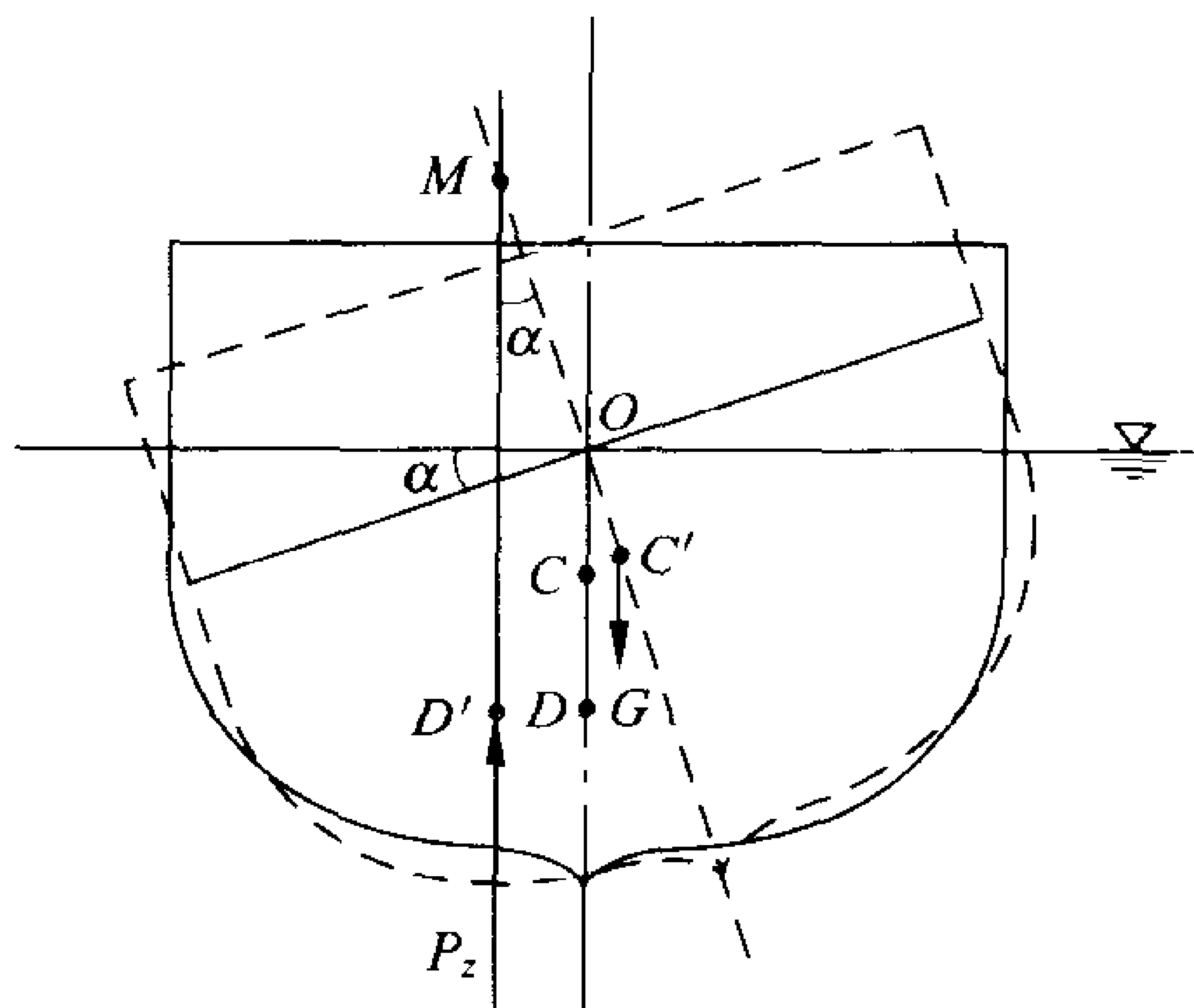


图 3-8 浮体的定倾高度[7]

使浮体恢复到原来平衡状态的力矩为：

$$\boldsymbol{M} = \rho g V \overline{C'M} \sin\alpha \tag{3-29}$$

当α为小角度，如$\alpha<10°$时，$\sin\alpha\approx\alpha$，所以有

$$\boldsymbol{M} = \rho g V \overline{C'M} \alpha \tag{3-30}$$

式中：V为浮体浸没于水下的体积；$\overline{C'M}$表示C'点与M点的距离，为定倾高度m。

定倾高度m可从以下推导定出。如图 3-9，设浮体为一二维船体，船体逆时针转动后浮面由原PQ变为$P'Q'$，楔形体OPP'浸入水中而楔形体OQQ'则露出水面，二者体积大小相同。浮心由D点移至D''点，通过D''点的浮力作用线垂直于$P'Q'$平面而与原浮轴交于M点，即为定倾中心。重心C与原浮心D在转动后的

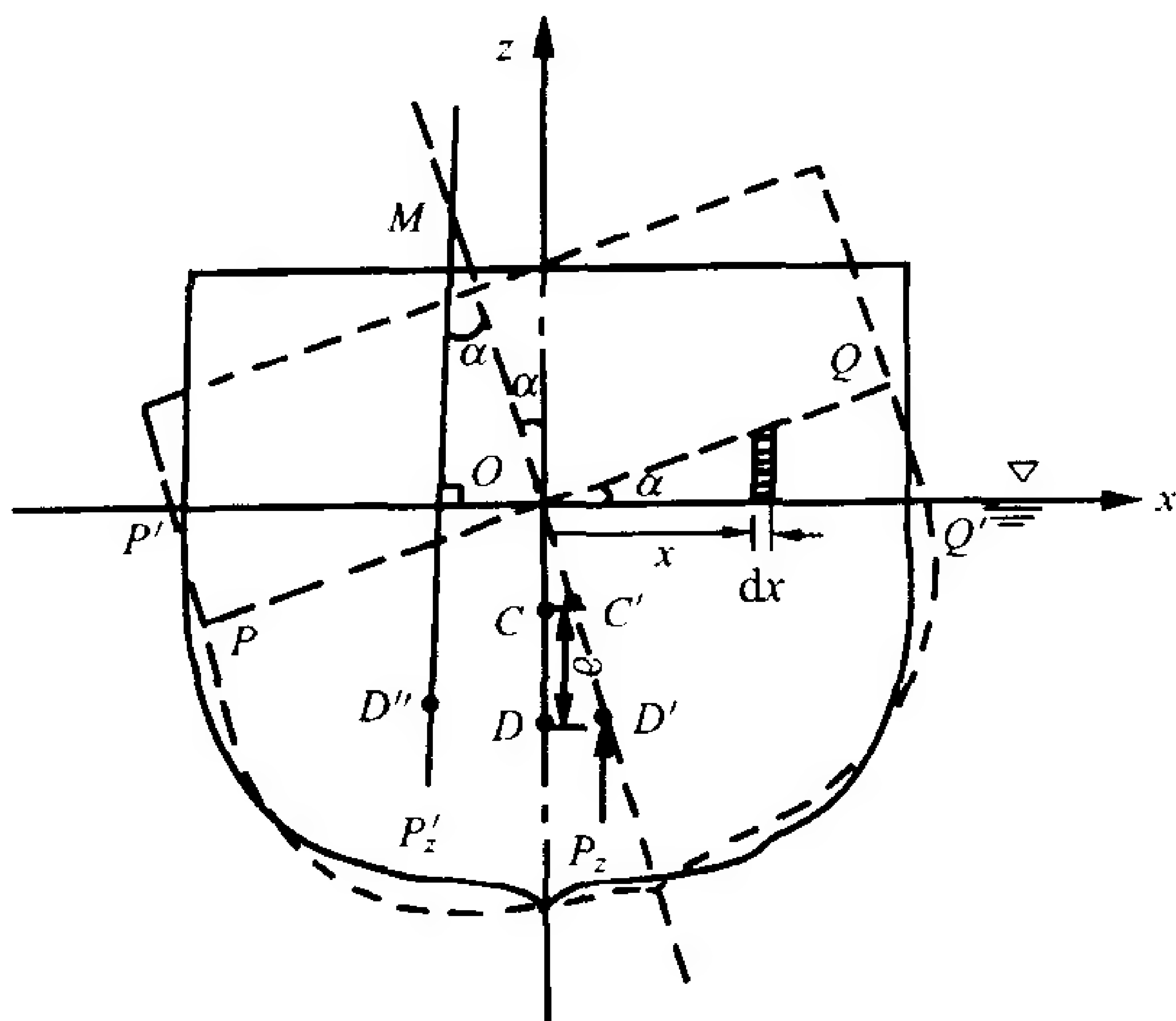


图 3-9 定倾高度的推导

船体中心线上的相对位置不变为 C' 及 D'。楔形体体积为 $\iint x\alpha\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中：$x\alpha$ 表示 x 点处楔形体的高度；y 表示与纸面垂直方向的坐标轴，坐标系设于水面上，以 O 点为原点。船体转动后的浮力 P_z' 应该等于原浮力 P_z 加上楔形体 OPP' 所形成的浮力并减去楔形体 OQQ' 所形成的浮力。如果对 D' 点取矩，则可得：$P_z'(\overline{D'D''})_x=\rho g\iint x^2\alpha dxdy$ 其中 $\rho g\iint x^2\alpha dxdy$ 为两个楔形体所形成的顺时针方向的力偶。由于两个楔形体体积相同，因此 $P_z'=P_z=\rho gV$。$(\overline{D'D''})_x$ 为 $\overline{D'D''}$ 在 x 方向的投影。因而

$$(\overline{D'D''})_x=\frac{\rho g\alpha\iint x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\rho gV}=\frac{I_0\alpha}{V} \tag{3-31}$$

式中：I_0 表示浮体在未转动时，原浮面对 O 轴的惯性矩(inertia moment)。

注意：在推导过程中都忽略了 α 的高阶项，D'' 与 D' 点在 z 方向的变化可以证明是 α 的高阶量，因此可不予考虑。由图 3-9 可见：由定倾中心 M 点到原浮心 D' 的距离 $\overline{MD'}$，当 α 甚小时，$\overline{MD'}\cdot\alpha=\overline{D'D''}=\frac{I_0\alpha}{V}$，因此

$$\overline{MD'}=\frac{I_0}{V} \tag{3-32}$$

$\overline{MD'}$ 称为定倾半径(metacentric radius)。重心 C' 与原浮心 D' 之间的距离称为偏心距，以 e 表示，为已知量，因此定倾高度 m 为

$$m=\overline{MC'}=\overline{MD'}-e=\frac{I_0}{V}-e \tag{3-33}$$

如果浮体转动的角度 α 不是小量，则定倾高度将随 α 而变化，浮体的稳定需要进一步分析，读者可参阅专门书籍。

3.3.3 油船的平衡稳定性

如果浮在水面的船只中装运有具有自由液面的液体，如油船，则当船身倾斜时，船舱中自由液面发生变化，因而船中液体的重心随之移动，从而使全船的重心位置改变，现分析这种情况下的稳定性。

设船内有两油箱，各有自由液面如图 3-10 所示。当船身顺时针转动一个小角度 α 而发生倾斜时，箱内油面随着船身倾斜，其重心分别由 C_1 移至 C_1'，C_2 移至 C_2'，从而使整个油船的重心由 C 移至 C'。重心移动的水平距离可以仿照上节确定浮心移动距离的方法得出，采用与式(3-31)相似的公式，即

$$\overline{C_1C_1'}=\frac{\alpha I_1}{V_1} \tag{3-34}$$

$$\overline{C_2C_2'}=\frac{\alpha I_2}{V_2} \tag{3-35}$$

式中：I_1，I_2 分别为两个油箱自由液面对该油箱中心对称轴的惯性矩；V_1 和 V_2 则代表两个油箱中各自的油体积。

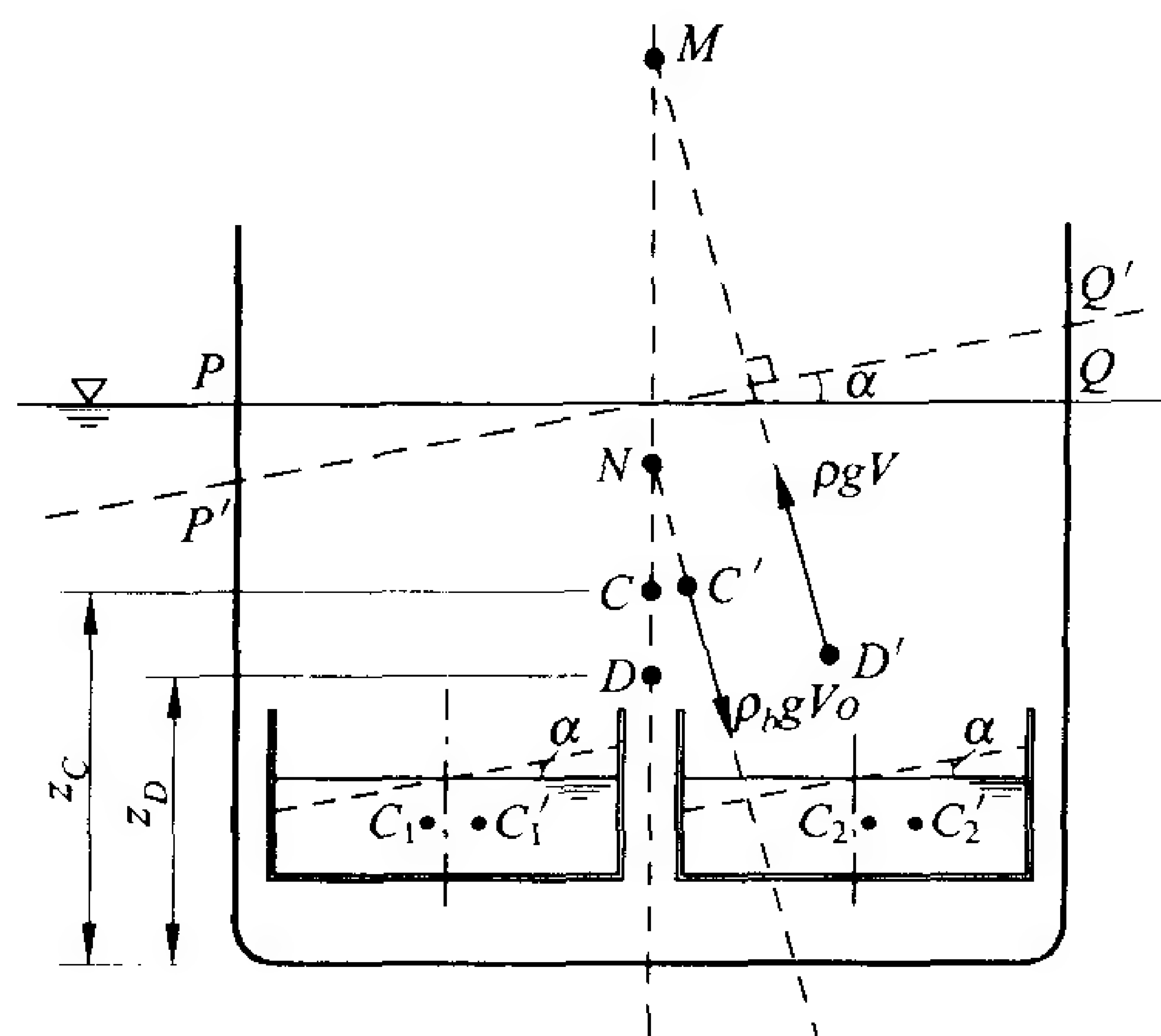


图 3-10　油船稳定性的分析[2]

全船重心位置的移动距离$\overline{CC'}$可通过求合力矩的办法求得。认为全船重心的移动只是由油箱中油体重心的移动所引起，于是

$$\rho_b g V_0 \overline{CC'} = \rho_0 g V_1 \overline{C_1C_1'} + \rho_0 g V_2 \overline{C_2C_2'}$$

$$= \rho_0 g V_1 \frac{\alpha I_1}{V_1} + \rho_0 g V_2 \frac{\alpha I_2}{V_2}$$

$$= \rho_0 g \alpha (I_1 + I_2)$$

得

$$\overline{CC'} = \frac{1}{V_0}\frac{\rho_0}{\rho_b}\alpha(I_1 + I_2) \tag{3-36}$$

式中：ρ_b 为全船的平均密度；ρ_0 为油密度；V_0 为全船的体积。船体倾斜后自由水面在船体上的位置由原来的 PQ 改变为 $P'Q'$。由船体转动后的浮心 D'引出与 $P'Q'$垂直的浮力作用线，该线与原浮轴交于 M 点，即为定倾中心。船身转动后重力作用线也垂直于船体倾斜后的自由水面 $P'Q'$，由 C'向上引线与原浮轴交于 N 点。

油船的浮力为 $\rho g V$，其中，ρ 为水的密度，V 为船体浸没部分的体积。重力为 $\rho_b g V_0$。根据定倾高度的定义，它由原来的$\overline{MC}$减小到现在的$\overline{MN}$。$\overline{MN}$的数值由下式确定：

$$\overline{MN} = z_D + \overline{MD} - (z_C + \overline{CN})$$

式中：z_D，z_C 分别表示原浮心和原重心相对于船底的高度（见图3-10）；V 为船体浸没于水中部分的体积；$\overline{MD}$为船体的定倾半径，由式(3-32)知：$\overline{MD}=\dfrac{I_0}{V}$；$\overline{CN}=\dfrac{\overline{CC'}}{\alpha}=\dfrac{1}{V_0}\dfrac{\rho_0}{\rho}(I_1+I_2)$，代入上式得定倾高度$\overline{MN}$为

$$\overline{MN} = (z_D - z_C) + \frac{I_0}{V} - \frac{1}{V_0}\frac{\rho_0}{\rho_b}(I_1 + I_2) \qquad (3\text{-}37)$$

从式(3-37)中可看出：减小油箱中自由液面的惯性矩，如 I_1，I_2 值，可以增加定倾高度，从而提高油船的稳定性，为此应尽量将油箱分隔为小油箱。

3.4 非惯性坐标系中的静止液体

在非惯性坐标系中，液体静止的平衡方程式(3-1)仍适用，即

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{\rho}\nabla p \qquad (3\text{-}1)$$

只是在质量力项中应该包括惯性力。

3.4.1 直线等加速运动容器中的静止液体

如果盛有液体的容器相对于地球作直线等加速运动，坐标系固定于容器上，为非惯性坐标系。容器中的液体相对于容器为静止状态。单位质量力包括惯性力及地球引力——重力。容器中各点的绝对加速度为 $\boldsymbol{a}$，表示为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

则根据理论力学中的达朗伯原理，作用在单位质量液体上的惯性力为 $-\boldsymbol{a}$，若取坐标系如图 3-11 所示，z 轴铅垂向上，质量力 $\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{g}$，即

$$f_x=-a_x,\quad f_y=-a_y,\quad f_z=-(a_z+g)$$

把上式代入式(3-2)中得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p&=\rho(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z)\\&=-\rho[a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+(a_z+g)\mathrm{d}z]\end{aligned}\tag{3-38}$$

积分上式可得压强 p 为

$$p=-\rho(a_xx+a_yy+a_zz+gz)+C\tag{3-39}$$

C 为积分常数，由具体问题的条件确定。

例如在图 3-11 中，以 x 方向加速度为 a 而运动的容器，原静止时液体深度为 H。此时有

$$f_x=-a,\ f_y=0,\ f_z=-g$$

由于 $\mathrm{d}p=0$ 表示等压面方程，由式(3-38)得等压面方程为

$$\mathrm{d}p=-\rho(a\mathrm{d}x+g\mathrm{d}z)=0$$

$$z=-\frac{a}{g}x+C\tag{3-40}$$

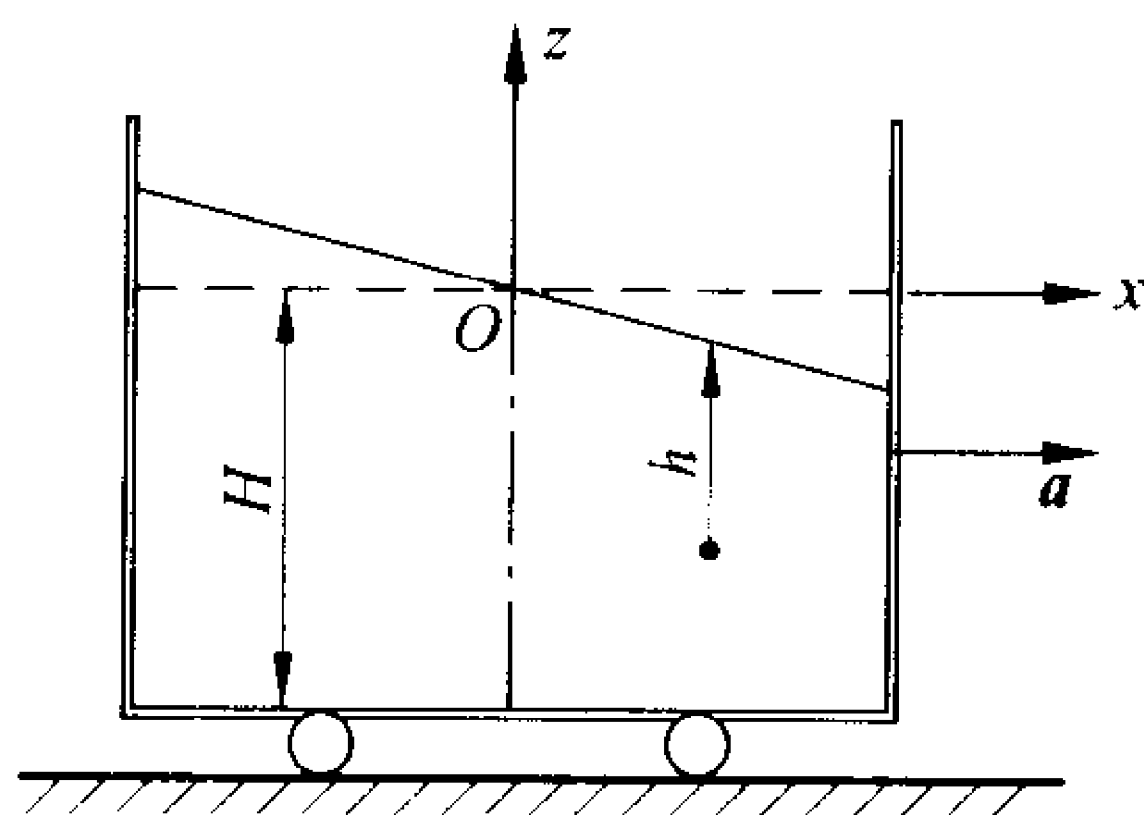


图 3-11 直线等加速运动容器中的静止液体

由此可见：在作直线等加速运动的容器中，静止液体的等压面为一簇倾斜平面，其斜率由 $\left(-\frac{a}{g}\right)$ 决定。液体的自由液面也是一个等压面，由原点处的条件 $z=0,x=0$，得到 $C=0$，因此自由液面的方程为

$$z=-\frac{a}{g}x\tag{3-41}$$

为一个倾斜平面。

积分压强的全微分方程 $\mathrm{d}p=-\rho(a\mathrm{d}x+g\mathrm{d}z)$，得

$$p=C-\rho ax-\rho gz$$

将坐标原点 $x=0,z=0$ 处的边界条件 $p=p_0$ 代入，得 $C=p_0$，于是

上式可写为

$$p = p_0 - \rho a x - \rho g z \tag{3-42}$$

上式为液面以下的压强分布公式，p_0 为大气压强。该式又可写为

$$p = p_0 - \rho g\left(\frac{a}{g}x + z\right)$$

式中：$-\left(\frac{a}{g}x + z\right)$等于液体自由表面以下的垂直深度 h。因此上式可写为

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \gamma h \tag{3-43}$$

上式与 3.1.4 节中的式(3-18)相同，说明在非惯性坐标系中静止液体中一点的压强与惯性坐标系中形式相同，均决定于该点在水下的深度。

3.4.2 等速旋转运动容器中的静止液体

在半径为 R 的圆柱形容器中装有液体，以等角速度 ω 绕容器中心旋转轴转动。容器中的液体由于液体具有粘性也被容器带动而作旋转运动。此时液体除受重力作用外还受离心惯性力的作用。坐标系固定于容器上如图 3-12所示，坐标原点固定于旋转轴与容器底面的交点处，z 轴向上。设容器静止时液体在容器中的高度为 H。

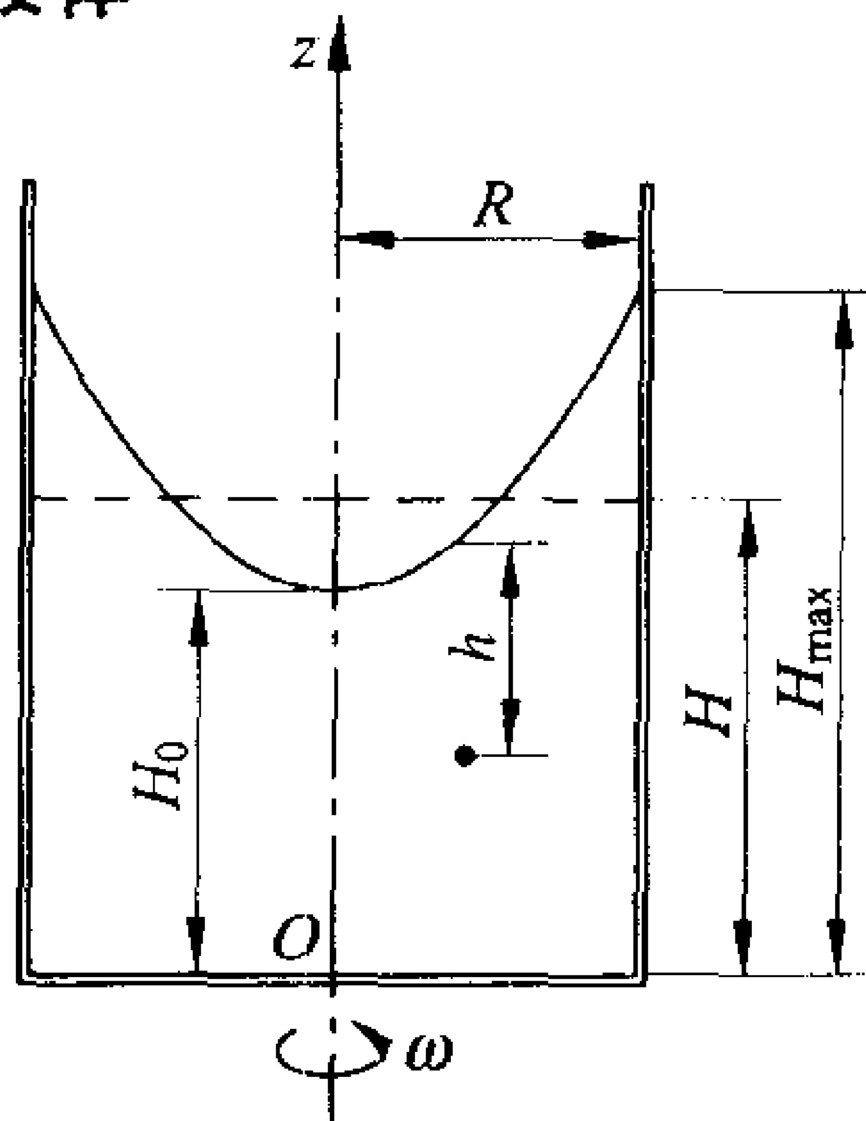


图 3-12 旋转容器中静止液体

单位质量流体所受到的质量力为

$$f_x = \omega^2 x,\ f_y = \omega^2 y,\ f_Z = -g$$

把上式代入式(3-2)式中得

$$\mathrm{d}p = \rho(\omega^2 x \mathrm{d}x + \omega^2 y \mathrm{d}y + g \mathrm{d}Z) \tag{3-44}$$

在等压面上 $\mathrm{d}p = 0$，积分上式得等压面方程式为

$$\frac{\omega^2 x^2}{2}+\frac{\omega^2 y^2}{2}-gz=C$$

式中：C 为积分常数。

令
$$r^2=x^2+y^2,$$
则
$$\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz=C \tag{3-45}$$

表明等压面是一族旋转抛物面，不同等压面有不同的 C 值。自由液面也是一个等压面。在自由液面的最低点有

$$r=0,\quad z=H_0$$

代入上式得 $C=-gH_0$，因此自由液面的方程式为

$$\frac{\omega^2 r^2}{2}-g(z-H_0)=0 \tag{3-46}$$

液体中的压力分布可由式(3-44)积分得到，即

$$\begin{aligned} p&=\rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2}+\frac{\omega^2 y^2}{2}-gz\right)+C_1 \\ &=\rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)+C_1 \end{aligned}$$

设自由表面上压强为大气压强 p_0，则由边界条件 $r=0, z=H_0$，$p=p_0$。得出积分常数 $C_1=p_0+\rho gH_0$，代入上式得

$$\begin{aligned} p&=p_0+\rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz+gH_0\right) \\ &=p_0+\rho g\left[\frac{\omega^2 r^2}{2g}+(H_0-z)\right] \end{aligned} \tag{3-47}$$

由式(3-46)可得自由液面方程

$$z-H_0=\frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

令自由液面上一点在垂直坐标上的投影为 z_0，则

$$z_0=H_0+\frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{3-48}$$

由式(3-48)可见：$\frac{\omega^2 r^2}{2g}$ 代表自由液面的旋转抛物面上一点较 H_0 高出的那部分。当 $r=R, z_0=H_{max}$ 为自由液面在容器壁面处的最

大水深，即

$$H_{max} = H_0 + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

也可写为

$$\frac{\omega^2 R^2}{2g} = H_{max} - H_0 \tag{3-49}$$

利用这一结果，由液面最大高差（$H_{max} - H_0$）可以确定容器的角转速 ω。令 z 为水下一点的坐标值，该点在水面以下的深度为 h，其值为

$$\frac{\omega^2 R^2}{2g} + H_0 - z = h \tag{3-50}$$

于是式(3-47)可改写为

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \gamma h \tag{3-51}$$

同样与惯性坐标系中压力分布的形式相同。

H_0 可以通过容器旋转前后其中液体体积相同这一点来确定。静止时，液体体积为 $\pi R^2 H$，所以

$$\int_0^R z_0 2\pi r \mathrm{d}r = \pi R^2 H$$

将式(3-48)代入上式，得

$$H_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{3-52}$$

自由液面方程最终可以写为

$$z = H - \frac{\omega^2 R^2}{2g}\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{3-53}$$

参考书目

[1] 林泰造．基础水理学．日本：鹿岛出版会，1996

[2] Douglas J F，Gasiorek J M，Swaffield J A 著．汤全明译．流体力学．北京：高等教育出版社，1992

第4章

量纲分析与相似原理

在建立了流体运动的基本方程式，如第 1 章和第 2 章中的连续方程和纳维-斯托克斯方程后，只要明确边界条件和初始条件，从理论上讲，一切流动问题都是可以解决的。但是很多情况下，由于数学上至今还难以克服的困难，相当多的实际流动并不能用这种理论上的办法求解。计算机的发展给了人们很多帮助，很多过去不能从数学上求得精确解的流动问题现在可以通过数值计算得到解答，但仍然不能说所有问题都可迎刃而解。在流体力学形成和发展的历史上，特别是在解决很多实际流动问题方面还有一个重要的解决流动问题的方法，就是量纲分析（dimensional analysis）和试验方法。这个方法至今还广为应用，特别是对于一些复杂的或特殊的流动，量纲分析和试验方法还具有强大的生命力。量纲分析可以帮助人们对复杂的流动问题进行定性的分析，提出反映流动的方程式的结构形式。相似原理（principle of similitude）则是流动问题试验方法的理论基础。近年来由于应用计算机的推广，“模型”和“相似”的概念突破了原来的范围，成为仿真技术的基础。近一二十年，国内外又出现把“相似论”作为思维科学和认知哲学来进行研究的学术分支[①]。

---

① 左东启。相似理论 20 世纪的演进和 21 世纪的展望。水利水电科技进展，1997，17(2)

最先提出量纲分析理论的是 19 世纪初叶法国数学家傅里叶(Jean-Baptiste-Joseph Fourier,1768—1830)。后来俄国人儒科夫斯基(Николай Егорович Жуковский,1847—1921),英国人瑞利(John William Strutt Rayleigh,Lord,1842—1919)等相继对这一理论作出了贡献。[①] 1941 年白金汉(Buckingham E. 1867—1940)提出量纲分析中一个重要定理,白金汉 π 定理(Buckingham π-theorem)。[②]

4.1 量　　纲

各种物理量之间存在一定的关系,说明这些物理量的结构必然由若干统一的基础成分所构成。物理量的这种基本构成成分称为"量纲",也称为"因次"。在流体力学中常用的物理量有长度、时间、质量、速度、力、密度、粘度等等,构成这些物理量的量纲有长度(length)L,时间(time)T,质量(mass)M,而构成速度的量纲为 L/T,构成密度的量纲为 M/L^3。其中 L,T,M 称为基本量纲,而由基本量纲组合而成的其他物理量的量纲例如 L/T,M/L^3 等则称为诱导量纲。量纲也可以理解为不同性质的物理量的量度特性。

基本量纲必须具有独立性,它不可能由其他的基本量纲推导出来,而诱导量纲不具有这种独立性是由基本量纲组合而成的。在流体力学中研究的是流体的机械运动,因此常选择 L、T、M 为基本量纲。一个物理量的量纲只表示这个物理量由基本量纲的构成而并不表示其物理含义。例如性质上完全不同的两种物理量功(work)和力矩(moment)却具有相同的量纲 ML^2/T^2。力学中还

---

① Rouse H. 流体力学讲座。1981. 11

② Buckingham E. Phys. Rev. ,1914. vol. 4. no. 4：345～376

有一种基本量纲的选择，即 L，T，F。F 表示力(force)。表 4-1 中列出了以两种不同基本量纲 LTM 和 LTF 所表示的流体力学中常用的各种物理量的量纲型式。

表 4-1[3]　流体物理量量纲型式

物理量		量纲 L，T，M	量纲 L，T，F	SI单位	
几何学的量	长度 l	L	L	m	米
	面积 A	L^2	L^2	m^2	平方米
	体积 V	L^3	L^3	m^3	立方米
	坡度 J				
	面积距 I	L^4	L^4	m^4	四次方米
运动学的量	时间 t	T	T	s	秒
	流速 v	L/T	L/T	m/s	米每秒
	重力加速度 g	L/T^2	L/T^2	m/s^2	米每平方秒
	流量 Q	L^3/T	L^3/T	m^3/s	立方米每秒
	单宽流量 q	L^2/T	L^2/T	m^2/s	平方米每秒
物性系数及动力学的量	质量 m	M	FT^2/L	kg	千克(公斤)
	力 F	ML/T^2	F	N	牛[顿]
	密度 ρ	M/L^3	FT^2/L^4	kg/m^3	千克每立方米
	重度 γ	M/L^2T^2	F/L^3	N/m^3	牛[顿]每立方米
	粘度 μ	M/LT	FT/L^2	Pa·s	帕秒
	运动粘度 ν	L^2/T	L^2/T	m^2/s	平方米每秒
	压强 p	M/LT^2	F/L^2	Pa	帕[斯卡]
	切应力 τ	M/LT^2	F/L^2	Pa	帕[斯卡]
	弹性模量 E	M/LT^2	F/L^2	Pa	帕[斯卡]
	表面张力系数 σ	M/T^2	F/L	N/m	牛[顿]每米
	动量 p	ML/T	FT	kg·m/s	千克米每秒
	功、能 W	ML^2/T^2	FL	J	焦[耳]
	水头 H	L	L	m	米
	功率 P	ML^2/T^3	LF/T	W	瓦[特]

为了表示一个物理量的数量性质，必须要有一个度量的标准，也就是单位（unit），物理量的大小就用单位的实数倍数来表示。对于具有同一种量纲的物理量，有时可以用多种不同的单位，例如长度、高度、宽度等具有长度的量纲的各种物理量，对其度量单位可以有多种不同的选择，例如选择的单位可以有“米”（meter），英尺（foot），市尺等。同一个长度，使用不同单位则会有不同的数值或单位的实数倍数，如长度 1 米可表示为 3.28 英尺或 3 市尺，但是这些不同的单位就其性质来说都是长度单位，也可以说它们都具有同一量纲 L。规定了力学中三个基本量纲的单位，其他各种物理量按其量纲可由这三个基本量纲的单位（可称为基本单位）表示出来。例如当规定长度单位用米制而时间单位用秒，速度的量纲为 L/T，所以其单位是（m/s）。在流体力学中统一使用国际单位制（International System of Units，SI）。对于一些工程师来说更熟悉的却是“工程单位”，但是由于我国采用了 SI 单位制，工程单位已逐渐被淘汰。国际单位制（SI）中基本单位为长度（米，m），时间（秒，s）和质量（公斤，kg）。力的单位是一种导出单位，称为牛顿（N），$1N=1kg \cdot m/s^2$，详见表 4-1。单位和量纲都是表示物理量的量度，量纲表示物理量量度的性质和类别，而单位则可用以表示物理量量度的数量和大小。对于一个物理量，其量纲是确定的而其单位则是主观选定的。选取不同的单位会得到不同的数值，但是对于同一量纲的两个物理量的比值却不随单位的选择而变化。这就是同类物理量相对大小对于单位选取的“不变性”，是度量的根本原则。根据这个原则可得出一个重要的结论：在确定的单位制中，所有物理量的量纲都具有基本量纲的幂次积形式。即

$$[x]=L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma} \tag{4-1}$$

式中：$[x]$表示某一物理量 x 的量纲；α,β,γ 称为量纲指数。式（4-1）称为量纲公式。凡 α,β,γ 中有一个不为零者为有量纲量；如果某一物理量 x 的量纲公式中，$\alpha=0,\beta=0,\gamma=0$ 即$[x]=1$，则 x

称为无量纲量。它具有数值的特性。无量纲数在流体力学中有着重要的作用，具有如下特点：

（1）无量纲量既无量纲，当然也没有单位，而只是一个实数。这一实数的数值与流动问题中采用哪种单位制无关。例如某一流动，其雷诺数为2000，则无论采用国际单位制(SI)或采用英制，这一数值并不改变。

（2）在相似流动中(例如：在流体力学的试验研究中常以尺度较小的模型水流去模拟大尺度的原型水流，但模型与原型中相应的物理量均成一定的比例，二者为相似流动)无量纲量是相等的。常用一些无量纲量如雷诺数，弗劳德数作为流动相似的判据，这些无量纲量在模型水流中与原型水流中保持相同的数值。利用无量纲量来分析、整理实验数据可以得到更一般性的规律。

（3）无量纲量在表述自然规律中具有重要作用。自然界的客观规律是不以人们的意志为转移的，而量度的单位制却是由人们主观制定或选择的。只有不受单位制影响的无量纲量才可以作为反映客观规律的独立因素，在这个意义上布里奇曼(Bridgman P. W.) 1931年称之为"相对值(无量纲量)的绝对意义"。一个完整、正确的力学方程式应该是由无量纲项组成的方程式。

（4）只有对于无量纲量才可以应用如对数、指数、三角函数等超越函数的运算。对于有量纲的量则不能进行这样的运算，例如：对速度 $v=\frac{s}{t}$ 取对数，从数学上讲可以写为 $\ln v=\ln\left(\frac{s}{t}\right)=\ln s-\ln t$，但从物理上看，这一结果是荒谬的，没有意义的。

4.2 量纲和谐原理

只有相同量纲的物理量才能相加、相减或相等。不同量纲的物理量不能相加减，但是可以通过相乘或相除而组合在一起，组合

的物理量将由于乘除而得到一个新的量纲，例如：某一流动，流过的距离 s 被时间 t 除得流速 v，则 v 的量纲为 $[v]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$。当把有关的物理量组成一个方程式来表述某一流动现象时，这一方程式中的每一项可以由不同的物理量通过乘除而组成，但各项的量纲必须相同。

这样就形成了量纲分析中必须遵循的一个基本原理，就是量纲和谐原理(The principle of dimensional homogeneity)即凡是正确反映客观物理过程中各个物理量之间关系的方程式，必须是量纲和谐的，即其各个项的量纲是一致的。如伯努利方程(2-71)

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}+Z=C \tag{2-71}$$

式中每一项的量纲都是长度的量纲(L)，包括等号右侧的常数 C 代表总水头，也具有 L 量纲。选定同一长度单位即可通过此公式进行计算而得到数量的结果。量纲和谐的方程式不因选用单位制的不同而改变其形式。

量纲和谐原理可以帮助人们正确地建立新方程式，确定方程式中各项的结构形式。例如：圆管层流(laminar flow)的流量 Q 与单位管长的压强差 $\frac{\Delta p}{l}$，圆管半径 r，液体的粘度 μ 等因素有关，由量纲和谐原理得

$$[Q]=\left[\left(\frac{\Delta p}{l}\right)^a r^b \mu^c\right]$$

如采用基本量纲为 L，T，M，各个量的量纲为

$$[Q]=\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}$$

$$[\Delta p]=\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$$

$$[\mu]=\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$$

$$[r]=[l]=\mathrm{L}$$

把上述 4 项代入流量 Q 的量纲表示式中可得

$$L^3T^{-1}=\left(\frac{ML^{-1}T^{-2}}{L}\right)^a L^b(ML^{-1}T^{-1})^c$$

量纲和谐原理要求等号两侧量纲一致，则

$$L:\quad 3=-2a+b-c$$

$$T:\quad -1=-2a-c$$

$$M:\quad 0=a+c$$

上面 3 式联立可解出 $a=1$，$b=4$，$c=-1$，于是

$$[Q]=\left[\left(\frac{\Delta p}{l}\right)r^4\mu^{-1}\right]$$

即得到圆管层流流量 Q 与单位管长压强差 $\frac{\Delta p}{l}$、圆管半径 r、液体粘度 μ 的关系式为

$$Q=k\frac{\Delta p r^4}{l\mu}$$

式中：k 为无量纲比例常数，可通过理论求解得到 $k=\frac{\pi}{8}$。

量纲和谐原理可用来检验新建立方程式或经验公式的正确性。例如纳维-斯托克斯方程式(2-39)为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=f_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} \qquad (2\text{-}39)$$

式中各项的量纲均为 LT^{-2}，说明该方程式在量纲上是和谐的。有些经验公式，量纲是和谐的，这种经验公式在应用时与单位制的选择无关。但也有一些常用的经验公式的量纲是不和谐的，如在水力学中至今还广泛应用的曼宁公式(Manning formula)为

$$v=\frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}J^{\frac{1}{2}}$$

式中：v 为河槽中过流断面上水的平均流速，$[v]=LT^{-1}$；R 为过流断面的水力半径(hydraulie radius)，$[R]=L$；J 为水力坡度(hydraulic gradient)，$[J]=1$；n 为糙率(roughness coefficient)，它的量纲并不明确。

为了使曼宁公式量纲和谐，n 应具有 $L^{-\frac{1}{3}}T$ 的量纲，但是表示明槽槽壁粗糙程度的 n 不应该出现时间量纲 T，因为粗糙只应具有几何的性质，即量纲为 L，而与时间无关。因此曼宁公式应该乘以一个与选取单位制有关的系数 a，即

$$v=a\ \frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}J^{\frac{1}{2}}$$

如选用 SI 单位制，$a=1$；如选用英制，$a=1.486$。劳斯（Hunter Rouse 1906—1996）1943 年提出在明槽流动中重力起主导作用，它的作用应包括在曼宁公式的系数 a 中，给系数 a 的量纲为 $[\sqrt{g}]=L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$，因此糙率 n 就具有 $L^{\frac{1}{6}}$ 的量纲。在这种解释中糙率只与长度量纲有关，理论上还勉强可以接受，而且广泛被工程师所使用。问题在于 n 值是一个概括经验确定的数值，而且它的数值与单位无关，在英制和米制中都使用同样的 n 值（详见第 9 章明槽水流运动），但如果它具有 $L^{\frac{1}{6}}$ 的量纲，则在英制和米制两种不同单位制的选择中，n 值应有差别，即

$$\frac{\text{英制}\ n}{\text{米制}\ n}=3.28^{\frac{1}{6}}=1.22$$

二者之比为 1.22 倍。因此使 n 具有 $L^{\frac{1}{6}}$ 的量纲是不完美的。另外曼宁公式中的系数 a 如果具有 $L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ 的量纲，则在英制单位中的系数 a 应为米制单位中 a 的 $3.28^{\frac{1}{2}}=1.811$ 倍，即在米制单位中 $a=1$，英制单位中应为 1.811。但实际上作为经验公式，英制中系数 a 为 1.486 已如前所述。可见 a 的量纲采用 $L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ 也是有矛盾的。总之，对于一些经验公式而言，由于某些经验公式的量纲是不和谐的，这时只能按公式要求的单位制去运算，这种作法在实践中是勉强可行的，但不能追求其量纲的和谐性，而且不能说这些经验公式由于其量纲不和谐就是完全不正确的。当然，随着人类科学技术水平的不断提高，对客观事物规律性的认识在不断深入，这

种纯粹经验性的公式正在逐渐减少。

4.3 π 定理

对于一些考虑因素比较简单的物理问题可以直接用量纲和谐原理建立其方程式。例如：研究一个坝顶溢流的问题，首先要确定过坝水流的流量与哪些物理量有关，通过分析可知这个流量 Q 与坝的长度 l、堰上水头 H、重力加速度 g 及水的密度 ρ 有关，如图 4-1 所示。与流量 Q 有关的影响因素可列成如下函数关系式：

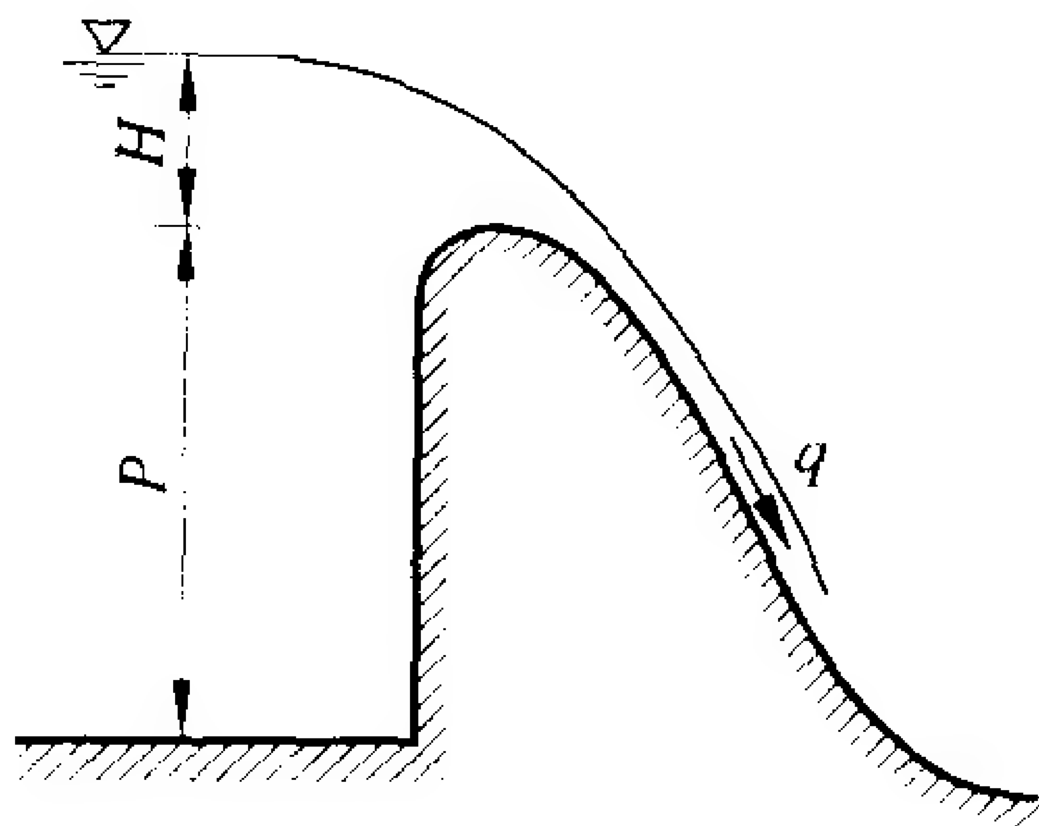


图 4-1 过坝水流[3]

$$\boldsymbol{q}=\frac{Q}{l}=f(H,g,\rho)$$

式中：$\boldsymbol{q}$ 表示坝顶单位长度上的流量，常称单宽流量。

将上式写为指数乘积形式为

$$\boldsymbol{q}=CH^{a_1}g^{a_2}\rho^{a_3}$$

根据量纲和谐原理求解指数，即

$$\mathrm{L^2T^{-1}=L^{a_1}(LT^{-2})^{a_2}(ML^{-3})^{a_3}}$$

则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}: \quad 2=a_1+a_2-3a_3\\
&\mathrm{T}: \quad -1=-2a_2\\
&\mathrm{M}: \quad 0=a_3
\end{aligned}$$

求解以上联立方程式，得 3 个指数分别为

$$a_1=\frac{3}{2}\quad a_2=\frac{1}{2}\quad a_3=0$$

把上列 3 个指数值代入单宽流量的函数关系式，得

$$q = CH^{\frac{3}{2}} g^{1/2} = C\sqrt{g} H^{\frac{3}{2}} = m\sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

式中的 m 为无量纲系数，即为溢流堰流量系数，可由试验求得。

以上的量纲分析方法称为瑞利(Lord Rayleigh)法。当所分析问题中的影响因素大于 3 个，则指数多于由指数组成的联立方程式(3 个)时，这时不能得到一个惟一的方程式，因此还需要通过理论分析和试验方法寻求物理方程式。在量纲分析方法中更为普遍应用的是 π 定理(π theorem)。

如果一个物理现象可由 n 个物理量组成量纲和谐的方程式来表述，而选定的基本量纲为 m 个，上述寻求的那个物理方程式可以简化为由 $k=n-m$ 个无量纲量所组成的方程式，这些无量纲量用 π 来表示。

例如：在一个物理过程中共有 $n=5$ 个物理量，基本量纲选用 L、T、M 为 3 个，则 $k=n-m=5-3=2$，即应可组成两个无量纲量 π_1，π_2。这样的无量纲量应该是互相独立的，也就是说，在 k 个无量纲量中，没有一个是可以由其他的无量纲量导出的。而且 k 个无量纲量是完全的，指不包括在 k 个以内的无量纲量都可以由这 k 个无量纲量导出。

一般说来，用 π 定理建立物理方程式有以下 4 个步骤：

(1) 首先根据对物理过程的深入分析，明确影响物理过程的 n 个物理量。如果某一重要的物理量被忽略，则量纲分析会失败，不会得到正确的方程式。对于流体运动而言，这些影响物理过程的物理量包括：流体的物理特性如密度、粘度、重力特性(重力加速度)等；流体运动的动力学和运动学特征如作用力、速度，加速度等，以及流体运动边界的几何特性。在这些物理量中既有变量，又有常量均须考虑在内。

(2) 参考表 4-1 列出各物理量的量纲，选择其中 m 个作为基本量纲的代表，在流体力学中 m 一般为 3。这 3 个物理量的量纲应该是互相独立的，这 3 个物理量不能组合为一个无量纲量。如

用 x_1, x_2, x_3 表示 3 个物理量，其量纲为

$$[x_1] = L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1}$$

$$[x_2] = L^{\alpha_2} T^{\beta_2} M^{\gamma_2}$$

$$[x_3] = L^{\alpha_3} T^{\beta_3} M^{\gamma_3}$$

这三个物理量不能组合为无量纲量 π 的条件是

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4-2}$$

如果式(4-2)的行列式为零，则 x_1, x_2, x_3 三个物理量不是互相独立的。一般情况下，三个物理量可以选用一个几何学量、一个运动学量和一个动力学量(或与某种作用力相关的物性系数)。

(3) 对三个基本物理量以外的物理量，每次轮取一个，连同三个基本物理量组合成一个无量纲量 π_i，共可写出 $n-m=k$ 个 π 项。即

$$\pi_1 = x_4 \; x_1^{a_1} x_2^{b_1} x_3^{c_1}$$

$$\pi_2 = x_5 \; x_1^{a_2} x_2^{b_2} x_3^{c_2}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\pi_k = x_n \; x_1^{a_{n-3}} x_2^{b_{n-3}} x_3^{c_{n-3}}$$

式中：a_i, b_i, c_i 为各 π 项的待定指数，可根据量纲和谐原理定出，使 π_i 为无量纲量。

(4) 写出由 k 个无量纲量 π_i 所组成的物理方程式，即

$$F(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k) = 0$$

这样的方程式就是在“绝对意义”上描述客观物理过程的方程式，它不受单位制的影响。

下面以流体作用于淹没物体上面的作用力 F 为例，应用 π 定理建立其物理方程式。在这一物理问题中，有影响的物理量是：物体的长度 L、流体运动速度 V、流体密度 ρ 和流体粘度 μ。因此物理方程式可写为

$$F = f(L, V, \rho, \mu)$$

对于任意形状的淹没物体，只有通过试验才能得到明确的答案。

这里有 5 个物理量 F,L,V,ρ,μ，即 $n=5$。它们的量纲分别为

$$[F]=\mathrm{MLT^{-2}}$$
$$[L]=\mathrm{L}$$
$$[V]=\mathrm{LT^{-1}}$$
$$[\rho]=\mathrm{ML^{-3}}$$
$$[\mu]=\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$$

选择 L,T,M 为基本量纲，则在 5 个物理量中选取 3 个基本物理量。如果选择 L,V,ρ，则三个物理量的量纲包含了 L,T,M 三个基本量纲，L 为几何学量，V 为运动学量，ρ 为物性系数，符合前述选择基本物理量的要求。现检验其独立性：

$$[L]=\mathrm{L^1T^0M^0}$$
$$[V]=\mathrm{L^1T^{-1}M^0}$$
$$[\rho]=\mathrm{L^{-3}T^0M^1}$$

其指数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

可见这三个物理量在量纲上是互相独立的，不可能由它们组成无量纲量 π。

另外两个物理量可分别与它们组合成为无量纲 π 项。

即

$$\pi_1=FL^{a_1}V^{b_1}\rho^{c_1}$$
$$\pi_2=\mu L^{a_2}V^{b_2}\rho^{c_2}$$

由量纲和谐原理可以定出 $a_1=-2,b_1=-2,c_1=-1$ 和 $a_2=-1$，$b_2=-1,c_2=-1$。于是

$$\pi_1 = FL^{-2}V^{-2}\rho^{-1} = \frac{F}{L^2V^2\rho} = C_F$$

$$\pi_2 = \mu L^{-1}V^{-1}\rho^{-1} = \frac{\mu}{LV\rho} = \frac{\nu}{LV}$$

式中的 C_F 为作用力系数，为一无量纲量。定义 $Re=\frac{LV}{\nu}$，Re 为雷诺数，所以 π_2 代表了雷诺数 Re。有了两个 π 后，可以写出描述这一物理问题的方程式为

$$C_F = g(Re)$$

C_F 与 Re 的关系则须由试验确定。图 4-2 给出淹没圆柱体及球体上的流体阻力系数与 Re 关系曲线。图中作用力系数 C_F 以阻力系数 C_D 表示。

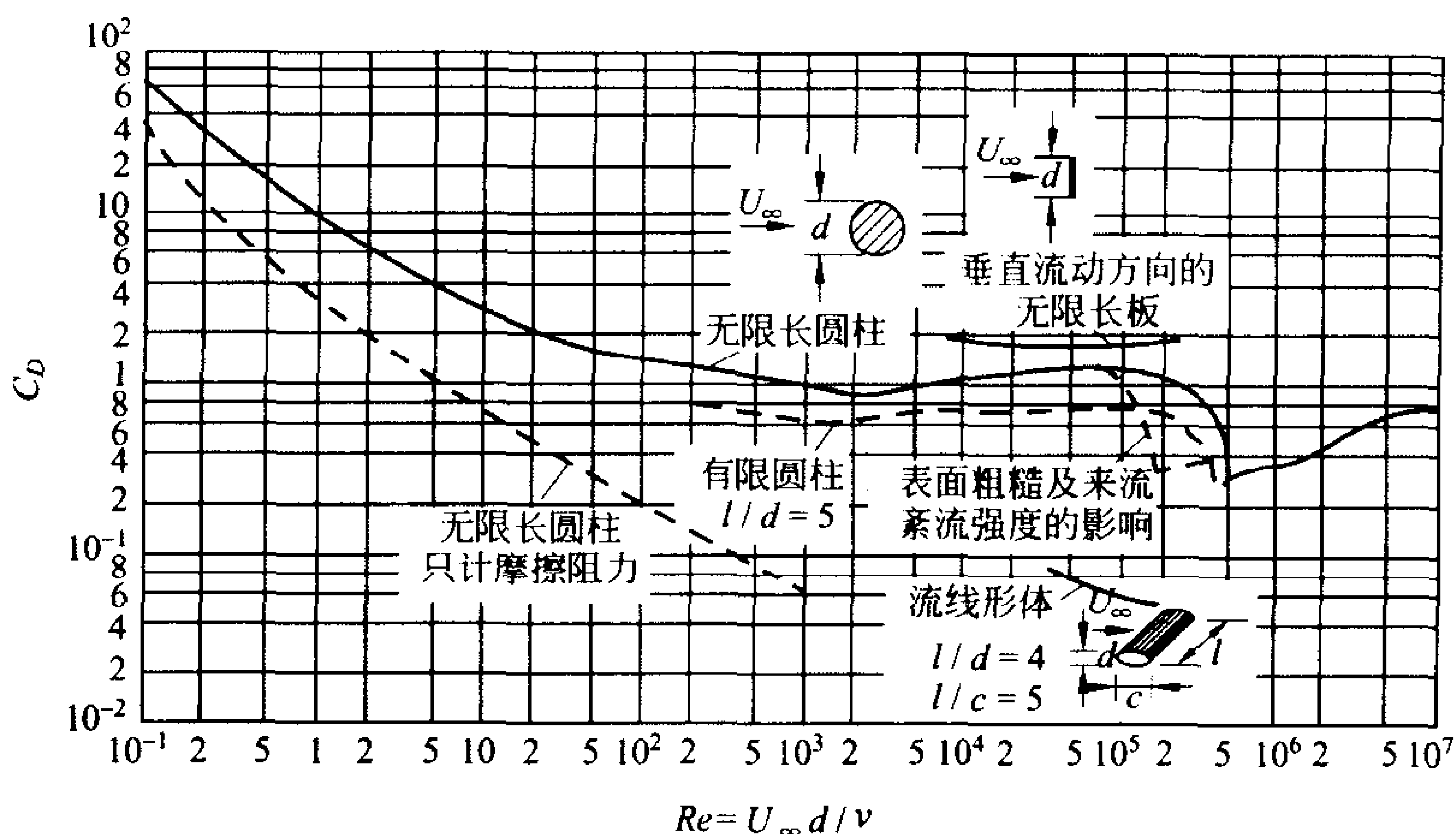


图 4-2 阻力系数与 Re 关系曲线①

① Massey B S. Mechanics of Fluids. 6th ed., Van Nostrand Reinhold(International), 1989

$$C_D=\begin{cases}\dfrac{阻力\ D}{\dfrac{1}{2}\rho V^2 Ld} & 圆柱体\\[2ex] \dfrac{阻力\ D}{\dfrac{1}{2}\rho V^2\left(\dfrac{1}{4}\pi d^2\right)} & 球体\end{cases}$$

式中增加了一个$\frac{1}{2}$，以使公式为通用形式而并未改变 C_D 的无量纲性质。C_F 中的 L^2 表示一个面积，一般均采用迎流面积，即从上游面向物体所看到的投影面积，对圆柱体为柱的长度 L 乘以柱的直径 d 的矩形，对圆球体则为$\frac{1}{4}\pi d^2$ 的圆，d 为球体直径。

4.4 流动相似与相似理论

试验研究是流体力学研究方法中重要的一种，而流体运动的实际问题在工程建造实施以前，常常需要通过比原型尺度小很多的模型中流动情况的试验研究来明确其合理性。这就要求模型中演示的流体运动与原型流动相似。如何才能做到模型与原型的相似，模型试验中的结果如何推论到原型中去，这都需要用相似理论来解决。

最早使用模型相似理论进行研究的当属伽利略[①]，伽利略用模型相似方法研究了结构强度问题。在水流运动中使用模型相似方法可以认为 1759 年斯密顿(Smeaton J.)在研究水轮时就开始了。19 世纪中叶弗劳德(William Froude，1810—1879)第一次在船池(towing tank)中进行了船舶模型试验。

---

① Rouse H and Macagno E O. On the use of models in fluid research Proceeding of the 1st International Conference on Hemorheology. 1968

4.4.1 流动相似

物理现象，包括流体运动问题的相似是几何相似的推广。例如：两个三角形的相似是指各对应线段成同一比例而各对应角彼此相等，把这种几何相似的概念加以推广，两个物理现象中的时间相似即表示在这两个物理现象中各相应的时段均成一定的比例关系，即

$$\frac{\tau_1''}{\tau_1'}=\frac{\tau_2''}{\tau_2'}=\cdots=\frac{\tau_n''}{\tau_n'}=\lambda_\tau$$

式中：上标"″"和"′"分别表示为两个时间相似的流动现象；λ 则表示比例常数。又如速度相似是指两个流动现象中，各对应点在对应的时刻其速度大小互成比例而速度的方向相同，如图 4-3 所示，在两个相似的圆管流动中有

$$\frac{u_1''}{u_1'}=\frac{u_2''}{u_2'}=\cdots=\frac{u_n''}{u_n'}=\lambda_u$$

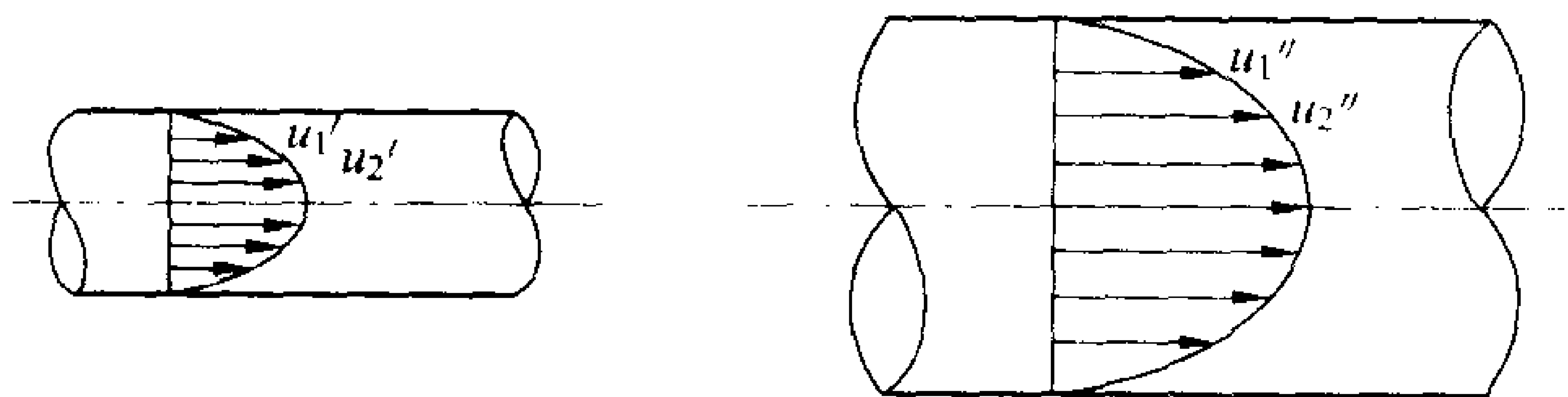


图 4-3 流速场相似

力的作用的相似是表示在流动中，各相应点处各种不同性质的作用力均需按一定的比例，例如：

$$\frac{F_1''}{F_1'}=\frac{F_2''}{F_2'}=\cdots=\frac{F_n''}{F_n'}=\lambda_F$$

$$\frac{p_1''}{p_1'}=\frac{p_2''}{p_2'}=\cdots=\frac{p_n''}{p_n'}=\lambda_p$$

此外还有两个相似流动中，流体的各种物性的相似，如密度相似，粘度相似等，它们比例关系为

$$\frac{\rho''}{\rho'}=\lambda_\rho,\quad \frac{\mu''}{\mu'}=\lambda_\mu$$

以上式子中，λ 均表示比例常数，通常称为“比尺”。

总之，在两个流动的相应点上所有表征流动状况的相应物理量都维持各自的固定比例关系，则这两个流动就是相似的。流动中的各种物理量可以分为 3 种类型，即表征流场几何形状的，表征流动状态的以及表征流体中作用力的物理量，因此两个流动相似必然是几何相似，运动相似和动力相似的。

1. 几何相似

几何相似是指两个流场的几何形状相似。要求两个流场中所有相应长度都维持一定的比例关系，相应的角度均相等。其长度的比例关系为

$$\frac{l''}{l'}=\lambda_l \tag{4-3}$$

式中：l'代表第一个流动中的某一部分的长度；l''代表第二个流动中某一部分的长度；λ_l 则为长度比尺(length scale)。

几何相似的流动中，相应的面积 A 和体积 V 也都维持一定的比例关系，即

$$\lambda_A=\frac{A''}{A'}=\lambda_l^2 \tag{4-4}$$

$$\lambda_V=\frac{V''}{V'}=\lambda_l^3 \tag{4-5}$$

可见几何相似是通过长度比尺 λ_l 来表示的，只要在两个流动中所有长度均维持相同的长度比尺 λ_l，就保证了两个流动的几何相似。

2. 运动相似

运动相似是指两个流动中相应空间点处在相应时刻具有相似

的速度和加速度(欧拉观点)。或者从拉格朗日的观点出发,两个流动中相应的流体质点在相应的时刻进行方向相同,大小成一定比例的位移。运动相似的要求

$$\frac{u''}{u'}=\lambda_u=\frac{\lambda_l}{\lambda_t} \tag{4-6}$$

式中:λ_u 为速度比尺(velocity scale);λ_t 为时间比尺(time scale)。

由式(4-6)可见运动相似只是增加了一个时间比尺。加速度比尺 λ_a 为

$$\frac{a''}{a'}=\lambda_a=\frac{\lambda_l}{\lambda_t^2} \tag{4-7}$$

3. 动力相似

动力相似是指作用于两个流场中相应点处的各种作用力均互相平行且维持一定的比例关系,即

$$\frac{F''}{F'}=\lambda_F \tag{4-8}$$

式中:λ_F 为作用力比尺(force scale)。

上述三种相似在维持两个流动的相似中其实并不处于同样的地位。流体的运动和发展根本的原因在于流体中的作用力,而这些作用力往往是由流体的某种物性所导致的。例如:由于流体有质量(可以用密度 ρ 来代表),在地心引力作用下而有重力;由于流体有粘性而导致流动中的内摩擦力和阻力。因此作用力的相似是具有决定意义的,是两个流动相似的根本方面。如果说一切事物的运动和发展,内因是依据而外因是条件,那么作用力的相似表示流体运动中"内因"的相似。而两个流场的几何相似恰恰表明"外因"的相似,即流体在各种力的作用下发生运动和变化的外部条件(流体运动演变的"舞台")的相似。当然这个"外因"的相似不仅需要流场中流动边界的几何相似,而且需要流场边界上的流动条件的相似,固体边界应对应固体边界,流体边界则需要边界上的流

速、压强的相似等等。而运动相似则是流动相似的结果。只要保证了作用力相似和几何相似，两个流动就会有相似的流速分布、加速度分布和压强分布等。压力在某些情况下可以作为一种改变流动状态的力存在，如某些流动边界加在流体上的压力像造波板加在流体上的压力。这时压力是流体发生运动的原因，压力的相似是一种作用力的相似，但是在更普遍的情况下压力相似是流体运动相似的一部分。流速场、压强场都是在相似的“内因”和“外因”情况下产生流体运动的一种结果。因为压强场可以通过伯努利方程从流速场得到。

只有在动力相似和几何相似的条件下才会得到运动相似，而运动相似恰恰反映了动力和几何相似的结果。

4.4.2 相似条件

上节中已经指出，两个相似的流动现象的各个物理量在相应点和相应时刻均各自互成比例。这些比例常数并不是可以任意取定的，也就是说对于每一种物理现象，因果之间均有一定的规律性，而这一规律性在数学上往往可由一组微分方程式表述。因此可以说相似的流动现象必由同样的数学方程式所描述。“由同样的数学方程式来描述”是流动相似的必要条件，但还不是充分条件。因为数学方程式描述的是流动现象的共有的和普遍的关系。例如：流体力学中最基本的方程式，即连续方程(1-17)和纳维-斯托克斯方程(2-40)既描述了管道中的流动，也描述了明槽中的流动，它所描述的流动在任何边界条件下都是可能的，因此为了得到某一具体流动问题的解答，也就是这些普遍方程式的特定解，就必须在基本方程组以外规定一系列的单值条件，从而才能描述某一特定的流动现象。

单值条件包括边界条件、起始条件和物性条件。

1. 边界条件

所有的流动都发生在具有一定几何形状的空间里，而这一空间是由边界条件所规定的。因此边界条件应是单值条件。相似的流动都发生在边界条件相似的空间里。边界条件不仅包括了边界的几何形状及尺寸，还包括边界上的流动条件。例如边界是固体壁面时，应有无滑移条件及无穿透条件。与其他流体接触面则应规定其流动条件，包括接触面上流速与压强的分布，有时还需要明确接触面上的温度及某些物质浓度的分布等。

2. 起始条件

任何流动现象都有发生与发展的过程，而这个过程与其起始条件密切相关。起始条件指的是在所研究流动起始时刻的运动状态，例如流速、温度、压强、浓度等在整个流场内的分布情况。不同的起始条件规定着流动的发展情况不同，所以它同样是单值条件。在恒定流动中由于一切流动现象都不随时间改变，因此不存在起始条件。

3. 物性条件

各种流动现象都是由具有一定物理性质的介质来参与的。不同物性的流动介质会演示出不同的流动现象，因此物性条件是单值条件之一。物性条件包括流动介质的密度 ρ、粘度 μ、压缩性等。

上节中已说明压强是可以通过伯努利方程由流速场得到的，因此在单值条件中它不是独立的。

相似现象由同一组数学方程式所描述，这些方程式应是量纲和谐的，不随选取的单位制而改变。根据描述运动的方程式可以找到不同相似比例常数之间的关系。在机械力学中描述力与运动之间关系的基本方程式是牛顿第二定律。即

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{a}$$

设有两个物体其质量分别为 m' 和 m''，分别在外力 F' 及 F'' 的作用

下发生互相相似的运动。一物体的速度为$\boldsymbol{v}'$而另一物体的速度为$\boldsymbol{v}''$。在一物体的运动中时间为t'而另一物体运动中时间为t''。按牛顿第二定律两物体的力与运动的关系式分别为

$$\boldsymbol{F}'=m'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'} \tag{b}$$

$$\boldsymbol{F}''=m''\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}''}{\mathrm{d}t''} \tag{c}$$

因两运动相似，相应物理量各成比例，即

$$\frac{\boldsymbol{F}''}{\boldsymbol{F}'}=\lambda_F \tag{d}$$

$$\frac{m''}{m'}=\lambda_m \tag{e}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}''}{\boldsymbol{v}'}=\lambda_v \tag{f}$$

$$\frac{t''}{t'}=\lambda_t \tag{g}$$

将这些关系式代入式(c)中，得

$$\lambda_F\boldsymbol{F}'=\lambda_m m'\frac{\lambda_v\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\lambda_t\mathrm{d}t'}$$

或

$$\frac{\lambda_F\lambda_t}{\lambda_m\lambda_v}\boldsymbol{F}'=m'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'} \tag{h}$$

把式(h)与式(b)对比，可得

$$\frac{\lambda_F\lambda_t}{\lambda_m\lambda_v}=1 \tag{i}$$

上式表明在相似现象中各种物理量比例常数之间应遵循的一定关系式，其值为1，称为相似指标。把两个运动的比例关系即式(d)、(e)、(f)、(g)代入(i)式，则

$$\frac{\dfrac{\boldsymbol{F}''}{\boldsymbol{F}'}\ \dfrac{t''}{t'}}{\dfrac{m''}{m'}\ \dfrac{\boldsymbol{v}''}{\boldsymbol{v}'}}=1$$

于是可得

$$\frac{\boldsymbol{F}''t''}{m''\boldsymbol{v}''}=\frac{\boldsymbol{F}'t'}{m'\boldsymbol{v}'}$$

或

$$\frac{\boldsymbol{F}t}{m\boldsymbol{v}}=\text{idem} \tag{4-9}$$

$\frac{\boldsymbol{F}t}{m\boldsymbol{v}}$称为物体运动的相似准数(similarity parameter),在两个相似运动中相似准数为同量(idem),即其数值相等。为纪念牛顿,$\frac{\boldsymbol{F}t}{m\boldsymbol{v}}$称为牛顿数(Newton number),以 Ne 表示。

由于

$$\lambda_m=\lambda_\rho\lambda_l^3,\quad \lambda_t=\frac{\lambda_l}{\lambda_v}$$

所以

$$\frac{\lambda_F\lambda_t}{\lambda_m\lambda_v}=\frac{\lambda_F\lambda_l/\lambda_v}{\lambda_\rho\lambda_l^3\lambda_v}=\frac{\lambda_F}{\lambda_\rho\lambda_l^2\lambda_v^2}$$

从而得到牛顿数的另一更为通用的表示形式,即

$$Ne=\frac{\boldsymbol{F}}{\rho l^2\boldsymbol{v}^2}=\text{idem} \tag{4-10}$$

式中:l 为某长度的尺度;$\boldsymbol{F}$ 为作用力;$\rho l^2\boldsymbol{v}^2$ 表示物体的惯性力,惯性力是维持物体原有运动状态的。

流体运动的变化与发展就是各种物理作用力为一方与惯性力为另一方的相互作用的结果。牛顿数的分母写为 $\rho l^2\boldsymbol{v}^2$ 的形式表示单位时间内的动量变化率。牛顿数在两个相似的运动中同量既表示两个运动的动力相似,也表示在两个运动中力与运动,即运动的"因"与"果"的关系遵从同一方程式。

综上所述,要使两个流动相似,其条件如下:

（1）两个流动应属同一类现象，并被同一组数学方程式所描述。由数学方程式导出的相似准数同量。

（2）两个流动的单值条件相似。由单值条件中有关物理量组成的相似准数同量。

这就是相似理论的主要内容，它是由基尔比契夫在1953年提出的[①]。符合这样条件的两个流动为相似流动，其中各个物理量均有一定的比例关系。相似条件(1)中强调了同一类现象，这是因为自然界中由相同的方程式所表述的并不一定是同一类物理现象。例如：势流流动中，流速势 φ 满足拉普拉斯方程(1-60)，即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}=0 \qquad (1\text{-}60)$$

而导体中的电势场也同样由拉普拉斯方程来描述，即

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial x_3^2}=0$$

式中的 E 为电位势。势流和电流是完全不同的物理现象，流速势 φ 也不可能与电位势 E 有任何比例关系，谈不到相似。但是有时在流体力学研究中也利用电势场这一特性，通过电势场的试验以求解决流体的势流运动问题，这种方法称为“比拟”(analogy)。因此比拟是指异类现象的相似，而一般的模型试验则是同类现象的相似。

从数学角度考虑，相似条件中，数学方程相同与单值条件相似已经保证了两个流动的相似。相似准数在两个流动中同量是实现上述相似条件的具体途径。由相似准数导出的各种物理量比尺之间的关系是模型试验中保证流动相似的准则。进行模型试验时，选定几何比尺，保证单值条件——起始条件、边界条件、物性条件的相似；按照相似准则中其他比尺与几何比尺的关系设计模型，即

① Кирпичев М. В. Теория Подобия, 1953

可保证模型中流动与原型的相似。

4.5 相似理论的应用

4.5.1 流体运动中的相似准数

在明确了什么是“相似”和怎样才能保证“相似”，即相似条件后，本节将应用相似理论研究流体运动的问题。流体运动相似的研究是从流体力学的基本方程、连续方程(1-17)和纳维-斯托克斯方程(2-40)出发，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \tag{1-17}$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho \boldsymbol{f}-\nabla p+\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{2-40}$$

把式(2-40)写为分量形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\\
&=\rho f_1-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right)\\
&\rho\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\\
&=\rho f_2-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right)\\
&\rho\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}+u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\\
&=\rho f_3-\frac{\partial p}{\partial x_3}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-11}$$

现有两个相似流动，上式对两个流动都适用。设两个相似流动的比例常数，即各种比尺为

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{流速比尺：} && \lambda_u=\frac{u_1''}{u_1'}=\frac{u_2''}{u_2'}=\frac{u_3''}{u_3'}=\frac{v''}{v'}\\
&\text{压强比尺：} && \lambda_p=\frac{p''}{p'}\\
&\text{密度比尺：} && \lambda_\rho=\frac{\rho''}{\rho'}\\
&\text{粘度比尺：} && \lambda_\mu=\frac{\mu''}{\mu'}\\
&\text{质量力比尺：} && \lambda_f=\frac{f_1''}{f_1'}=\frac{f_2''}{f_2'}=\frac{f_3''}{f_3'}\\
&\text{长度比尺：} && \lambda_l=\frac{l''}{l'}=\frac{x_1''}{x_1'}=\frac{x_2''}{x_2'}=\frac{x_3''}{x_3'}\\
&\text{时间比尺：} && \lambda_t=\frac{t''}{t'}
\end{aligned}\right\} \tag{4-12}
$$

对于第一个流动（右上角以$'$表示），式（1-17）及式（2-40）写为

$$\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'}+\frac{\partial u_2'}{\partial x_2'}+\frac{\partial u_3'}{\partial x_3'}=0 \tag{a}$$

$$\begin{aligned}&\rho'\left(\frac{\partial u_1'}{\partial t'}+u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'}+u_2'\frac{\partial u_1'}{\partial x_2'}+u_3'\frac{\partial u_1'}{\partial x_3'}\right)\\&=\rho f_1'-\frac{\partial \rho'}{\partial x_1'}+\mu'\left(\frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_2'^2}+\frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_3'^2}\right)\end{aligned} \tag{b}$$

$$\vdots$$

对于第二个流动（右上角以$''$表示），式（1-17）与式（2-40）写为

$$\frac{\partial u_1''}{\partial x_1''}+\frac{\partial u_2''}{\partial x_2''}+\frac{\partial u_3''}{\partial x_3''}=0 \tag{c}$$

$$\begin{aligned}&\rho''\left(\frac{\partial u_1''}{\partial t''}+u_1''\frac{\partial u_1''}{\partial x_1''}+u_2''\frac{\partial u_1''}{\partial x_2''}+u_3''\frac{\partial u_1''}{\partial x_3''}\right)\\&=\rho'' f_1''-\frac{\partial p''}{\partial x_1''}+\mu''\left(\frac{\partial^2 u_1''}{\partial x_1''^2}+\frac{\partial^2 u_1''}{\partial x_2''^2}+\frac{\partial^2 u_1''}{\partial x_3''^2}\right)\end{aligned} \tag{d}$$

$$\vdots$$

由前述的比尺关系，第二个流动的方程式可进一步改写为

$$\frac{\lambda_u}{\lambda_l}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1}+\frac{\partial u'_2}{\partial x'_2}+\frac{\partial u'_3}{\partial x'_3}\right)=0 \tag{e}$$

$$\frac{\lambda_\rho\lambda_u}{\lambda_t}\rho'\frac{\partial u'_1}{\partial t'}+\frac{\lambda_\rho\lambda_u^2}{\lambda_l}\rho'\left(u'_1\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1}+u'_2\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2}+u'_3\frac{\partial u'_1}{\partial x'_3}\right)$$

$$=\lambda_\rho\lambda_f\rho' f'_1-\frac{\lambda_p}{\lambda_l}\frac{\partial p'}{\partial x'_1}+\frac{\lambda_\mu\lambda_u}{\lambda_l^2}\mu'\left(\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'^2_1}+\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'^2_2}+\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'^2_3}\right) \tag{f}$$

$$\vdots$$

由式(e)与式(a)相比较，可知

$\frac{\lambda_u}{\lambda_l}$可以取任意数值，不受任何限制，也就是说连续方程并未对$\frac{\lambda_u}{\lambda_l}$提出任何要求。

对比式(f)与式(b)可得

$$\frac{\lambda_\rho\lambda_u}{\lambda_t}=\frac{\lambda_\rho\lambda_u^2}{\lambda_l}=\lambda_\rho\lambda_f=\frac{\lambda_p}{\lambda_l}=\frac{\lambda_\mu\lambda_u}{\lambda_l^2} \tag{4-13}$$

由 2.4 节已知 $\boldsymbol{f}=\nabla G$。当质量力只有重力，x_3 为铅垂向上的坐标为正，则力势函数 $G=-gx_3$，于是 $\boldsymbol{f}=\nabla G=-g\ \nabla x_3=-g\boldsymbol{e}_3$，$f_1=0$，$f_2=0$，$f_3=-g$。从而 $\lambda_f=\lambda_g$。以$\frac{\lambda_\rho\lambda_u^2}{\lambda_l}$除式(4-13)各项，得

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_t\lambda_u}=1=\frac{\lambda_g\lambda_l}{\lambda_u^2}=\frac{\lambda_p}{\lambda_\rho\lambda_u^2}=\frac{\lambda_\mu}{\lambda_\rho\lambda_u\lambda_l} \tag{4-14}$$

式(4-14)为由纳维-斯托克斯方程得到的两个相似流动的各种相似比尺之间的关系，其值为相似指标。由式(4-14)可见这种相似指标共有 4 个，这 4 个相似指标说明两个相似的流动可用同一物理方程式表述的条件。4 个相似指标共包含了 7 个相似比尺，7 个相似比尺中有 3 个相似比尺是可以任选的，而其余的 4 个相似比尺必须由这 4 个相似指标得出。

将式(4-12)的比例关系代入式(4-14)的相似指标中，即可得到两个运动的相似准数，即

$$\frac{\frac{l''}{l'}}{\frac{t''}{t'}\cdot\frac{u''}{u'}}=1 \quad 或 \quad \frac{l''}{t''u''}=\frac{l'}{t'u'} \quad 或 \quad \frac{l}{tu}=\text{idem} \qquad (4\text{-}15)$$

$$\frac{\frac{g''}{g'}\cdot\frac{l''}{l'}}{\frac{u''^2}{u'^2}}=1$$

或

$$\frac{g''l''}{u''^2}=\frac{g'l'}{u'^2}, \quad 或 \quad \frac{gl}{u^2}=\text{idem} \qquad (4\text{-}16)$$

$$\frac{\frac{p''}{p'}}{\frac{\rho''}{\rho'}\cdot\frac{u''^2}{u'^2}}=1 \quad 或 \quad \frac{p''}{\rho''u''^2}=\frac{p'}{\rho'u'^2} \quad 或 \quad \frac{p}{\rho u^2}=\text{idem} \qquad (4\text{-}17)$$

$$\frac{\frac{\mu''}{\mu'}}{\frac{\rho''}{\rho'}\cdot\frac{u''}{u'}\cdot\frac{l''}{l'}}=1$$

或

$$\frac{\mu''}{\rho''u''l''}=\frac{\mu'}{\rho'u'l'} \quad 或 \quad \frac{\mu}{\rho ul}=\text{idem} \qquad (4\text{-}18)$$

在以上四个相似准数中，式(4-15)所表示的相似准数习惯上常常写成$\frac{l}{vt}$，称为斯特劳哈尔数(Strouhal number)。式中的 v 为相应的流体运动中特征断面的断面平均流速。用 St 代表斯特劳哈尔数，则

$$St=\frac{l}{vt}=\text{idem} \qquad (4\text{-}19)$$

它是由纳维-斯托克斯方程中迁移加速度项 $\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$除当地加速度项 $\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}$而得到的，所以斯特劳哈尔数是当地非恒定性惯性作用与迁移惯性作用之比。在恒定流动中 St 不存在。如果考虑具有频

率(frequency)f 的流动，则 St 数还可表示为

$$St=\frac{fl}{v} \tag{4-19'}$$

非恒定流动有两种情况：一种情况下 St 是相似准数，例如，管道阀门的开启过程中，管道中为非恒定流动，阀门开启对管道水流是一种边界条件，是使流动相似的必要条件；另一种情况则 St 不是"定性准数"而是一种"待定准数"，例如，圆柱体尾流中形成的旋涡，是一种非恒定现象，但这个非恒定性是流体运动的"结果"，而不是造成非恒定流动的"原因"，这种相似准数是流动相似的结果的一种表示方法。

式(4-16)所表示的相似准数习惯上常常写为 $\frac{v^2}{gl}$ 或 $\frac{v}{\sqrt{gl}}$，称为弗劳德数(Froude number)，以 Fr 表示，即

$$Fr=\frac{v}{\sqrt{gl}}=\text{idem} \tag{4-20}$$

它是由纳维-斯托克斯方程中重力作用项除以迁移惯性项得到的。下面从力的角度分析 Fr 的意义，重力可用 ρgl^3 代表，而惯性力以 $ma\propto\rho l^3 l/t^2\propto\rho l^2v^2$ 表示，所以重力与惯性力之比为 $\frac{\rho gl^3}{\rho l^2v^2}=\frac{gl}{v^2}$，也就是牛顿数中 F 以重力表示所得的结果，可见弗劳德数表示惯性力与重力之比。

式(4-17)所表示的相似准数为欧拉数(Euler number)，以 Eu 表示，即

$$Eu=\frac{\Delta p}{\rho v^2}=\text{idem} \tag{4-21}$$

式中的压强常用压强差表示。若牛顿数中的 F 用压强差 Δp 乘以作用面积 l^2 来表示，则 $Ne=\frac{F}{\rho l^2v^2}=\frac{\Delta pl^2}{\rho l^2v^2}=\frac{\Delta p}{\rho v^2}=Eu$，可见欧拉数

就是表示压力与惯性力之比。正像在 4.4.1 节中所讨论的压力对流体运动而言，在某些情形下可以是作为一种改变流体运动状态的作用力，这时欧拉数像弗劳德数一样是一种相似准数，它是流动相似的条件。而在某些情况下压强是由伯努利方程通过已知流速场导出的，这时它是运动的“结果”，欧拉数虽然还称之为相似准数，但它已不是流动相似的条件而是流动相似的结果。可见相似准数可以分为两类：前者称为“定性准数”；后者称为“待定准数”。两个流动相似的条件中要求相似准数相等是要求“定性准数”的相等。

式(4-18)所表示的相似准数习惯上常写为 $\frac{\rho v l}{\mu}$，称为雷诺数，以 Re 表示，即

$$Re=\frac{\rho v l}{\mu}=\frac{v l}{\nu}=\text{idem} \tag{4-22}$$

是由纳维-斯托克斯方程中表示粘性力的项与表示迁移惯性的项二者的比例得出。也可从牛顿数中导出，令 $F=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_2}A\propto\mu\frac{v}{l}l^2$

则 $Ne=\frac{F}{\rho l^2 v^2}=\frac{\mu v l}{\rho l^2 v^2}=\frac{\mu}{\rho l v}=\frac{\nu}{v l}$，可见雷诺数表示惯性力与粘性力之比。雷诺数可以衡量流体运动中粘性力的作用。雷诺数小表示粘性力作用大；雷诺数大则表示粘性力的作用小。在粘性流体力学中可以深入地了解到当雷诺数不同时，流动可以根据雷诺数而分成两种型态，即层流(laminar flow)与紊流(turbulent flow)。这两种不同的流动型态，其流动规律有很多不同。

除上述由纳维-斯托克斯方程新导出的四个相似准数 St、Fr、Eu、Re 以外，有些流体中的作用力并未包含在纳维-斯托克斯方程中，可以通过牛顿数同量的关系导出其相应的相似准数。

首先考虑弹性力，弹性力可由 El^2 所表示，在式(0-7)$E=\frac{\mathrm{d}p}{\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}}$

中，因此 E 为流体的体积弹性模量从而可得表示惯性力与弹性力之比的柯西数(Cauchy number)Ca，即

$$Ca=\frac{\rho l^2 v^2}{El^2}=\frac{\rho v^2}{E}=\text{idem} \tag{4-23}$$

柯西数只是在研究流体压缩性起主要作用的流动过程中才有作用，如液体流动中的水击(water hammer)现象。声音在液体中的传播速度 a 由式(0-11)给出(液体中 $\gamma=1$)，即

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{4-24}$$

将式(4-24)代入式(4-23)得 $Ca=\frac{v^2}{a^2}=M^2$，柯西数 Ca 为马赫数 M 的平方。在空气动力学中当流速接近或超过音速时马赫数为一个相似准数。

对于表面张力，由于它可以用 σl 表示，σ 为表面张力系数。代表水流中惯性力与表面张力之比的韦伯数(Weber number) We，即

$$We=\frac{\rho v^2 l^2}{\sigma l}=\frac{\rho v^2 l}{\sigma}=\text{idem} \tag{4-25}$$

4.5.2 模型相似准则

在明确了由纳维-斯托克斯方程推导出的各种相似准数及其物理意义后，本节中将研究如何利用这些相似准数进行模型试验的设计。

在很多工程领域，在试验室中往往采用缩小了的(有的情况下是放大的)模型来研究原型的流动问题，这时首先要保证模型流动与原型流动的相似。

在进行模型试验设计时，首先要保证几何相似，即要求模型(model)和原型(prototype)的几何形状相似，一切长度均成固定的比例关系，即选定几何比尺 $\lambda_l(l_p/l_m)$。选定几何比尺在模型设

计中十分重要，λ_l 过大，模型过小，可能使得某些流动现象难以相似，λ_l 过小，模型过大则不经济，有时也为实验室条件所不允许。当然模型中的边界流动条件应保证与原型相似。原型中的固体壁面在模型中也要求为固体壁面，原型中为流动边界则模型中也应为流动边界等。

模型设计中另一重要问题则是选定相似准数，根据相似准数的要求明确各种比尺之间的关系。选定相似准数要分析流动现象中哪一种作用力起主要作用。下面将会看到如果不能挑选出一种主要作用力而要考虑两种作用力，则往往会造成由于两个相似准数所要求的各种比尺之间的关系不一致而造成难以克服的困难。下面分别给出按不同作用力的相似准数设计模型的准则。

1. 重力相似准则

重力是流体运动中一个主要的作用力，但在某些情况中，例如管道流动中重力的作用表现为管道中流体的压强。这时重力相似准数——弗劳德数将不是模型设计中的主要指数。凡是具有自由水面，而且自由水面可以变动或波动的各种流动，如明槽流动，波浪，各种明流水工建筑物上的流动都是重力起主要作用的流动，这时要求模型和原型中弗劳德数 Fr 相同，即为重力相似准则，也称为弗劳德相似准则。即

$$Fr_{\mathrm{m}}=Fr_{\mathrm{p}} \tag{4-26}$$

式中：下标 m 表示模型流动，下标 p 表示原型流动。从而要求保证对满足各种比尺之间的关系，即

$$\frac{\lambda_u}{\sqrt{\lambda_g\lambda_l}}=1$$

由于一般情况下原型与模型流动都是在地面上发生的，重力加速度相同，$\lambda_g=1$，所以

$$\lambda_u=\lambda_l^{\frac{1}{2}} \tag{4-27}$$

式(4-27)为重力相似中对流速比尺的要求。选定 λ_l 后，λ_u 也就确

定了，不能任意选择，以保证重力相似。同时流量比尺为

$$\lambda_Q=\lambda_A\lambda_u=\lambda_l^2\lambda_l^{\frac{1}{2}}=\lambda_l^{\frac{5}{2}} \tag{4-28}$$

时间比尺为

$$\lambda_t=\frac{\lambda_l}{\lambda_u}=\frac{\lambda_l}{\lambda_l^{\frac{1}{2}}}=\lambda_l^{\frac{1}{2}} \tag{4-29}$$

根据 λ_Q 可以确定在模型中放水的流量。

2. 粘性力相似准则

在管道、隧洞中的水流，无限域粘性流体中物体的运动等情况下，流动中主要作用力为粘性力，这时要求模型和原型中的雷诺数 Re 相同，即为粘性力相似准则，也称为雷诺相似准则，即

$$Re_{\mathrm{m}}=Re_{\mathrm{p}} \tag{4-30}$$

雷诺相似准则要求各种比尺之间有下述关系：

$$\frac{\lambda_u\lambda_l\lambda_\rho}{\lambda_\mu}=1$$

如果原型和模型中都是同一种流体，如水，而且水温也相同，则 $\mu_{\mathrm{m}}=\mu_{\mathrm{p}}$，$\lambda_\mu=1$；$\rho_{\mathrm{m}}=\rho_{\mathrm{p}}$，$\lambda_\rho=1$，于是

流速比尺为

$$\lambda_u=\lambda_l^{-1} \tag{4-31}$$

流量比尺为

$$\lambda_Q=\lambda_l^2\lambda_u=\lambda_l^2\lambda_l^{-1}=\lambda_l \tag{4-32}$$

时间比尺为

$$\lambda_t=\frac{\lambda_l}{\lambda_u}=\lambda_l^2 \tag{4-33}$$

用同样的方法，可以推导出弹性力（柯西）相似准则、表面张力（韦伯）相似准则、非恒定惯性力（斯特劳哈尔）相似准则、压力（欧拉）相似准则等各种相似准则中对各种比尺之间关系的要求，由于这几个准则的应用不如上述两种情况普遍，因此留待读者需要时自行推导。当流动中两种作用力都具有重要作用而不能忽略时，问

题会变得很复杂，要根据具体流动进行分析。同时满足两种相似准则的要求往往是很困难的，例如：满足重力相似准则时要求

$$\lambda_u=\lambda_l^{\frac{1}{2}} \tag{4-27}$$

满足粘性力相似准则时要求

$$\lambda_u=\lambda_l^{-1}$$

二者不可能同时满足，除非 $\lambda_l=1$ 或者 $\lambda_\mu/\lambda_\rho=\lambda_l^{\frac{3}{2}}$。而 $\lambda_l=1$ 表示模型与原型完全相等，失去了模型试验的意义。如果在模型中采用与原型中不同的流体，则当 *Fr* 数和 *Re* 数在模型与原型中均为同量时得到的相似指标的关系为

$$\frac{\lambda_u}{\sqrt{\lambda_g\lambda_l}}=\frac{\lambda_u\lambda_l\lambda_\rho}{\lambda_\mu}$$

$\lambda_g=1$，因为至少在目前还难以到别的星球去做试验。则

$$\lambda_\mu/\lambda_\rho=\lambda_\nu=\lambda_l\sqrt{\lambda_l}=\lambda_l^{\frac{3}{2}} \tag{4-28}$$

如果能找到一种流体，在模型中的运动粘性系数 ν_{m} 与原型中流体的运动粘性系数 ν_{p} 的比值为 $\lambda_l^{\frac{3}{2}}$，即

$$\nu_{\mathrm{m}}=\frac{\nu_{\mathrm{p}}}{\lambda_l^{\frac{3}{2}}} \tag{4-29}$$

则可以保证 *Fr* 相似准则和 *Re* 相似准则同时得到满足。不过这个要求在实用上也是难以做到的。

对于某些流动，如明槽或河流中的流动，由于具有自由水面，重力是必须考虑的因素，因而相似流动必须满足 *Fr* 相似准则的要求。又由于在河流或明槽中由水流粘性而产生的阻力在一个较长距离上其作用不容忽视，因此雷诺数同量的要求也需满足。但是幸而在阻力随 *Re* 数而变化的规律中，当 *Re* 数超过某一临界数值后，阻力不再与 *Re* 数有关而只决定于壁面的粗糙度。阻力的这一规律使我们对于在实际工程中极具重要意义的明槽水流的模型试验绝境逢生，得到广泛的应用。这时使模型水流与原型相似，

只要做到：

（1）几何与边界条件的相似，包括壁面粗糙相似；

（2）*Fr* 相似准则的要求得到满足；

（3）*Re* 数在原型和模型中均大于临界数值。

明槽流动阻力相似准则将在第九章中详述。

参考书目

[1] 惠迁甲，王桂仙。河工模型试验。北京：中国水利水电出版社，1999 年 10 月

[2] 南京水利科学研究院，水利水电科学研究院。水工模型试验。北京：水利水电出版社，1985 年 12 月

[3] Kobus H 主编。清华大学水利系泥沙研究室译。水力模拟。北京：清华大学出版社，1988 年 5 月

[4] Леви и и. Моделирование Гидравлических явлений. Госэнергоиздат，1960

[5] Yalin M Selein. Theory of Hydrawlic Models. MacMillian Press Ltd.，1971

第5章

有涡流动

在第一章中已经说明流体运动中流体微团由于其中各个流体质点之间的速度差别,它们在流动过程中不仅有平移运动还存在流体微团的变形和旋转。流体微团不存在绕其自身任何轴线的旋转运动时,这种流动为有势流动。反之,当流体微团具有旋转的流动为有涡流动或称有旋流动。有势流动和有涡流动二者在运动学上有本质的差别,因此处理的方法也迥异。

本章首先讨论有涡流动的基本定理和方程,深入分析在旋涡的产生、发展和消亡过程中流体的粘性、压强特性(正压或斜压流体)和质量力是否有势这三项重要因素的作用。并讨论流场中各种形状的涡所诱导的流速场。

5.1 有涡流动

在1.7节中已经根据流场中流体微团有无旋转将流动分为有势流动和有涡流动。应该注意的是流体微团的旋转和能由肉眼观察到的宏观上流体的旋转运动并不相同。宏观上旋转的流动只需要流体微团绕一公共的旋转轴转动,而流体微团本身并不一定旋转,因此这种宏观上旋转的流动并不一定是有涡流动。例如:水桶中的水从桶底中心小孔处流出时,桶中的水体常常以通过孔口

的铅垂轴为中心而作近似圆周运动，这时水体中各点的流速与该点处圆周半径成反比 $|\boldsymbol{u}|=\frac{k}{r}$，且与圆周相切，$k$ 为比例常数，如图 5-1(a)所示。此时的涡量 $\Omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=0$，可见此流动为有势流动，流体微团并没有转动。另有一盛水圆桶，圆桶绕本身的铅垂轴作等角速旋转，此时桶内各点流速与该处半径成正比 $|\boldsymbol{u}|=kr$，$\Omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=k$，$k\neq 0$。可见这种流动是有涡流动，在一个圆周轨迹上，流体微团随流动转动的过程中本身也在旋转，如图 5-1(b)所示。图 5-1(a)所示的流动一般称为自由涡或势涡；图 5-1(b)所示的流动称为强迫涡。反观一个简单的剪切流动，例如：两平行平板之间的流动，上面平板以 U 作直线等速运动而下面平板固定不动，如图 5-2(a)所示。由于流体的粘性形成流速的分布如图5-2(a)，$u_1=kx_2$，$u_2=0$，其涡量 $\Omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=-k$。可见虽然流体质点均作沿 x 轴方向的直线运动，从宏观上看不出流动有

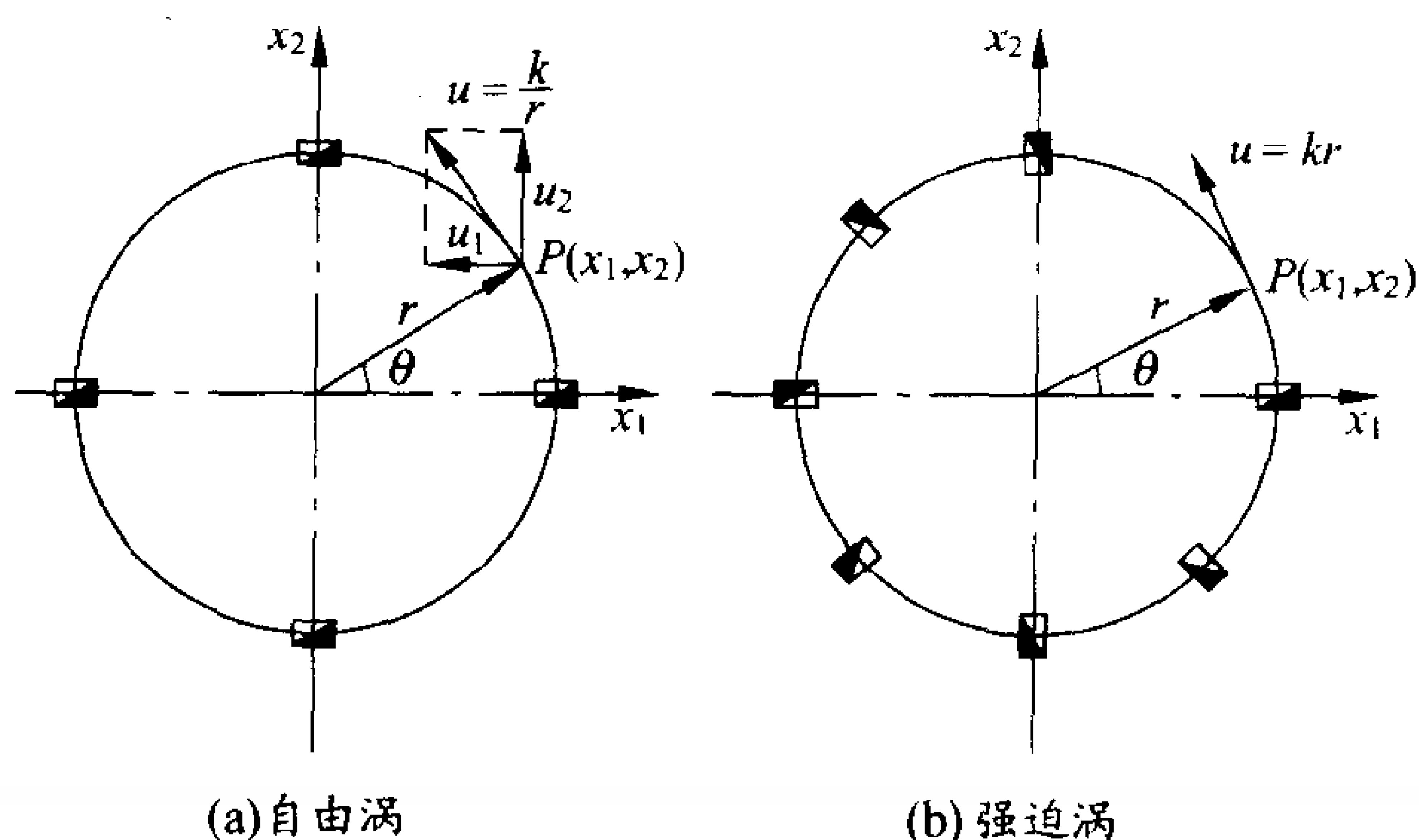


图 5-1　自由涡与强迫涡

旋转的情形，但在流体运动过程中每一个流体微团却都在绕其自身的某个轴作旋转运动，如图 5-2(b)所示。

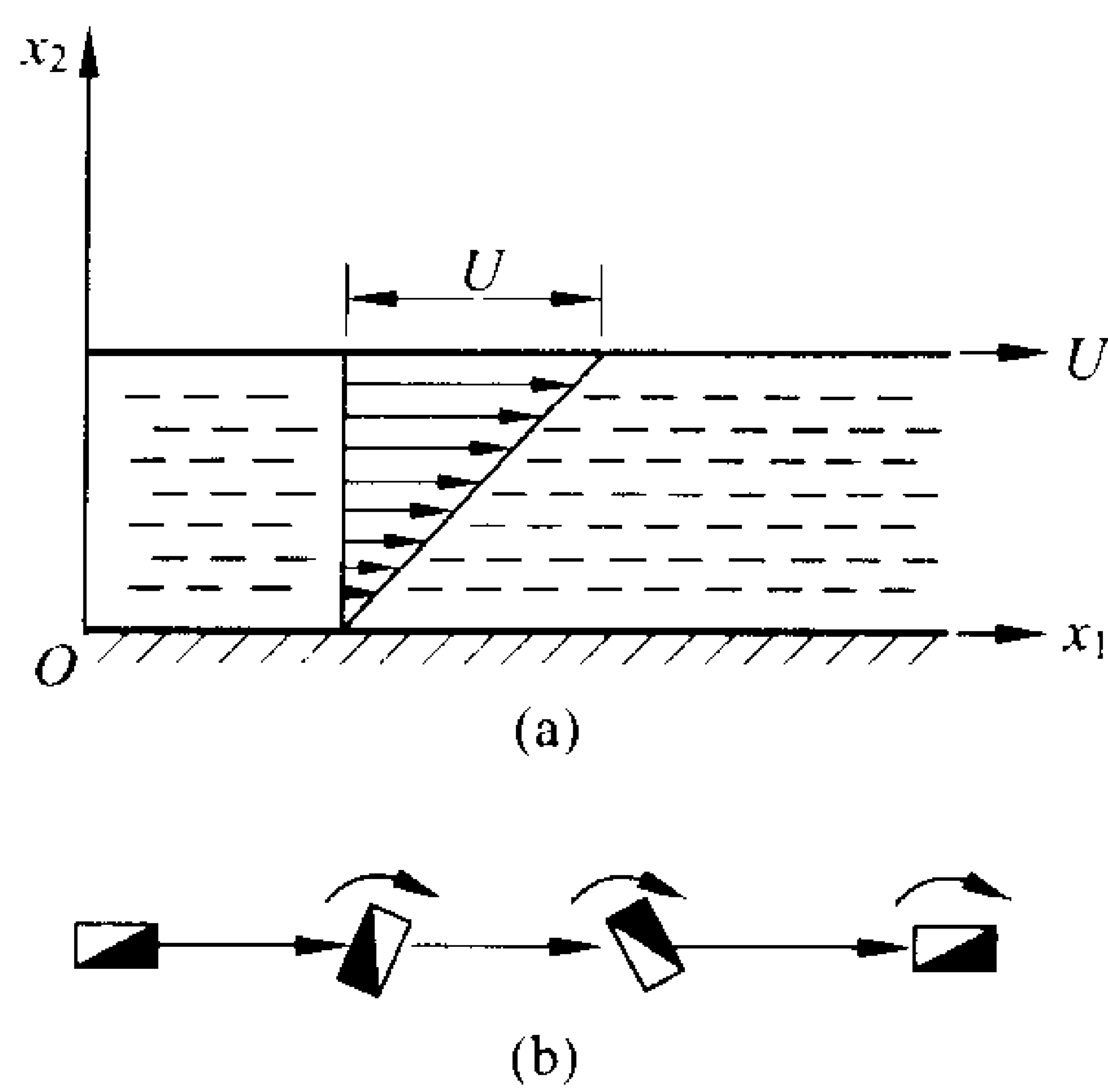


图 5-2 剪切流动

流体微团之所以有旋转运动，主要原因是切应力的存在，切应力则源于流体的粘性与流速的不均匀分布，即流速梯度的存在。例如：固体壁面附近的粘性流动，由于流体的粘性而在固体壁面存在无滑移条件，流体质点粘附于固体壁面随同壁面共同运动，从而在流场内部形成流速梯度，经过壁面附近一定厚度的流体层后，流体质点的速度才会与未受固体干扰的流场速度一致，这一个厚度的流体就是边界层。边界层中的流体运动总是存在流速梯度，因而边界层内的流场总是有涡流动。由此可见：固体壁面是产生旋涡的源泉。雷诺数的加大可以使边界层变薄，但是无论如何，在粘性流动的固体壁面附近，边界层不会消失。边界层以外的流动受固体边界的影响接近消失，如果原来是无涡流动，则保持为无涡流动，也就是有势流动，可以用第 6 章中的势流解法求解。

在理想流体的运动中不存在切应力，只有垂直于作用面的法向压应力，对于一个球形的流体微团来说，所有正压力均通过球心

而不会引起流体微团的旋转。因此在理想流动中旋涡不会产生也不会消失。原来有涡的流动将保持有涡，原来无涡的流动将保持无涡。理想流动可以是有势流动，也可以是有涡流动。具有粘性作用的实际流体的运动多是有涡流动，但在某些情况下，如大雷诺数情况下固体壁面附近边界层流动外面的流动可考虑按有势流动来处理。以后会看到有势流动由于流速势的存在而使流动问题的解决大大简化。下面 5.5 节中将要看到影响涡旋形成的因素中，除流体的粘性是一个最重要的因素外，还有流体正压和作用力有势的影响因素。

有涡流动中旋涡的扩散性和耗散性具有重要意义。由下面 5.2 节中的涡量方程可以看出，涡量像温度一样可以在流场中通过流体的粘性由涡量大的地方向涡量小的地方进行扩散，从而使涡量均匀化。旋涡的耗散性使得当流动产生旋涡后要损失一部分机械能量。例如：当飞机或船舶在行进中尾部所产生的旋涡消耗了部分功能，从而形成飞机或船舶航行时的阻力；水轮机、水泵等旋转机械在运行中也会由于旋涡而损失能量，降低了旋转机械的功率。

5.2 亥姆霍兹涡量方程

不可压缩流体运动的 N-S 方程式(2-40)为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho \boldsymbol{f}-\nabla p+\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{2-40}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2 \boldsymbol{u}$$

式中的速度迁移项$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$可以写为$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2}\right)-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}$(参考式(2-63))，因此 N-S 方程可以改写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2}\right)-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{5-1}$$

以∇叉乘式(5-1)，得

$$\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{u})}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})=\nabla\times\boldsymbol{f}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nu\nabla^2(\nabla\times\boldsymbol{u}) \tag{5-2}$$

式中：

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega})=(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+(\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Omega} \tag{5-3}$$

对于不可压缩流体，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 为连续方程，又由涡量连续方程(1-34)式知$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=0$，于是式(5-2)可写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}\\&=(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla\times\boldsymbol{f}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}\end{aligned} \tag{5-4}$$

式(5-4)为亥姆霍兹涡量方程(Helmholtz vorticity eguation)。

现在分析式(5-4)中各项的物理含义。等号的左侧两项为涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的物质导数，第一项$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}$为涡量的当地变化率，第二项为涡量的迁移变化率。等号的右侧为影响涡量变化率的各项，分别说明如下：

第一项$(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 表示涡量与流体微团变形的相互作用。$(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 在 x_1 方向的分量为 $\Omega_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\Omega_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\Omega_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$。按照图 5-3所示，把一个长度为无穷小 $\mathrm{d}x_i$ 的涡管当作所考虑的流体微团。图 5-3(a)表示 $\Omega_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$，是由于流体微团在 x_1 方向的线变形，使涡管伸长而导致 Ω_1 发生变化。图 5-3(b)表示 $\Omega_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$，是由于 x_2 方向的流体微团在其两端点及各中间点处 x_1 方向流速 u_1

的不同，使涡管弯曲和转向，导致 Ω_2 发生变化。图 5-3(c)表示 $\Omega_3 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}$，是由于 x_3 方向流体微团在其两端点及各中间点处 x_1 方向的流速 u_1 的不同，使涡管发生弯曲和转向，导致 Ω_3 发生变化。同样可以看出 $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$ 在 x_2 和 x_3 方向的分量也表示了流体微团的变形和涡量的变化。涡量的增强或减弱是通过涡管的伸缩和弯曲变形来实现的，因而 $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$ 项也可称为旋涡变形项。在二维流动中涡量只有 Ω_3 不为零，但流速是平面流速，只有 u_1 和 u_2 在 x_3 方向流速没有变化，因此 $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$ 项为零，就是说二维流动中旋涡变形项为零，故旋涡不能伸缩或弯曲，因此不可能由于涡管的变形而导致涡量的变化。

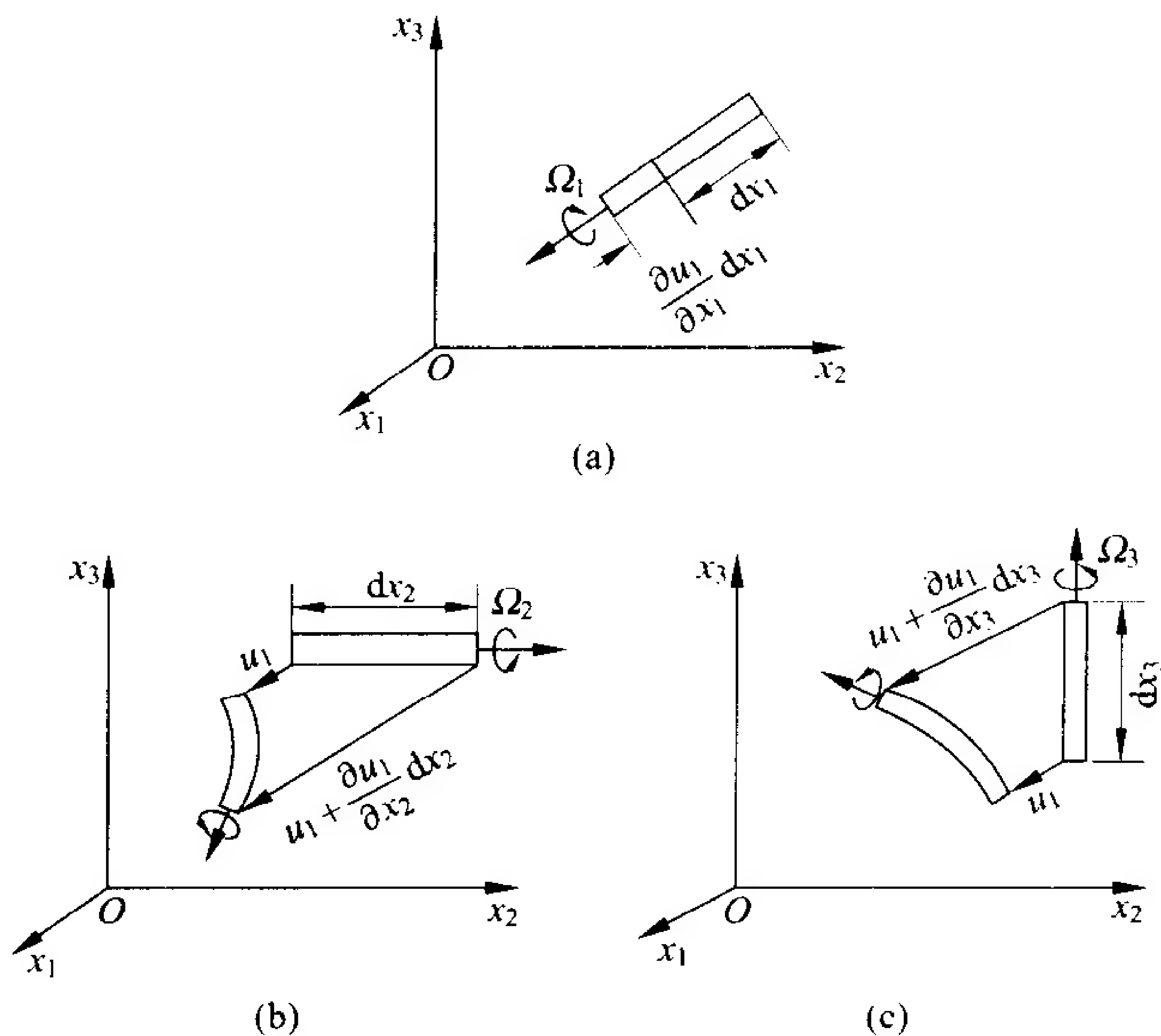


图 5-3　涡管变形、弯曲、转向示意图

右侧的第二项 $\nabla \times \boldsymbol{f}$ 为质量力项，说明外力是影响涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 发生变化的影响因素之一。但当质量力有势时，如 $\boldsymbol{f} = \nabla G$，$G$ 为力

势函数，则此项$\nabla \times \boldsymbol{f} = \nabla \times \nabla G = 0$。由此可见有势的质量力对涡量的变化并无影响。

右侧的第三项说明压强梯度对涡量变化$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$的作用，但由于

$$
\begin{aligned}
-\nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) &= -\left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla \times (\nabla p) \\
&= -\left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p \\
&= \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{5-5}
$$

此式中如果密度ρ只是压强p的函数，即正压流体，则$\nabla \rho$与∇p方向相同，其叉积为零，这时压强梯度对涡量变化没有作用。

右侧的最后一项$\nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}$是粘性项，这一项的形式说明粘性对涡量变化的影响主要是粘性扩散，而运动粘度$\nu = \frac{\mu}{\rho}$在这里相当于扩散系数。对于理想流体这一项当然不存在。

由以上的分析可知：对于理想、正压的流体，而且质量力有势情况下，亥姆霍兹涡量方程可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \tag{5-6}$$

如果对于不可压缩的粘性流体，该流体仍为正压，外力有势，则亥姆霍兹涡量方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \tag{5-7}$$

对于二维流动，方程中的$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$不复存在，于是亥姆霍兹涡量方程为

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t} = \nu \nabla^2 \Omega_3 \tag{5-8}$$

这个方程与描述流场中热传导现象的方程式具有完全一样的形式。热传导方程式为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=a\ \nabla^2\theta,\quad a=\frac{\lambda}{\rho c_p}$$

式中：$\theta=T-T_\infty$，为当地温度 T 与无穷远处未受扰动流体的温度 T_∞ 的差值；a 为热扩散率；λ 为流体的导热系数；ρ 为流体密度；c_p 为流体比定压热容。

两个方程式相比较可见 $\theta\triangleq\Omega_3$，$\nu\triangleq a$。这就表明在粘性流动中涡量像一个温度场中的热量，由温度高的地方向温度低的地方传播和扩散一样，也会由涡量高的地方向涡量低的地方传播和扩散。

涡量的扩散还可用以下的例子来说明：设 z 轴处有一点涡，强度为 Γ，在无界流场中诱导出一个作圆周运动的流场，流速与半径成反比。这时采用圆柱坐标的涡量方程(5-8)为

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}=\nu\left(\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_3}{\partial r}\right)$$

这个方程式的解为

$$\Omega_3=\frac{\Gamma}{2\nu t}\mathrm{erf}\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\tag{5-9}$$

由此可见：当 t 为某一数值时，Ω_3 按式(5-9)规律分布；当 $t=0$ 时，原点 $r=0$ 处涡量为无穷大而其他各处涡量均等于零，这是涡量尚未扩散时的情况；当 $t>0$ 时，涡量开始向四周扩散并按误差函数的规律向四周扩散出去，即开始时涡量集中在坐标原点处($r=0$)，随着时间的增长，涡量向四周扩散，原点处涡量逐渐减小；当 $t\to\infty$时，整个流场的涡量均为零，扩散的结果是使全流场涡量的分布均匀化。

如果流体是可压缩的，由式(5-3)可看出：式中的$(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Omega}$ 项是不能忽略的，说明压缩性对涡量变化的影响。流体体积的膨胀或压缩直接反映在流体微团惯性矩的增减中。如果不考虑粘性应力的力偶作用，则根据动量矩守恒定理要求由 $\boldsymbol{\Omega}$ 的增减来补偿因惯性矩变化而引起的动量矩变化。

综上所述，由亥姆霍兹涡量方程式(5-4)得到下面的结论。

流场中涡量的随体变化受到下列五个因素的影响：(1) 质量力，(2) 压强梯度，(3) 粘性应力，(4) 流体的压缩性，(5) 涡管的拉伸、弯曲和转动。可见涡量的变化较之流速的变化要复杂得多。五个因素中粘性的影响，涡管变形和转动的影响最为重要。而当研究的流体为正压流体时，压强梯度的影响不复出现，当研究的流场质量力有势时，质量力的影响不复出现。如果研究的是不可压缩的理想流体，则粘性和压缩性的影响均消失。

5.3 开尔文定理

5.3.1 开尔文定理

为确定一给定流体微元面积上涡通量的随体变化率，可以计算此微元面积周线上的环量的物质导数。为此在流场中取一条由运动着的流体质点组成的流体线(material line) L，由流体质点组成的物质面 A 张于其上，见图 5-4。沿流体线 L 的环量 Γ 为

$$\Gamma=\oint_L \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (1\text{-}29)$$

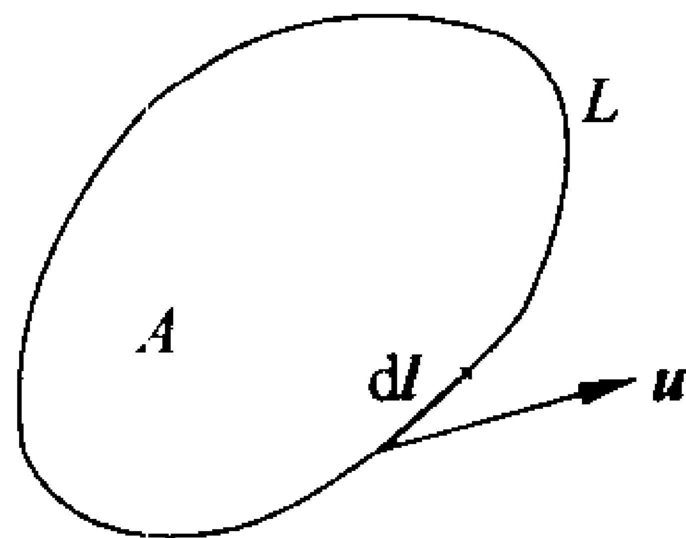


图 5-4 流体线

因此环量 Γ 的物质导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_L u_j\mathrm{d}x_j\\&=\oint_L\left[\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x_j+u_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x_j)\right]\end{aligned}$$

由于
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x_j)=\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\right)=\mathrm{d}u_j$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\oint_L\left(\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x_j+u_j\mathrm{d}u_j\right)$$

由于$\oint u_j \mathrm{d}u_j = \oint \mathrm{d}\left(\frac{u_j^2}{2}\right)$，对于封闭曲线此积分为零，所以得

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint_L \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x_j = \oint_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-10}$$

将 N-S 方程式(2-40)代入式(5-10)，得

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint_L \left(\boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-11}$$

由斯托克斯定理式(1-35)可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} &= \iint_A \nabla \times \left(\boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A \\ &= \iint_A \left[\nabla \times \boldsymbol{f} - \nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}\right] \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{5-12}$$

由此可见影响环量变化的因素有质量力、压强梯度和粘性扩散。对于正压流体，质量力有势的情况下，式(5-12)等号右侧前两项均为零，所以

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \nu \iint_A \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A \tag{5-13}$$

由斯托克斯定理，式(5-13)也可写为

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \nu \oint_L \nabla^2 \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-14}$$

根据向量场论运算公式$\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}$，考虑对于不可压缩流体$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$，可得到$\nabla^2 \boldsymbol{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\Omega}$，所以式(5-14)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = -\nu \oint_L (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-15}$$

对于理想流体，运动粘度 $\nu = 0$，因此

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5-16}$$

由此可见环量 Γ 为一常数，这就是开尔文定理(Kelvin theorem)。开尔文定理是开尔文爵士(Lord Kelvin)于 1869 年给以证明的。开尔

文定理可以叙述如下：如果理想流体是正压流体且质量力有势，则沿流场中任一封闭的流体线的速度环量在运动过程中保持不变。

同样可以说明在理想、正压流体中当质量力有势时，通过任一流体面的涡通量在运动过程中保持恒定不变。可见粘性、非保守作用力（质量力无势，不存在力势函数）、流体不是正压流体（其密度不只是压力一个因素的函数），这三个因素中任何一个因素都会导致沿某一封闭流体线环量在流动过程中发生变化。考虑一个涡管，沿涡管侧面上的任一封闭曲线，只要这个封闭曲线不是环绕涡管的曲线，由于没有涡线通过这样的曲线所包围的面积，其环量必然为零。由开尔文定理可知，在流动过程中其环量永远为零，而在涡管侧面上环绕涡管的封闭曲线，其环量应有某一定值，且在运动中保持为此常数。由斯托克斯定理可知，通过涡管截面积的涡通量在运动中也保持为常数。

5.3.2 拉格朗日定理

由开尔文定理可直接推论得到拉格朗日定理（Lagrange theorem），即旋涡不生不灭定理。正压理想流体在质量力有势的情况下，如果初始时刻某部分流体内无涡，则在此以前和以后的任何时刻中这部分流体皆无涡。反之，若初始时刻该部分流体有涡，则在此以前或以后的任何时刻中这部分流体皆为有涡。

5.4 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹（Helmholtz H.）[①]给出了有关旋涡运动的三个重要定理。对于理想、正压的流体，作用于流体上的质量力为有势力的

---

① Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelles J. 55, 25. 1858

情况有

(1) 原来无涡的流体微团将保持无涡；

(2) 任一时刻在一条涡线上的流体质点将永远在这条涡线上，也可以说是涡线和涡管随固定的流体质点运动；

(3) 在流体运动过程中涡管强度不随时间改变。

这三个定理中，第 1 条已由开尔文定理和拉格朗日定理所证明。现在来证明第 2 和第 3 条定理。

5.4.1 涡线保持定理

涡线保持定理是指，理想、正压流体若质量力有势，则在某一时刻组成涡线的流体质点在此以前或以后的任何时刻永远组成涡线。也就是说涡线总是由相同流体质点所组成。同样还有涡面保持定理。涡面保持定理是指，理想、正压流体若外力有势，则在某一时刻组成涡面的流体质点在此以前或以后的任何时刻永远组成涡面。首先来证明涡面保持定理，所谓涡面就是在流场中取一非涡线的曲线，过曲线上每一点作涡线，由这些涡线所组成的曲面。因此将不可能有涡线穿过涡面，涡量在涡面的法线单位向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影为零。即

$$\Omega_n = 0$$

设在初始时刻 $t=t_0$ 时流场中有一涡面 S，在涡面 S 上任取一面积 A，通过 A 的涡通量应为零，即

$$\int_A \Omega_n \mathrm{d}A = 0$$

设在 $t = t_0$ 以前或以后的某一时刻组成涡面 S 的流体质点组成新的曲面 S'，而面积 A 在 S' 面上相应的面积为 A'，根据开尔文定理，在运动过程中通过某一流体面的涡量通量元不变，即

$$\int_{A'} \Omega_n \mathrm{d}A' = \int_A \Omega_n \mathrm{d}A = 0 \tag{5-17}$$

因 A' 是任意选取的，由此推出

$$\Omega_n = 0$$

根据定义，A'应为一涡面。

涡管本身就是一种涡面，因此由涡面保持定理可立即推得涡管保持定理：理想、正压流体，外力有势，在某一时刻组成涡管的流体质点在其以前或以后任一时刻永远组成涡管。

若令涡管的截面积逐渐缩小并趋近于零，则涡管就变成一条涡线。由涡管保持定理自然可导出涡线保持定理。如图 5-5 所示，原来组成涡线 L 的流体质点在某一时刻后组成的曲线 L'仍为涡线。

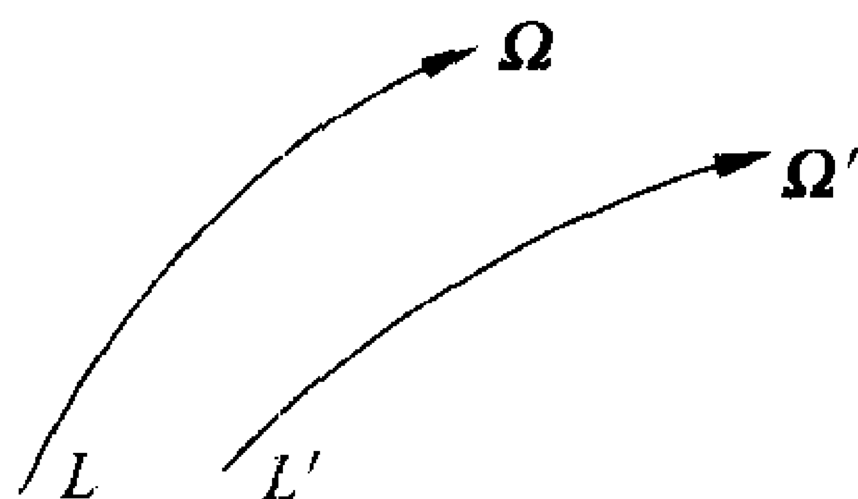


图 5-5　涡线保持定理

5.4.2　涡管强度保持定理

理想、正压流体当外力有势时，在运动过程中涡管强度保持恒定不变，称为涡管强度保持定理。

由斯托克斯定理知，涡管强度等于沿涡管周界封闭曲线的速度环量，即式(1-35)为

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_A \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A \tag{1-35}$$

又根据开尔文定理沿任何封闭流体线的速度环量在运动过程中保持不变，因此涡管强度也保持不变。

由三个亥姆霍兹定理得到旋涡运动中一些重要结论：在理想、正压流体且外力有势情况下，流场中的旋涡运动具有保持性，原来的有涡流动将保持为有涡流动，而某一时刻的无涡流动则永远是无涡运动。也就是说在这样的流场中旋涡既不能产生，也不会消灭，永远保持其原有流动状态。对于有涡流动，组成涡线、涡管、涡面的流体质点永远组成涡线、涡管和涡面，似乎这些流体质

点冻结在涡线、涡面、涡管上。尽管在运动过程中涡线、涡管、涡面的形状会有所变化,但是组成它们的流体质点则不变。在运动过程中涡管强度保持不变。当然,随着流体运动涡管形状的变化会引起涡量的改变。

根据亥姆霍兹定理考察以下两种流动的有涡性:

(1) 理想不可压缩流体在重力场作用下恒定绕物体流动,这时显然理想、正压、外力有势这三个条件都满足,因而可以应用亥姆霍兹定理。流场中所有流体质点都来自无穷远处,因为无穷远处运动无涡,所以整个流场应为无涡流动。但是需要注意的是,实际上流体都是有粘性的,尽管有的流体粘性很小,但在绕流物体的固体边界附近由于边界处的无滑移条件总会形成一层流速梯度很大的边界层流动,在边界层内流动是有涡的。

(2) 理想不可压缩流体在重力场作用下从静止状态开始的任何运动,由于静止状态是无涡的,这类运动任何时刻均无涡。

5.5 旋涡的产生、发展和消失

既然旋涡的不生不灭是在流体为理想、正压和外力有势三个条件下才能成立,因此旋涡运动的产生或消灭必然来源于这三个条件没有得到完全的满足。也就是说,流体的粘性、斜压流体和质量力无势都是形成有涡流动的原因。

5.5.1 流体粘性的作用

如 5.1 节所述,流体运动的剪切过程会使流体微团旋转,从而产生有涡流动。流体运动中的切应力可由牛顿切应力公式 $\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$得知:切应力 τ 由两种因素组成,一是流体的粘度 μ,一是流体运动中的流速梯度$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,二者缺一不可。粘性是产生旋涡的根本

因素，而具有流速梯度的流场是使粘性发挥作用，从而形成旋涡的场所。

为了明确粘性在旋涡形成中的作用，首先假定流体是正压流体，且外力有势。下面考察两种由粘性形成的旋涡流动：

1. 流场中存在固体边界

设流体原来处于静止状态，以保证流体运动本来是无涡的。$t=0$时流体开始沿固体边界流动。对于无粘性的理想流体，由拉格朗日旋涡不生不灭定理，正压、理想流体且质量力有势，由静止状态开始的流动应为有势流动。有势流动在固体边界上的边界条件只是垂直边界的流速为零（如果为不透水边界），而切向流速并不为零，从而在固体边界处形成固体边界与流体之间的滑移(slip)。现在来考虑粘性流体，对于粘性流体，不管粘性多小，固体边界处的边界条件必须满足无滑移条件，即流体与固体边界无相对滑移。如固体边界为静止边界，则边界上的流体质点速度应为零，并且在距边界一定距离处流速达到势流流速，这个具有相当流速梯度的区域就是边界层。在边界层内任取一个流体微元 $abcd$ 如图 5-6，沿其周边的速度环量 Γ 由于 ab 及 cd 层面上流速不同而必不为零，也就是说流体微元具有转动，为有涡流动，涡量

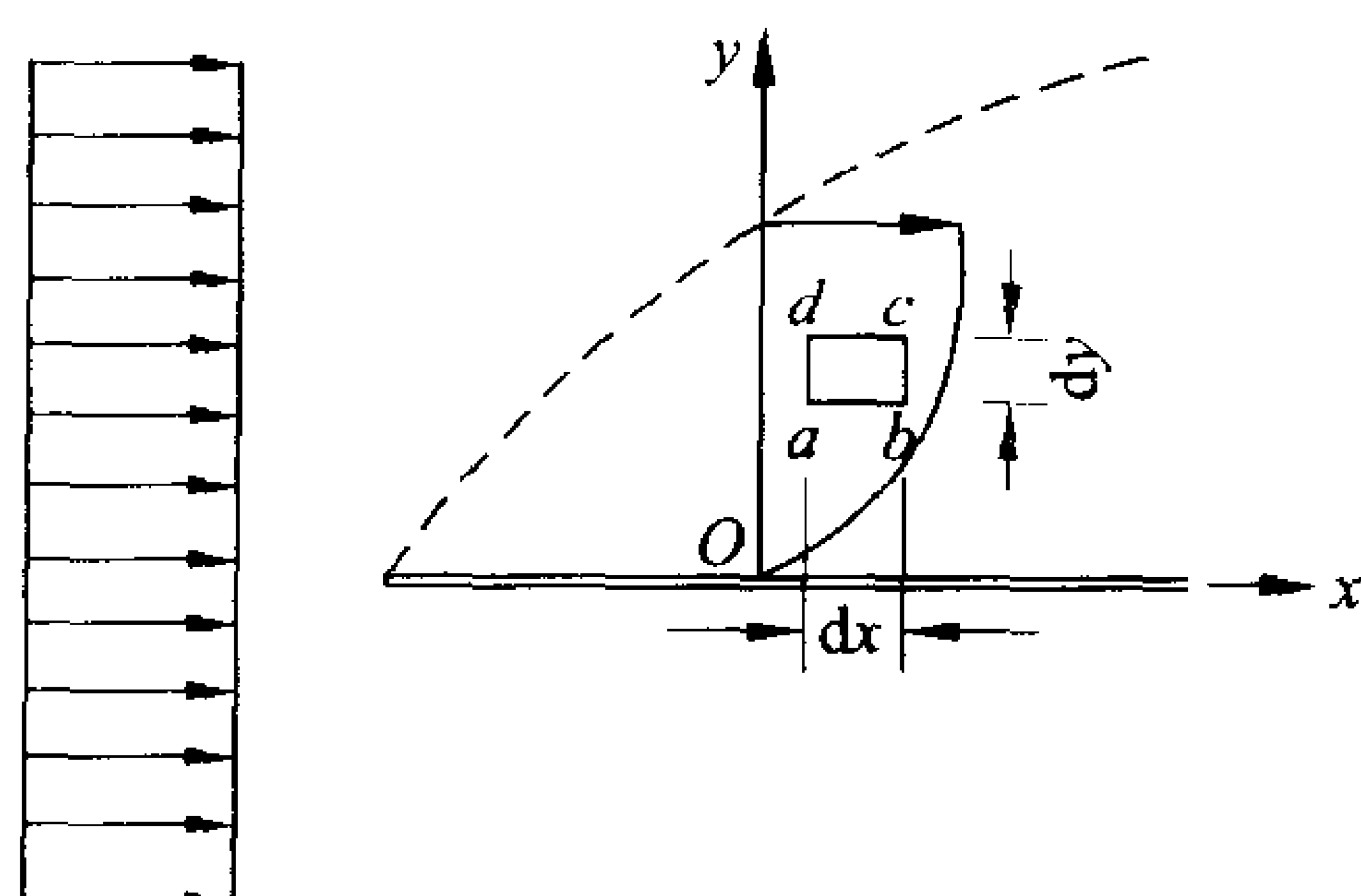


图 5-6 边界层

$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}$。由此可见：在粘性流动中固体边界是产生旋涡的源泉，但是其所以产生旋涡、流速梯度都是由于流体粘性的结果。在固体边界形成旋涡流动后，仍然依靠粘性把旋涡由边界扩散到流体的内部。为了说明这一点，考虑下面的流动。

设在原来静止的流体中一平板突然起动，如图 5-7 所示，沿其自身平面加速至某一固定速度 U，通过粘性带动其周围流体发生运动。这种流动问题称为斯托克斯第一问题。原来静止的流体本来无涡，运动后也应无涡，即为有势流动。有势流动在固体边界上只有法向流速为零一个边界条件，切向流速并不与固体边界速度相同，因而存在滑移。这就表明在 $t=0$ 时平板边界处切向流速是不连续的。平板速度为 U 而流体速度仍为零，故切向流速梯度为无穷大。在$t>0$时，通过粘性的作用，无穷大的流速梯度形成无穷大的切应力，这个切应力带动流体跟随平板发生流动，并在平板边界附近形成一个流速具有梯度的流层，即为边界层，由斯托克斯第一问题的解，知此边界层厚度 δ 与$\sqrt{\nu t}$有关①，ν为流体运动粘度。旋涡向流体内扩散的速度$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}$与$\sqrt{\frac{\nu}{t}}$有关，即扩散速度与运动粘度的平方根成正比，粘度越大，作为有涡流动的边界层扩散越快，而这个扩散速度随着时间的增加将减缓，但是只要有足够的时间，旋涡将扩散至无穷远。

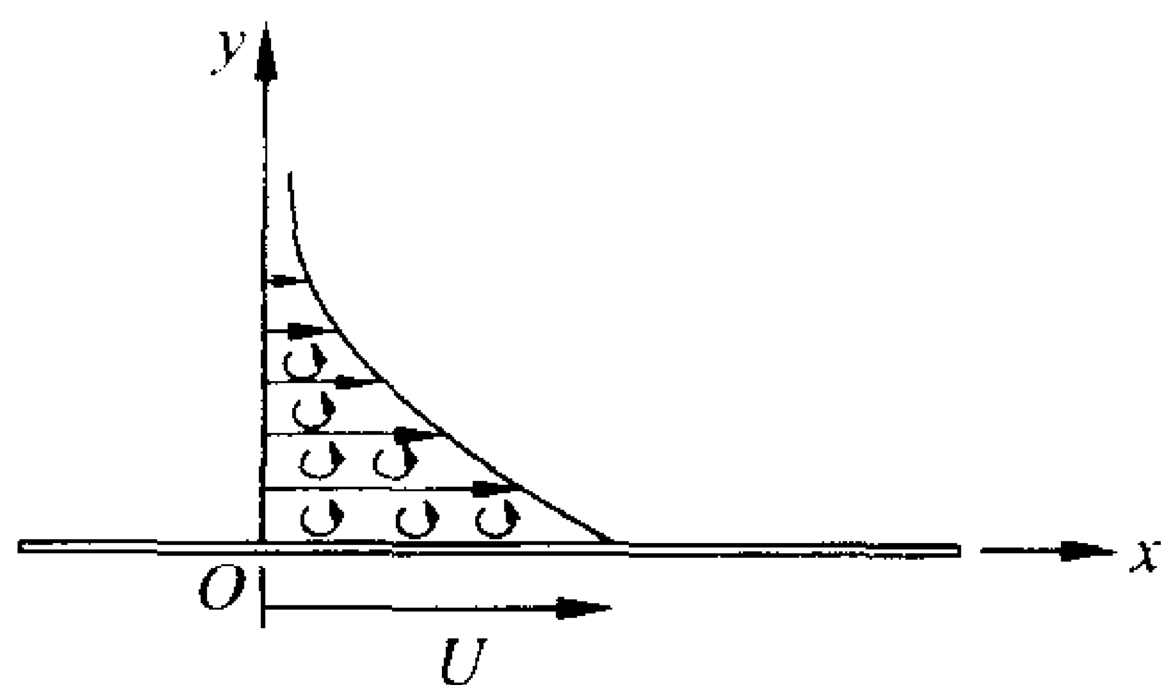


图 5-7　突然起动平板带动流体运动

2. 两股流速不同的流体汇合形成间断面

① 章梓雄，董曾南。粘性流体力学。北京：清华大学出版社，1998，67～68

设一绕流物体尾部处发生上下两股流体的汇合，如图 5-8 所示。如果上下两股流体的速度不同，两股流体的分界面是一个流速的间断面。只要有粘性，就不会使流体内部有无穷大的流速梯度，因此间断面处的流动将扩展为一个流速的过渡层。在这个过渡层中，流速梯度很大，是一个剪切层，而剪切层中$\frac{\partial v}{\partial x}=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}$是较大的值，因而 $\Omega_2=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\neq 0$，所以剪切层是充满旋涡的流层。

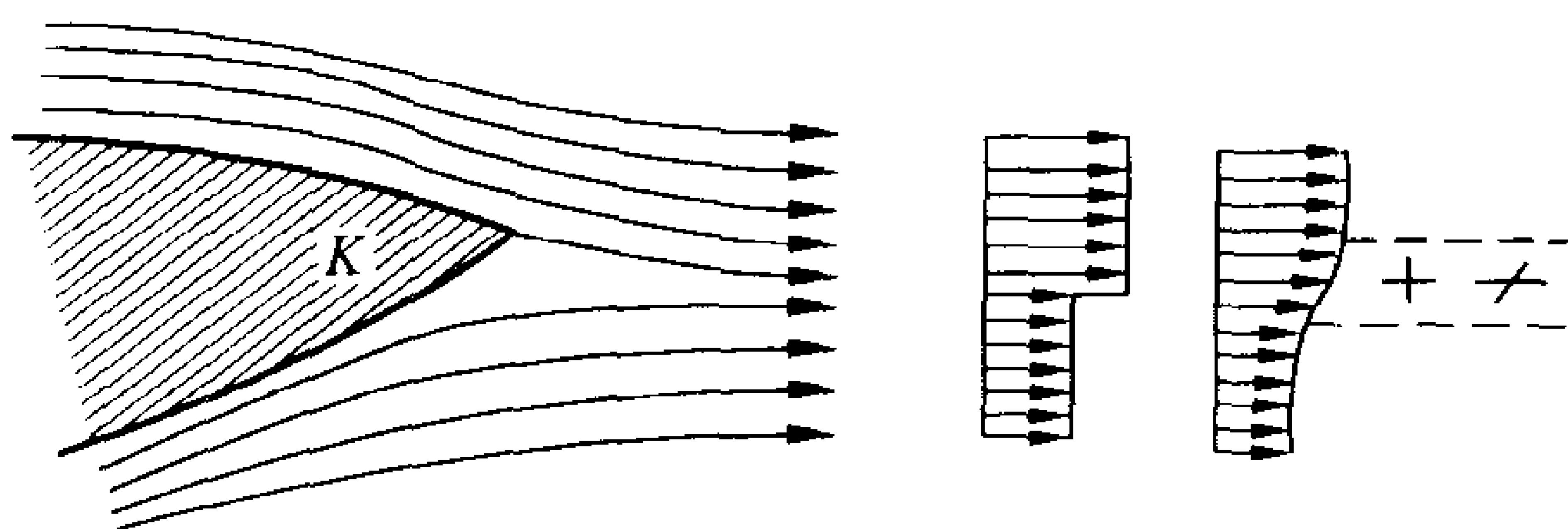


图 5-8　两股不同流速流体的汇合

5.5.2　斜压流体中旋涡的形成

为了讨论斜压流体中旋涡的形成，首先假定流体为理想流体，且外力有势。在 5.2 节中已说明，当密度 ρ 只是压强 p 的函数时流体为正压。如果密度 ρ 不只与压强 p 有关而且与温度、湿度（对空气而言）、含盐浓度（对海水而言）等因素有关，这种流体为斜压流体。流体的运动方程——欧拉方程为

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2-51}$$

由于 $\boldsymbol{f}=\nabla G$，G 为力势函数，所以

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\nabla G-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{5-18}$$

由式(1-29)得沿封闭流体线 L 的环量 Γ 为

$$\Gamma=\oint_L \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{1-29}$$

当理想流体 $\nu=0$，且质量力有势时，由式(5-12)得环量 Γ 的物质导数为

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=-\iint_A \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A \tag{5-19}$$

由式(5-5)得

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=-\iint_A \left[\left(\nabla\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p\right]\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A$$

$$=\iint_A \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A \tag{5-20}$$

式(5-20)说明：对于正压流体，即 $\rho=f(p)$，则 $\nabla\rho\times\nabla p=0$，因此 $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=0$，即环量在运动过程中保持不变。现在的情况则不同，$\rho$ 不仅与 p 有关，而且和其他因素有关，说明是斜压流体，因此 $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}\neq 0$。

式(5-20)中的 $\frac{1}{\rho}$ 表示单位质量流体的体积 υ，即

$$\upsilon=\frac{1}{\rho} \tag{5-21}$$

称为比容(specific volume)。在流场中把压强 p 等于某一定值 p_1 的各点连接起来形成一个等压面。同样地把 υ 等于某一定值 υ_1 的各点连接起来就形成一个等比容面，实质上等比容面也就是等密度面。正压流体密度仅为压强 p 的函数，因此等比容面和等压面二者平行。∇p 和 $\nabla\upsilon$ 是分别沿着等压面和等比容面的法线方向，因此二者也彼此平行，于是 $\nabla p\times\nabla\upsilon=\nabla p\times\nabla\frac{1}{\rho}=0$，即 $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=0$。若流动为斜压，等压面和等比容面相交，设相邻等压面和相邻等比容面的差值 Δp 与 $\Delta\upsilon$ 均设定为 1，则整个流场将被等压面和等比容面分隔成若干空间管道，如图 5-9 所示。这些管道称为等压等容单位管。

设某一管道周长为 l，则可以推求 $-\oint_l \upsilon\mathrm{d}p=-\oint_l \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p$ 的值

如下：在等压面 DA，BC 上 $p=\text{const}$，所以$\mathrm{d}p=0$。在 CD 线上 $\upsilon=\upsilon_0+1$，p 从 C 点处的 p_0+1 降至 D 点的 p_0，因而

$$-\int_{(CD)}\upsilon\mathrm{d}p=-(\upsilon_0+1)\int_{p_0+1}^{p_0}\mathrm{d}p=\upsilon_0+1$$

在 AB 线上，$\upsilon=\upsilon_0$，p 从 p_0 增加到 p_0+1，因而

$$-\int_{AB}\upsilon\mathrm{d}p=-\upsilon_0\int_{p_0}^{p_0+1}\mathrm{d}p=-\upsilon_0$$

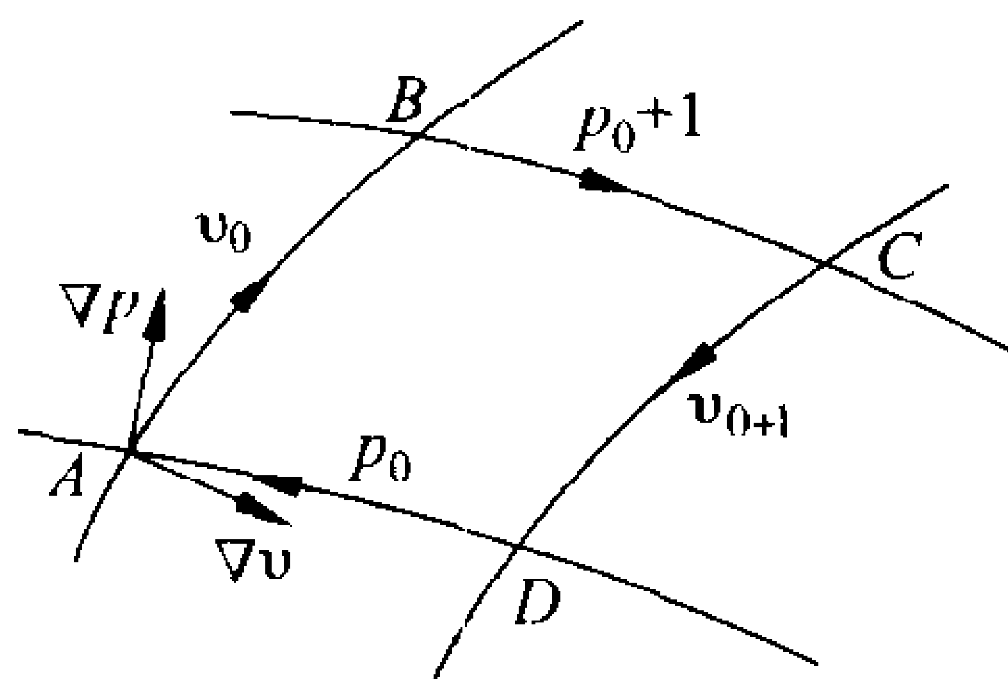


图 5-9　等压等各单位管

沿全部周长 l 积分则

$$-\oint_l\upsilon\mathrm{d}p=\upsilon_0+1-\upsilon_0=1$$

由此可得：顺时针方向积分得$-\oint\upsilon\mathrm{d}p=1$，如逆时针方向积分则得该值为$-1$。为了求沿封闭曲线 L 的$-\oint\upsilon\mathrm{d}p$ 值，则顺着 L 曲线的一定方向，区分曲线 L 内各单位管的正负号，如果正管道有 N' 个，负管道有 N''个，可得

$$-\oint_L\upsilon\mathrm{d}p=N'-N'' \tag{5-22}$$

对于理想流体且有势质量力，由式(5-11)可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}&=-\oint_L\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=-\oint_L\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p\\&=N'-N''\end{aligned} \tag{5-23}$$

式(5-23)称为布耶尔克涅斯(Bjerkness)定理。这一定理说明：在理想流体且质量力有势情况下，沿任何封闭流体线 L 的速度环量

随时间的变化率等于通过 L 曲线范围内的正管道与负管道的差值。可见等压面与等比容面(或等密度面)的交叉是斜压流体中形成旋涡的原因。

作为一个实例，讨论气象学上所谓的贸易风(trade wind)。形成贸易风有两个原因：一是斜压流体，一是非有势柯氏力的作用。本节主要讨论流体的斜压。假定地球是圆球，大气是完全气体，重力场中静止大气的等压面为地球的同心圆球面，压强梯度垂直向下指向地心，如图 5-10 中实线所示。由于日照强度在不同纬度处不同，空气的温度随之不同，赤道处温度最高而北极处温度最低，由气态方程可知，在相同高程，赤道处气体的密度小而北极处气体密度大。同时，在同一地区，高程越高，空气越稀薄，密度 ρ 越小。所以等密度面不是地球的同心圆球，而是由赤道向北极逐渐升高而密度梯度则是指向地心偏北方向的，如图 5-10 中虚线所示。等压线与等密度线的相交创造了产生环量或旋涡的条件。形成的风向是，在北极的风向由高空向地面，在地面的风向自北向南；在赤道的风向由地面向高空，在高空处的风向由南向北，在西半球形成顺时针，而在东半球形成逆时针的环流。这就是“贸易风”。

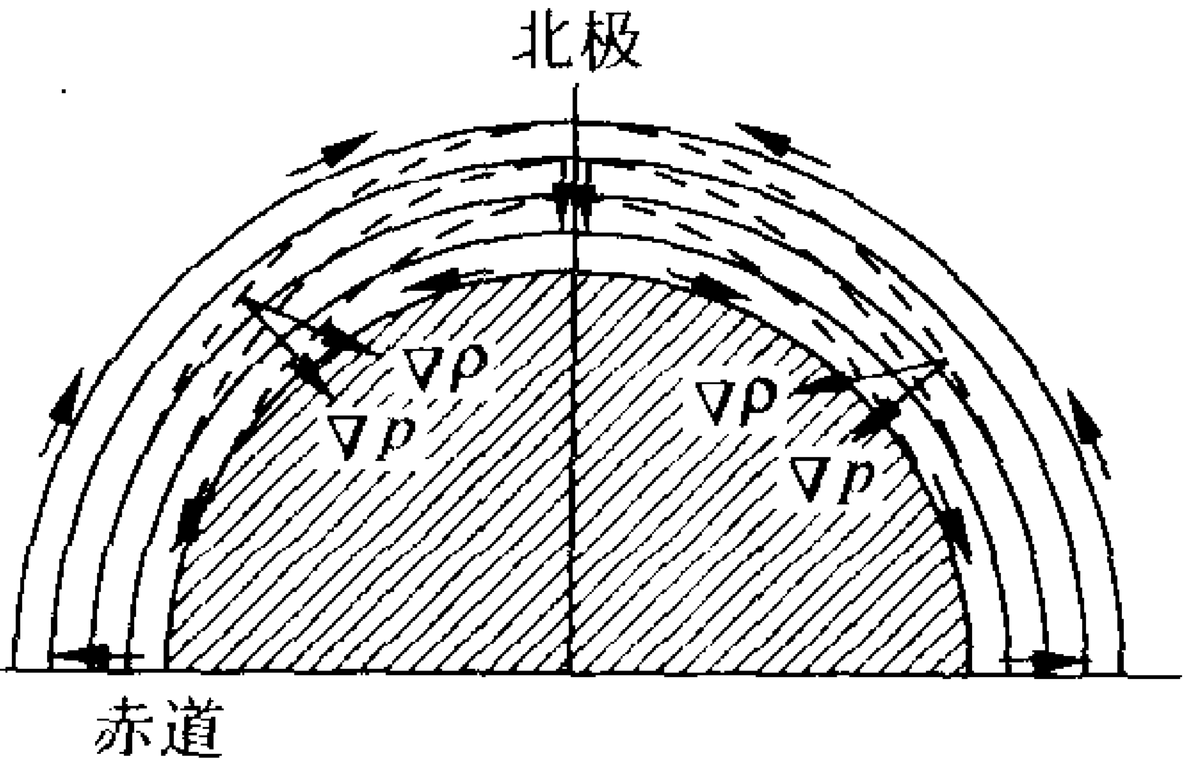


图 5-10 贸易风的形成

5.5.3 外力无势所产生的旋涡运动

仍以围绕地球的空气为例来讨论外力无势下在流动中引起旋涡运动的问题。

考虑到地球的自转运动，空气对地球的运动是一种相对运动。由理论力学可知，相对于定轴转动的运动加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 为

$$\boldsymbol{a}_r=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_r}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_a-\boldsymbol{a}_e-\boldsymbol{a}_k \tag{5-24}$$

式中：$\boldsymbol{a}_a$ 为绝对加速度；$\boldsymbol{a}_e$ 为牵连加速度；$\boldsymbol{a}_k$ 为地球自转影响的柯氏(Coriolis)加速度；$\boldsymbol{U}_r$ 为空气相对于地球的速度。

因地球以角转速 ω 绕轴旋转，牵连加速度的数值 $a_e=\omega^2 R$，R 为地面一点距地球转轴的半径。牵连加速度的方向背向地球转轴并与它垂直，所以

$$\boldsymbol{a}_e=\omega^2\boldsymbol{R}=\nabla\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right) \tag{5-25}$$

在理论力学中已知柯氏加速度为

$$\boldsymbol{a}_k=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r \tag{5-26}$$

将各加速度的表示式代入运动方程式(2-61)，即 $a_a=f-\nabla p$ 得相对运动的运动方程为

$$\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p-\nabla\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right)-2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r) \tag{5-27}$$

对于空气来说质量力就是重力，其力势函数为 G，$\boldsymbol{f}=\nabla G$ 因此式(5-27)又可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_r}{\mathrm{d}t}=\nabla G-\frac{1}{\rho}\nabla p-\nabla\left(\frac{\omega^2 R^2}{2}\right)-2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)$$

可见离心力与重力一样也是有势力，设

$$W=G-\frac{\omega^2 R^2}{2} \tag{5-28}$$

式中的 W 为地心吸引力和由于地球旋转而产生的离心力的合力的势函数。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_r}{\mathrm{d}t}=\nabla W-2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{5-29}$$

考虑到 W 为单值函数，环绕封闭曲线积分为零，由式(5-10)得

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\oint_L\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= -\oint_L \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p - 2\oint_L (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-30}$$

式中等号右侧第一项当流体正压时为零；第二项就是无势的柯氏力引起的环量随时间的变化率，其标量积$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$是由三个向量$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{U}_r$和$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$所构成的平行六面体的体积。将流体线$L$投影于赤道平面上得$L'$如图5-11所示，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$与$\boldsymbol{U}_r'$分别为$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与$\boldsymbol{U}_r$在赤道平面上的投影。上述的平行六面体的横截面为由$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$与$\boldsymbol{U}_r'$所构成的平行四边形。设在$\Delta t$时间后曲线$L'$改变为虚线所示的曲线，则$MN=\boldsymbol{U}_r'\Delta t$。设$L'$所包围面积为$A'$，则$\Delta t$时段中$A'$的增值$\Delta A'$为

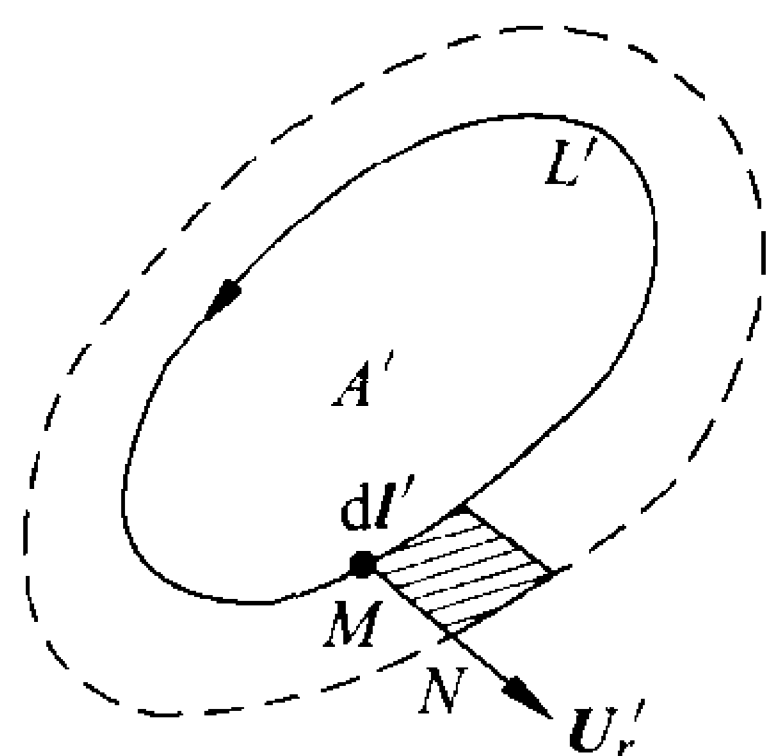


图 5-11 投影于赤道平面的流体线

$$\Delta A' = \oint_{L'} \boldsymbol{U}_r' \Delta t \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t} = \oint_{L'} \boldsymbol{U}_r' \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

由于$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$与$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$表示相同的平行六面体的体积，因此

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

也就是

$$\oint_L (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{L'} (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

根据向量运算法则

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U'}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{U}_r'\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}')$$

得

$$\oint_L (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{U}_r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\omega}\cdot\oint_{L'}\boldsymbol{U}_r'\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\omega\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t}$$

将这个关系式代入式(5-30)得环量随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=-2\omega\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t} \tag{5-31}$$

式(5-31)说明由柯氏力引起的环量增加率为封闭流体线 L 在赤道平面上投影所包含的面积 A' 的减小率 $\left(-\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t}\right)$ 乘以 2ω。

仍以贸易风为例说明柯氏力的影响。为此在地面取沿同一纬度绕地球一圈的封闭流体线 L,设自西向东,即处于北极来看反时针方向为正。如 5.5.2 节所述贸易风在地面附近由北向南吹,因而 L 曲线将随时间而扩大,其在赤道平面的投影面积 A' 将随时间而增加,由式(5-31)当 $\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t}>0$ 则 $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}<0$,也就是说将有风自东向西吹,起到减小环量的作用。总的来看,由于流体偏压及柯氏力无势两种作用形成的贸易风将是由东北吹向西南,也可以说柯氏力的作用使由北向南的贸易风向西偏离,这一点与柯氏力总使北半球的运动向西偏离的结论是一致的。

5.6 旋涡的诱导流速

旋涡的诱导流速是在无界不可压缩流体中由旋涡带动周围流体运动而形成的流速场。诱导流速是由流体的粘性作用而引起的。在理想流体中,旋涡和周围流体的分界面处将形成流速分布的间断面。粘性的作用保证了旋涡与周围流体分界面上以及整个流场中流速的连续性,因此在分析诱导流速时以流速的连续性假设来代替粘性作用。对于旋涡运动所处的流场而言,仍考虑为理想流体,从而有关旋涡运动的定理如开尔文定理、拉格朗日定理、亥姆霍兹定理等均仍成立。

5.6.1 不同旋涡的诱导流速

1. 曲线涡的诱导流速

无界理想流动中一根曲线形涡丝，由于在几何上可近似看作一条曲线，也称为曲线涡。尽管涡丝的旋涡断面面积 ΔA 趋于零而涡量 Ω 趋于无穷大，但涡通量保持为有限值，即

$$\lim_{\Delta A\to 0}\int_{\Delta A}\boldsymbol{\Omega}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\text{const}=\Gamma \qquad (5\text{-}32)$$

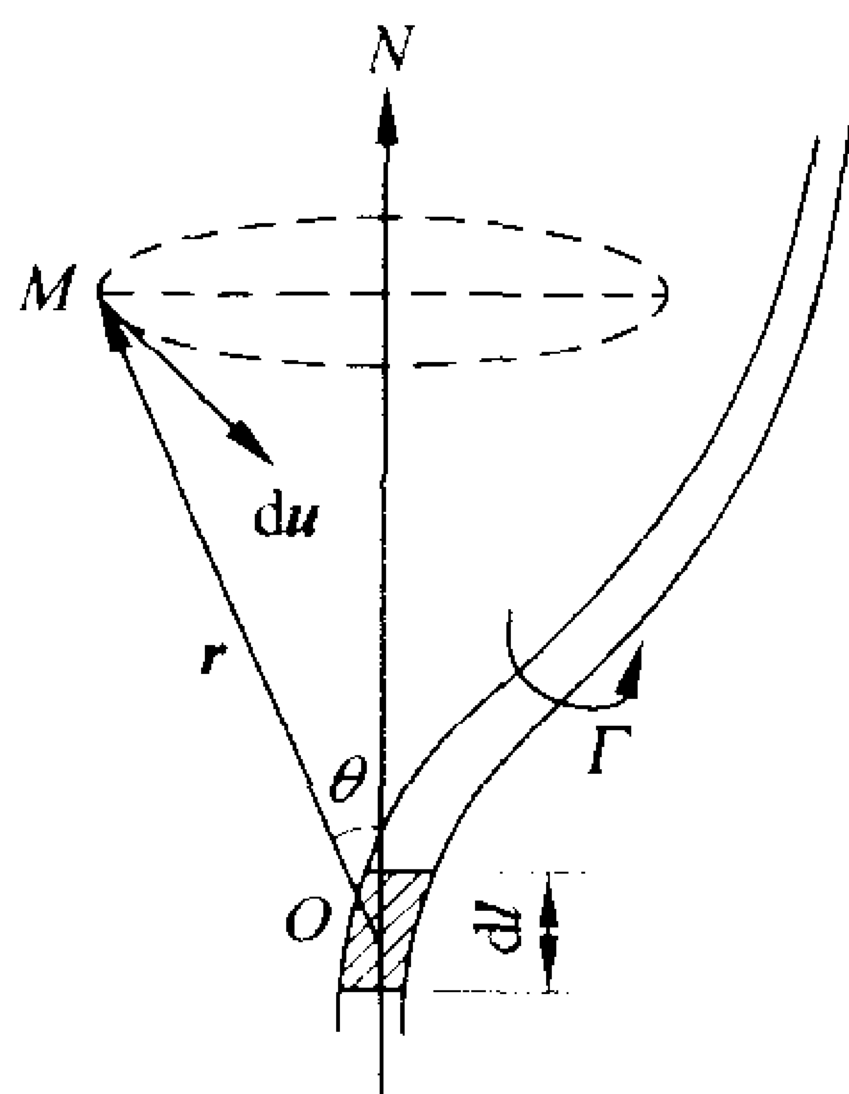


图 5-12 曲线涡诱导流速[3]

图 5-12 表示一曲线涡，在其上取一微元弧向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，瞬时转动轴线 ON 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向，$\boldsymbol{r}$ 为该微元弧中心 O 点至所求点 M 的向径。该微元弧对 M 点诱导的流速为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (5\text{-}33)$$

Γ 为涡通量，根据斯托克斯定理，它是围绕曲线涡的环量。式(5-33)与电磁学中的毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)公式具有同样的形式，说明当电流通过一段导线时在任一点 M 处感应的磁场与涡感应的流速有共同的规律。毕奥-萨伐尔公式说明：曲线涡微元弧 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 对任意点所诱导的流速 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，其大小与环量成正比，与距离 r^2 成反比，其方向则与由 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所形成的平面垂直，并按右手螺旋法则确定。详细证明见 5.6.2 节。

整个曲线涡对 M 点的诱导流速为

$$\boldsymbol{u}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (5\text{-}34)$$

诱导速度的数值可由下式计算：

$$|\boldsymbol{u}|=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{r\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\sin\theta}{r^3}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2} \qquad (5\text{-}35)$$

式中：θ 为 d$\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角。

由于曲线涡对其自身上的各点同样也有诱导作用，因而具有变曲率的曲线涡将在流体中运动，并在运动过程中不断改变本身的形状。

2. 单个直线涡的诱导流速

根据式(5-35)可推求有限长直线涡的诱导流速。如图 5-13 中 AB 为一有限长直线涡，涡量的方向为自 A 向 B。在 AB 上取任意微元弧向量 d$\boldsymbol{l}$，流场中任一点 M 至直线涡的垂直距离为 R，则直线涡对 M 点的诱导流速 $\boldsymbol{u}$ 为

$$|\boldsymbol{u}|=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_A^B\frac{\sin\theta\mathrm{d}l}{r^2}$$

根据图 5-13 的几何关系，可得

$$r=\frac{R}{\sin\theta},\quad \mathrm{d}l\sin\theta=r\mathrm{d}\theta$$

代入上式得

$$|\boldsymbol{u}|=\frac{\Gamma}{4\pi\mathrm{R}}\int_A^B\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{R}=\frac{\Gamma}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\qquad(5\text{-}36)$$

式中：θ_1，θ_2 分别为 AB 与 AM 和 AB 与 BM 的夹角。由 d$\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}$ 可看出诱导流速的方向是垂直纸面向上。由于涡管不可能在流场内部终止，因此有限长度的直线涡并不可能存在于流场中，但应用公

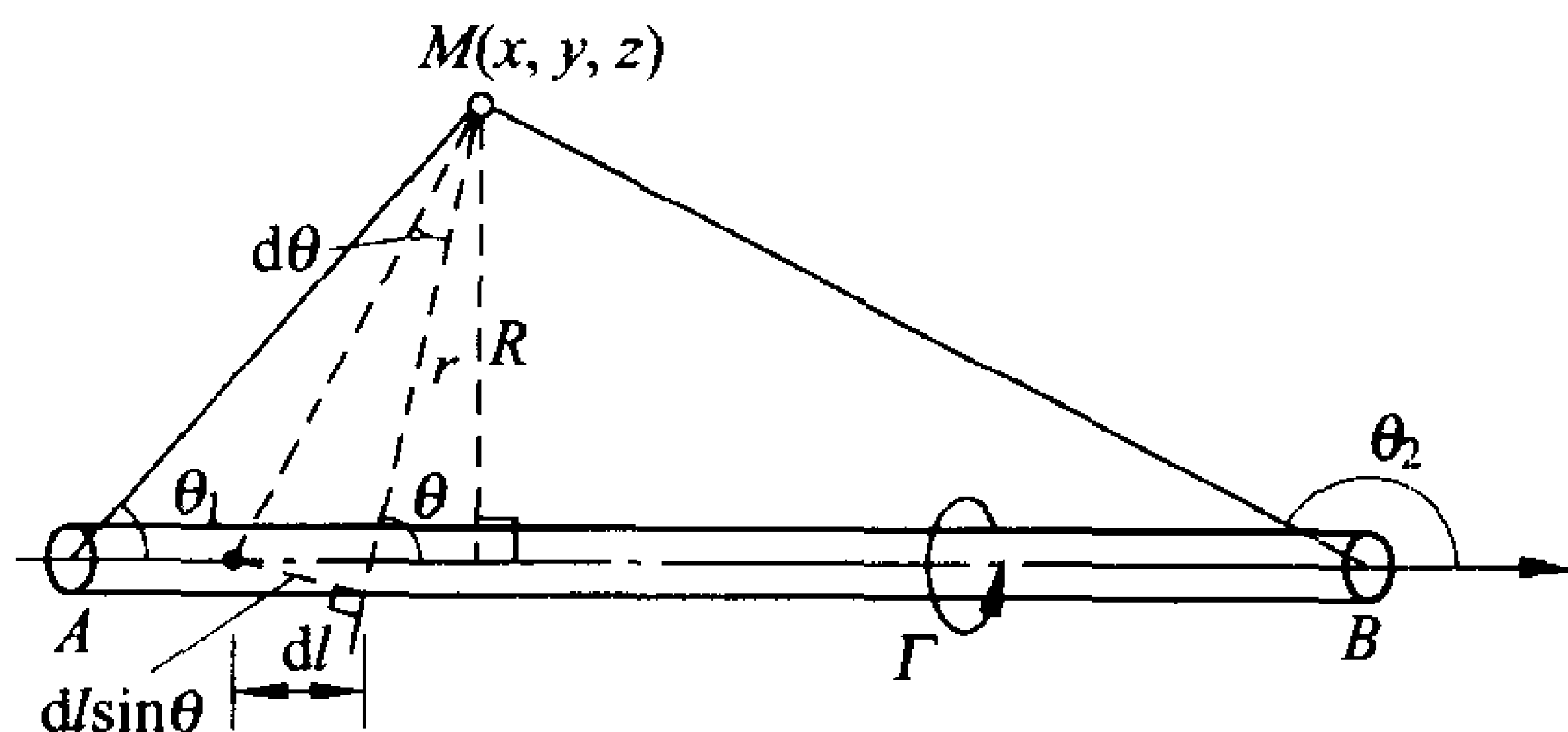


图 5-13 单个直线涡诱导流速[3]

式(5-36)可以推导出以下结论：

(1) 半无限长直线涡

当A端伸展至无穷远，如$BM \perp AB$，则M点的诱导流速以$\theta_1=0, \theta_2=\frac{\pi}{2}$代入式(5-36)可得

$$|\boldsymbol{u}|=\frac{\Gamma}{4\pi R} \tag{5-37}$$

(2) 无限长的直线涡

无限长的直线涡对任意点M的诱导流速均以$\theta_1=0, \theta_2=\pi$代入式(5-36)，即可得

$$|\boldsymbol{u}|=\frac{\Gamma}{2\pi R} \tag{5-38}$$

这就是无界理想流体中一个孤立的直线涡对周围流体的诱导流速公式。周围流体跟随旋涡的旋转而作圆周运动，这是由于考虑到流速的连续性假设。在周围流体中同一圆周上各点流速应相同。假定周围流体原系静止，则根据拉格朗日定理，当它们被直线涡丝带动而作圆周运动后仍为无涡流动。于是包含旋涡的任一封闭曲线其环量均相等且均等于旋涡的环量Γ。这里需要注意的是式(5-38)只适用于旋涡的外部，而不适用于旋涡的内部。旋涡的半径尽管很小但不能等于零，因为转速不可能无穷大。在数学处理上常常把旋涡的半径看作零来处理。无限长直线涡可视为二维流动，在任一与线涡垂直的平面上的流动都是相同的。在平面上涡线看作一个点，称为点涡(point vortex)，是流场中的一个奇点(singular point)。

3. 涡环的诱导流速

线涡的形状为环形，称该线涡为涡环(vortex ring)。现求涡环对其中心点处的诱导流速。先采用公式(5-33)，求得微元弧$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$对涡环中心点处的诱导流速，这时r等于涡环半径r_0，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}_0=$

$r_0 \mathrm{d}l \sin\theta = r_0 \mathrm{d}l \sin \frac{\pi}{2} = r_0 \mathrm{d}l$，于是可得

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{u}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathrm{d}l}{r_0^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{r_0}$$

式中：$\mathrm{d}l = r_0 \mathrm{d}\theta$，$\theta$ 为圆心角。

然后由 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 积分，求得整个涡环对中心点处的诱导流速为

$$|\boldsymbol{u}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{r_0} = \frac{\Gamma}{2r_0} \tag{5-39}$$

方向为与涡环平面垂直。

4. 平面涡群的诱导流速

流场中的一系列旋涡形成一个涡群，假定各个涡都独立地诱导各自的流速场，并不因有其他涡的存在而有所不同，即假设涡与涡之间没有相互作用。但是一个涡所诱导的流速将对另一个涡起作用。因此，本来固定不动的涡可以在其他涡的诱导下产生运动，从而所形成的流场相当复杂。现在讨论只有两个涡的简单情形。例如：两个强度相同的旋涡因旋转方向不同，在相互作用下，将在与两个涡的中心连接线相垂直的方向作等速直线运动，如图 5-14(a)所示；如果两个强度一样的涡均沿同一方向旋转，则两个涡将以中心到中心的连接线为直径作圆周运动，如图5-14(b)所示。

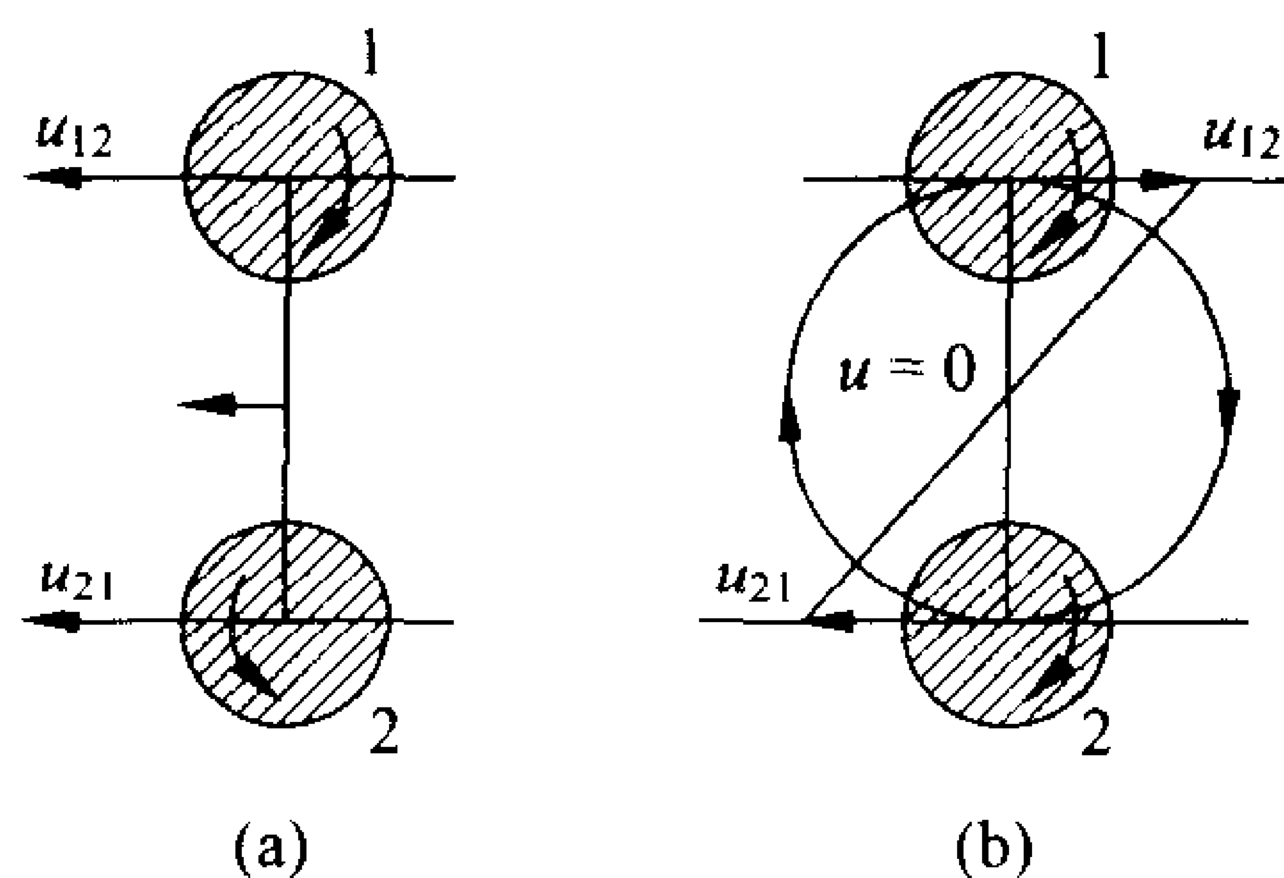


图 5-14　涡的相互作用[7]

涡的独立作用原理可归纳为如下两点：

（1）涡群所诱导的流速场是每一个涡独立地诱导流速场的几何和。

（2）每一个涡的运动速度等于所有其他涡在该涡心上的诱导速度的几何和。

将式(5-38)写成如下的直角坐标形式：

$$u=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{5-40a}$$

$$v=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{5-40b}$$

如果旋涡不在坐标原点而是位于(ξ,η)，则式(5 40)应改写为

$$u=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \tag{5-41a}$$

$$v=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \tag{5-41b}$$

于是可以得到第l个旋涡中心点处(x_l,y_l)的总合诱导流速为

$$u_l=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k\frac{y_l-\eta_k}{(x_l-\xi_k)^2+(y_l-\eta_k)^2} \tag{5-42a}$$

$$v_l=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k\frac{x_l-\xi_k}{(x_l-\xi_k)^2+(y_l-\eta_k)^2} \tag{5-42b}$$

式中：(ξ_k,η_k)为各个涡中心的坐标位置；n为涡的总数。一般说来，旋涡的位置在移动，诱导流速场将随涡的移动而变化，因此整个流场是非恒定的。式(5-42)只是给出某一瞬时的流速分布。流场中任意一点处的诱导流速也可由式(5-42)得出。

5. 片涡的诱导流速

通过流场内一条不封闭曲线上各点的涡丝连成一片，称为片涡(sheet vortex)也称为涡面(vortex sheet)或旋涡层，如图 5-15 所示。实际流动中流速的间断面就是一个片涡。片涡的强度用单位环量γ表示，如图 5-15 中在片涡中取一微元段Δs，片涡的厚度

为 Δn，沿 Δs 微元段的环量为 $\Delta\Gamma$。

$$\Delta\Gamma = u_{s1}\Delta s - u_{s2}\Delta s = \Omega_z \Delta n \Delta s$$

将 $\Delta\Gamma$ 除以 Δs，并取 $\Delta s \to 0$ 的极限值即得单位环量 γ 为

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}s} \\ &= u_{s1} - u_{s2} \\ &= \Omega_z \Delta n \end{aligned} \tag{5-43}$$

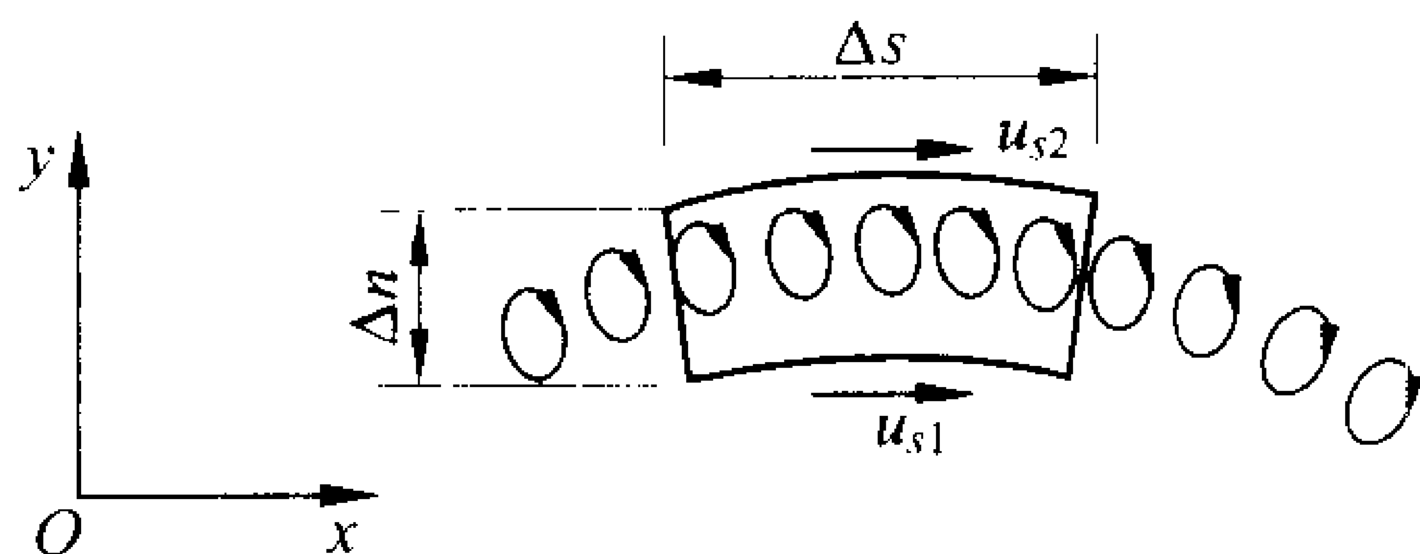


图 5-15　片涡[7]

由于片涡中各处均有一定的 γ 值，所以各处片涡的两边均有一定的流速差，也就是说片涡是流速分布的一个间断面。

以平面片涡为例来说明片涡的诱导流速，如图 5-16 所示，坐标原点位于片涡中间，在 x 轴的正负两侧各有 $\frac{b}{2}$ 长的平面片涡。在距离坐标原点 ξ 处取一 $\Delta\xi$ 长的涡段，环量为 $\Delta\Gamma = \gamma(\xi)\Delta\xi$，在任一点 (x, y) 处受此涡段影响而形成的诱导流速可按式(5-42)列为

$$\Delta u = -\frac{\gamma(\xi)\Delta\xi}{2\pi}\frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \tag{5-44a}$$

$$\Delta v = \frac{\gamma(\xi)\Delta\xi}{2\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} \tag{5-44b}$$

将以上两式沿片涡积分，可得由整个片涡在 (x, y) 点处诱导的流速为

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{y\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} \tag{5-45}$$

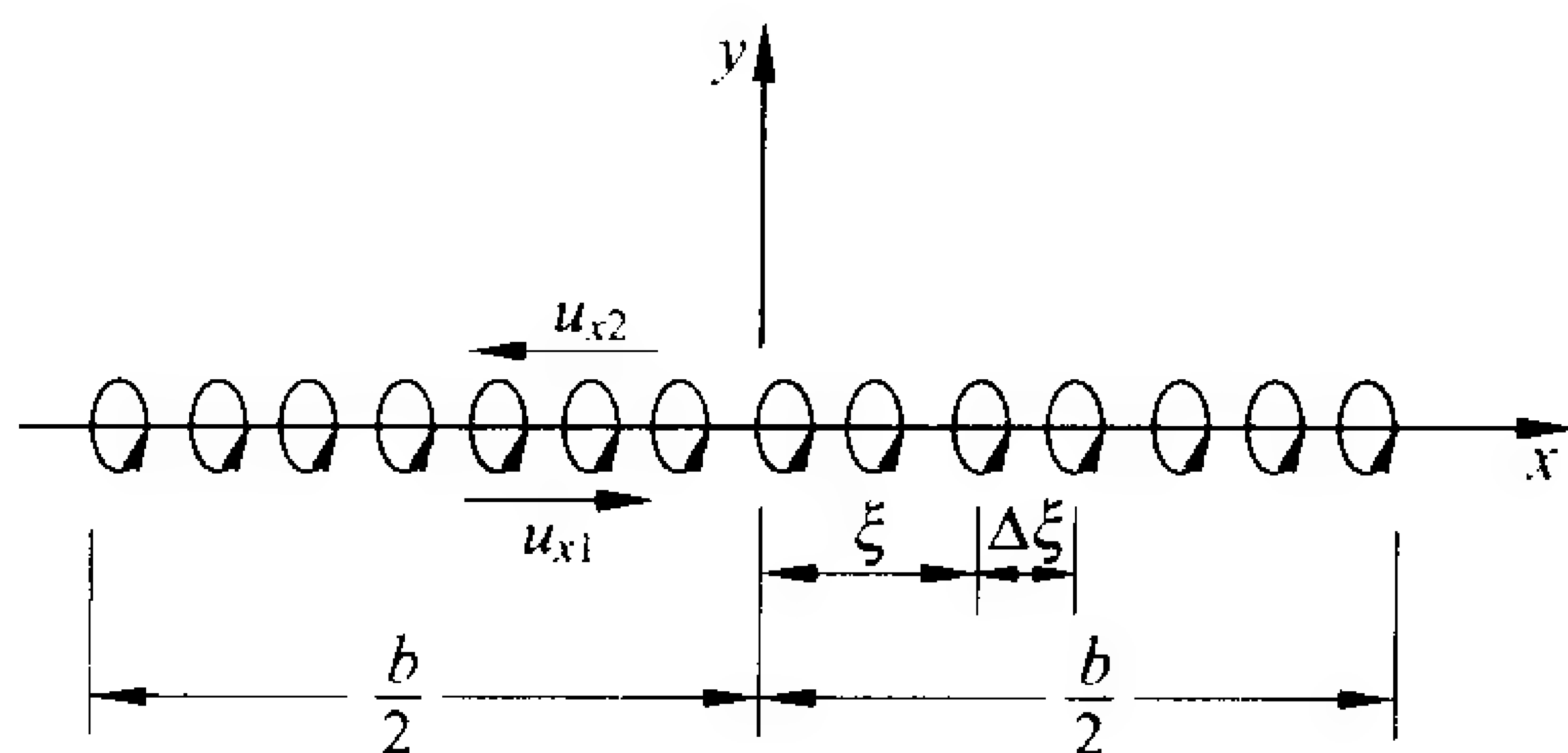


图 5-16 平面片涡[7]

$$v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{(x-\xi)\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2+y^2} \tag{5-46}$$

片涡和流速间断面是一种不稳定的流动结构，很小的扰动就会使它变形，并最后完全分裂为单涡。

5.6.2 由涡量场诱导流速场的普遍公式

考虑理想流体，假设一个流场内某一有限体积 V 内为有涡流动，而在该体积 V 以外则为有势流动。即

$$V_{内}:\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\ \nabla\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Omega} \tag{5-47a}$$

$$V_{外}:\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\ \nabla\times\boldsymbol{u}=0 \tag{5-47b}$$

式中：速度散度$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 表示流体不可压缩。对于 V 内的有涡流动，不存在速度势 ϕ，但由$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 的条件可知，如令

$$\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{5-48}$$

式中的 $\boldsymbol{A}$ 为一特定的向量函数。将式(5-48)代入式(5-47)，并应用向量基本运算公式$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$，得

$$V_{内}:\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Omega} \tag{5-49a}$$

$$V_{外}:\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=0 \tag{5-49b}$$

若引进如下附加条件：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{5-50}$$

则式(5-49)可写为

$$V_{内}:\ \nabla^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\Omega} \tag{5-51a}$$

$$V_{外}:\ \nabla^2 \boldsymbol{A} = 0 \tag{5-51b}$$

这样，就把对式(5-47)求解流速场 $\boldsymbol{u}$ 化为对式(5-51)求解向量 $\boldsymbol{A}$，而式(5-51)中向量函数 $\boldsymbol{A}$ 在 V 内满足泊松方程（Poisson equation），在 V 外满足拉普拉斯方程（Laplace equation），这样的向量函数是不难求出的。

下面对附加条件式(5-50)的 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$ 加以说明。设一向量函数 $\boldsymbol{A}_1$，符合 $\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{A}_1$ 的条件，但并不满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1=0$ 的要求，设 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系式为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\nabla\psi$$

因此得

$$\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times(\boldsymbol{A}_1+\nabla\psi)=\nabla\times\boldsymbol{A}_1$$

同时

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_1+\nabla\psi)=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1+\nabla^2\psi$$

可选择 ψ，使

$$\nabla^2\psi=-\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1 \tag{5-52}$$

从而使 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 的条件也得到满足。通过 ψ 由 $\boldsymbol{A}_1$ 求出的向量函数 $\boldsymbol{A}$ 既能满足式(5-48)和式(5-51)，也符合附加条件式(5-50)。以下是求解式(5-51)：设有涡流动的体积 V 内每一微元体积为 $\mathrm{d}V_i$，这些有涡的微元体积都是在 V 外产生诱导流速的来源。如 $\mathrm{d}V_i$ 上一点 $M_i(\xi,\eta,\zeta)$ 可视为源点，任一其诱导流速待求的空间点 $P(x,y,z)$，M_i 与 P 之间距离为 r。根据数理方程的势论可得 V 内满足泊松方程，V 外满足拉普拉斯方程式(5-51)的解为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi,\eta,\zeta,t)}{r}\mathrm{d}V \tag{5-53}$$

式中积分域 V 为整个有涡流动所占有的体积。M_i 与 P 之间的距离用 r 来表示，即

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \tag{5-54}$$

现在来验证这样解出的向量函数 $\boldsymbol{A}$ 是否满足式(5-50)的条件,对式(5-53)取散度,即为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}&=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\Omega}\right)\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left(\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V\end{aligned}\tag{5-55}$$

注意:式中的哈密顿算子$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$,是对 x,y,z 坐标而言,其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 x,y,z 坐标方向的单位向量;式中等号右侧的积分则是对 ξ,η,ζ 坐标进行的,因此需要把$\left(\nabla\dfrac{1}{r}\right)$变成对 ξ,η,ζ 坐标的$\left(-\nabla'\dfrac{1}{r}\right)$,这里 ∇' 是对 ξ,η,ζ 而言的,$\nabla'=\boldsymbol{l}\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\boldsymbol{m}\dfrac{\partial}{\partial\eta}+\boldsymbol{n}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$,其中 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 为沿 ξ,η,ζ 坐标方向的单位向量。因此式(5-55)可改写为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}&=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla'\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V\\&=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{r}\right)\mathrm{d}V\\&=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}}{r}\mathrm{d}S\\&=0\end{aligned}$$

这里利用了高斯公式,式中 V 的界面 S 必须是涡面,在涡面上 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}=0$,$\boldsymbol{n}$ 为涡面外法线方向的单位向量。可见附加条件式(5-50)得到满足。由此可得到向量函数 $\boldsymbol{A}$,即可由式(5-48)计算流速向量。即

$$\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\left[\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}V\right] \tag{5-56}$$

从而得到诱导流速的普遍公式，可用于由已知涡量场求其所诱导的流速场。

反过来说，如果流体运动的流速场已知，可以很容易地由 $\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ 来确定涡量场。涡量的分量是

$$\left.\begin{aligned}\Omega_x&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\\ \Omega_y&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\\ \Omega_z&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1-32}$$

而且也可以很容易地确定流速的散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

由此可见：速度场与涡量场二者是流场中共生的，具有互相适应的关系。下面以曲线涡丝为例说明式(5-56)的具体应用。设一无界理想流体流场中有一曲线形状涡丝，涡丝周围为无涡流动。在曲线涡丝上任选一段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则 $\boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}V=\Omega\mathrm{d}s\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，因为涡量方向与涡丝曲线方向一致。根据斯托克斯定理，$\Omega\mathrm{d}s=\Gamma$ 是该涡丝的旋涡强度，环量 Γ 沿整个涡丝不变。式(5-56)写为

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_L\frac{\Gamma}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\Gamma}{4\pi}\nabla\times\int_L\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-57}$$

由此式可见

$$A_x=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{\mathrm{d}\xi}{r} \tag{5-58a}$$

$$A_y=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L\frac{\mathrm{d}\eta}{r} \tag{5-58b}$$

$$A_z = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\zeta}{r} \tag{5-58c}$$

流速在 x,y,z 三个坐标轴的分量为

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta\right] \end{aligned}$$

而由式(5-54)可知

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{\xi-x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\eta-y}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\zeta-z}{r^3}$$

代入 u 的表达式得

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \left(\frac{\eta-y}{r^3}d\zeta - \frac{\zeta-z}{r^3}d\eta\right) \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \left(\frac{\eta-y}{r}\frac{d\zeta}{dl} - \frac{\zeta-z}{r}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{dl}{r^2} \end{aligned} \tag{5-59a}$$

同理
$$v = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \left(\frac{\zeta-z}{r}\frac{d\xi}{dl} - \frac{\xi-x}{r}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{dl}{r^2} \tag{5-59b}$$

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \left(\frac{\xi-x}{r}\frac{d\eta}{dl} - \frac{\eta-y}{r}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{dl}{r^2} \tag{5-59c}$$

这样，诱导流速场即可得到。如果把这些公式进一步做一些变换，可以得到毕奥-萨伐尔公式。为此，在曲线涡丝的 $N(\xi,\eta,\zeta)$ 点上沿切线方向取单位向量 $\boldsymbol{T}$，如图5-17所示。它的三个分量分别是：$\frac{d\xi}{dl},\frac{d\eta}{dl},\frac{d\zeta}{dl}$。在涡丝上 N 点到流场中需求诱导流速的 $M(x,y,z)$ 点的距离向量 $\boldsymbol{r}$ 上取单位向量 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 的三个分量为：$-\frac{\xi-x}{r}$，

$-\frac{\eta-y}{r}$，$-\frac{\zeta-z}{r}$。于是流速分速的表达式(5-59)式可以写为

$$\boldsymbol{u}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{L}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})\frac{\mathrm{d}l}{r^{2}} \quad (5\text{-}60)$$

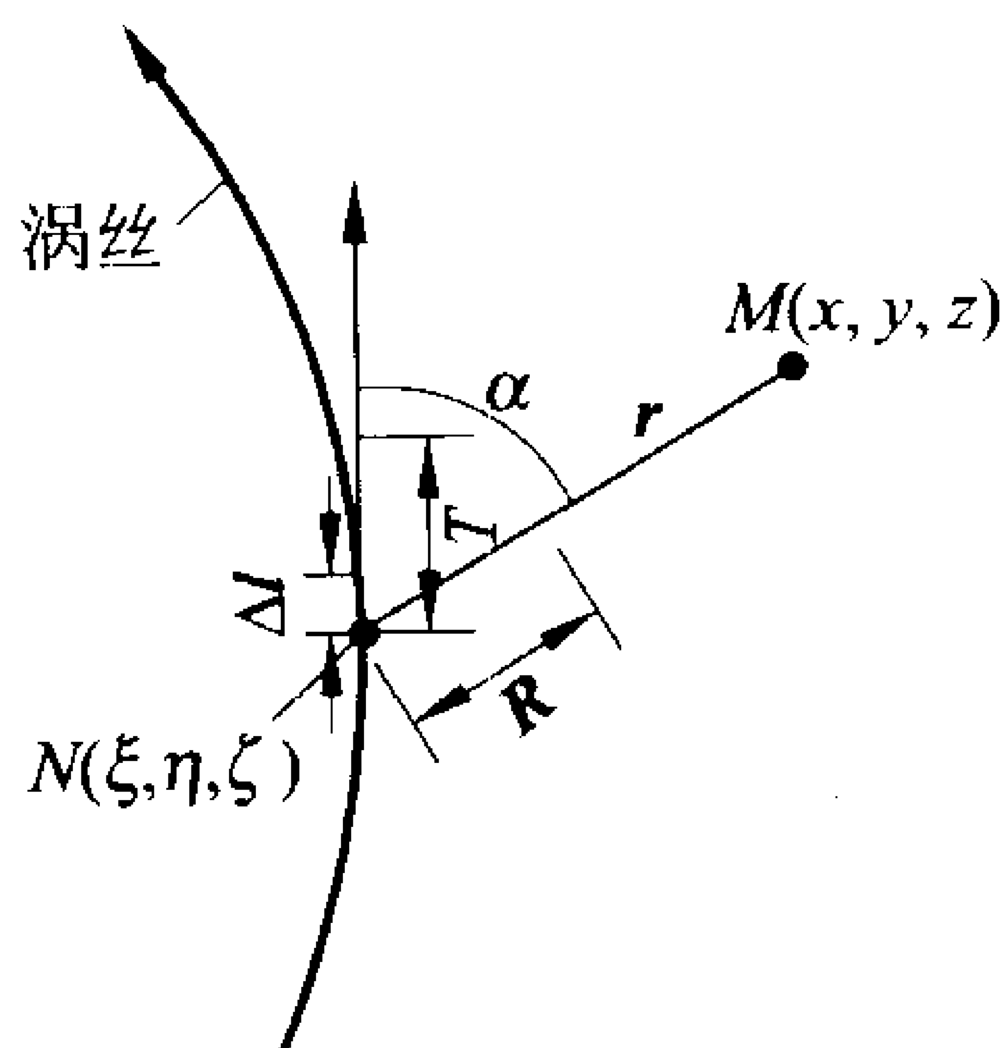


图 5-17　曲线涡丝诱导流速[7]

涡丝上的微元段 Δl 在 M 点诱导的流速 $\Delta\boldsymbol{u}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{u}=\frac{\Gamma}{4\pi}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})\frac{\Delta l}{r^{2}} \quad (5\text{-}61)$$

$\Delta\boldsymbol{u}$ 的绝对值为

$$|\Delta\boldsymbol{u}|=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\alpha\Delta l}{r^{2}} \quad (5\text{-}62)$$

式中：α 为向量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 之间的夹角。这就是毕奥-萨伐尔公式(5-33)，只是表示方法略有不同。

第6章

平面势流

不可压缩理想流体中，当流动无涡，则流速存在速度势函数，称为势流。势流中当各种物理量只在某一平面内变化而在此平面的垂直线上没有变化或变化极微，这种流动情况为二维势流，也称平面势流(plane potential flow)。平面势流中不仅存在流速势函数 ϕ，而且通过连续方程还可以定义一个流函数 ψ。平面势流中流速势函数及流函数均满足拉普拉斯方程。拉普拉斯方程是二阶线性椭圆形偏微分方程，在数学中对它研究得很成熟而且很多一般解是已知的。由于它是线性方程，可以应用叠加原理，利用已有的一些解的叠加，以寻求满足给定边界条件下具有实际背景的许多问题的解答。流速势函数与流函数满足柯西-黎曼条件(Cauchy-Riemann condition)，因此也可以利用复变函数(complex Function)这个数学工具求解平面势流。在平面势流中通过势函数求得其流速场后可进一步利用伯努利方程求得压强场，从而得到流动的全部解答。平面势流的求解较之一般流动问题的求解简单得多。平面势流在工程实践中应用十分广泛，是理想流体力学的重要部分。

6.1 流速势函数

在有势流动中，流动无涡，因而 $\boldsymbol{\Omega}=0$。由此得到流场中必然存在一个标量函数 ϕ 使 $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$。这个标量函数就是流速势函数

(velocity potential function)。将这一关系代入不可压缩流体的连续方程，得到流速势函数必须满足拉普拉斯方程。即

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1-60}$$

在整个流场中流速势 ϕ 可以相差任一常数而不影响对流速场的描述。满足 ϕ 为常数的曲面称为等势面，它的法线方向即 $d\phi$ 增加的方向和流速向量的方向一致。

下面简述流速势函数的一些特性：

(1) 由数理方程理论知道满足拉普拉斯方程的连续函数是调和函数。调和函数在整个域中是解析函数，即函数及其任意阶导数存在。函数的导数不连续点只能发生在域的边界，也就是说奇点只能出现在边界上。

(2) 由于拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 是线性齐次方程，若 ϕ_1，ϕ_2 是它的解，则 $C_1\phi_1 + C_2\phi_2$ 也是它的解（C_1，C_2 为任意常数）。因此可以用简单的调和函数叠加为复杂的调和函数，解决复杂边界的势流问题。

(3) 由连续性原理，对于任意封闭曲面将有以下关系：

$$\iint_S \frac{d\phi}{dn} dS = 0 \tag{6-1}$$

式中：S 为封闭曲面面积；n 为曲面上一点处曲面的外法线单位向量。

沿曲面外法线方向的导数为

$$\frac{d\phi}{dn} = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{n} = u_n$$

即为 n 方向的流速。式(6-1)说明通过封闭曲面的流量为零，也就是流进和流出的流体体积相等。

(4) 流体内部无论哪一点上，其流速势函数 ϕ 都不可能有极大值或极小值。因为若 ϕ 在某点有极大值(或极小值)，可以以足够小的封闭曲面 S 将此点包围，封闭曲面全部在流体内，则对此 S

面上每一点均可得出 $\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0$（或 $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0$），从而 $\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S > 0$（或 < 0），与式(6-1)的结论矛盾。

（5）如果单连通域边界上流速势保持常数值，则域内流体为静止的。由动能定理[①]得

$$K = \frac{\rho}{2} \iiint_V U^2 \mathrm{d}V = \frac{\rho}{2} \iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{6-2}$$

式中：K 为流体的动能；U 为流速的绝对值，$\boldsymbol{U} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$；$n$ 为封闭边界的外法线方向。

由于 $U^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2$，所以式(6-2)改写为

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] \mathrm{d}V - \iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S = 0 \tag{6-3}$$

在边界上，由于 $\phi = \text{const}$，而 $\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S = 0$，因此得到 $\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] \mathrm{d}V = 0$，也就是说流速势 ϕ 在整个域内保持为常数，而在域内流速则应为零，即流体为静止的。

（6）由固体壁面所包围的单连通域中不可能存在有势流动，除非存在奇点。

在 1.4.4 节中由流动的连续性已经说明流管（当然包括组成流管的流线）不可能在流体中开始或终止，只能开始或终止于流动的边界上，或者形成封闭的管路。这里的流动边界是由固体壁面所包围，在固体壁面上 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n = 0$，流线不可能穿透壁面，也就是说流线不会由壁面开始或终止。流线只能是在流体内部的封闭曲

---

① Lamb H. Hydrodynamics, Dover Publication. New York, 1932, 46

线。而在1.7节中又说明单连通域中，如果流动有势，则流线不可能封闭，因为沿封闭流线其环量不为零。由此可见由固体壁面包围的单连通域内，流体处于静止状态，或者是有涡流动，不可能是有势流动。由此还可以得到一个有趣的结论：当单连通域部分边界为固体壁面而另一部分为自由液面时，可能发生无涡流动，但随着这种无涡流动必然同时发生自由液面形状的不断变化，从而形成波浪。

（7）流体所占据的单连通域空间为固定不动的边界所包围，其一部分边界上的流速势 ϕ 保持为同一常数值，而其他部分边界上的流速法线分量 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 为零，则此空间内不可能有有势流动。

由于在 $\frac{\partial \phi}{\partial n}=0$ 的部分边界上不可能有流线的进出，流线只能从 $\phi=C$ 的部分边界上进入并从 $\phi=C$ 的部分边界上流出。流速势 ϕ 值沿着流线应该单调变化，流速向量的方向与 $d\phi$ 增加的方向一致，因此不可能在流线的进入端和流出端具有相同的 ϕ 值。

（8）具有一定边界条件 $\left(\text{例如在边界上给定 } \phi \text{ 或 } \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)$ 的单连通域内有势流动的解是惟一的。

假设有两个有势流动 $\boldsymbol{U}_1$，$\boldsymbol{U}_2$ 及其相应的流速势 ϕ_1，ϕ_2，则二者的差也是一个有势流动的解，并满足式(6-2)，即

$$\iiint_V (\boldsymbol{U}_1-\boldsymbol{U}_2)\cdot(\boldsymbol{U}_1-\boldsymbol{U}_2)\mathrm{d}V=\iint_S(\phi_1-\phi_2)\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n}-\frac{\partial \phi_2}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

由于已知边界条件，即在边界上 $\phi_1=\phi_2=\phi$，或 $\frac{\partial \phi_1}{\partial n}=\frac{\partial \phi_2}{\partial n}=\frac{\partial \phi}{\partial n}$，上式中右侧必为零，故左侧也为零，即在整个流域的体积内 $\boldsymbol{U}_1-\boldsymbol{U}_2=0$，可见 $\boldsymbol{U}_1$ 与 $\boldsymbol{U}_2$ 是同一个解。

以上的讨论主要针对以封闭曲面所包围的内部单连通域，但是所有结论都可以推广到流体充满外部且延伸至无穷远的单连通空间的情形，以及流体在几个封闭曲面外部的情形。这时，在距离

封闭曲面形成流动空间的内部边界足够远的地方取另外一个封闭曲面作为流动空间的外部边界将这些内部边界包围起来即可。

流速势 ϕ 作为调和函数，它的边界条件可以是在域 S 的边界 L 上具有下列三个条件之一。

(1) 狄利克雷条件(Dirichlet condition)

$$\phi|_L = f(x,y) \tag{6-4}$$

式中：$f(x,y)$为已知。

(2) 诺伊曼条件(Neumann condition)

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_L = f(x,y) \tag{6-5}$$

(3) 罗宾条件(Robin condition)，为以上两种边界条件的组合

$$\left(a\phi + b\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_L = f(x,y) \tag{6-6}$$

式中：a,b 为常数。

而在无穷远处，应满足该处流速为无穷远处未受扰动流速的条件。

6.2 流 函 数

不可压缩流体的连续方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{1-17}$$

对于二维平面流动，在直角坐标系(x,y)中为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6-7}$$

由此可以定义一个流函数(stream function)ψ，使

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{6-8a}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6-8b}$$

由此定义说明连续方程可自动满足。这里并没有限制流动是否有势，所以这样定义的流函数对于有势流动或有涡流动都是适用的，只要流动是二维流动。设涡量$\boldsymbol{\Omega} = \Omega x\boldsymbol{i} + \Omega y\boldsymbol{j} + \Omega z\boldsymbol{k}$，式中的$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$为直角坐标系中沿坐标$x, y, z$方向的单位向量。在二维流动中，只有$z$方向的涡量$\Omega z$不为零，$\Omega z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$。由无涡的条件，$\Omega z = 0$，所以

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6-9}$$

将式(6-8)中的u, v代入式(6-9)中，得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{6-10}$$

说明在有势流动中，流函数ψ像流速势ϕ一样，也满足拉普拉斯方程。式(6-10)对于恒定流动与非恒定流动均适用。

下面说明流函数的几个性质：

(1) 流场中等流函数线为流线

由于ψ是x, y的函数，其全微分可写为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y \\ &= -v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6-11}$$

沿某一曲线ψ为常数，即$\mathrm{d}\psi = 0$，由上式得

$$-v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{u}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{\mathrm{d}y} \tag{6-12}$$

这就是流线方程式，或写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\psi}=\frac{v}{u} \tag{6-13}$$

下角标 ψ 表示求导$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$是在 ψ 等于常数的曲线上进行的。常数的每一个数值代表着一条流线。这也就是 ψ 被称为流函数的由来。

(2) 两条流线之间流函数的差值等于通过这两条流线之间的流量。

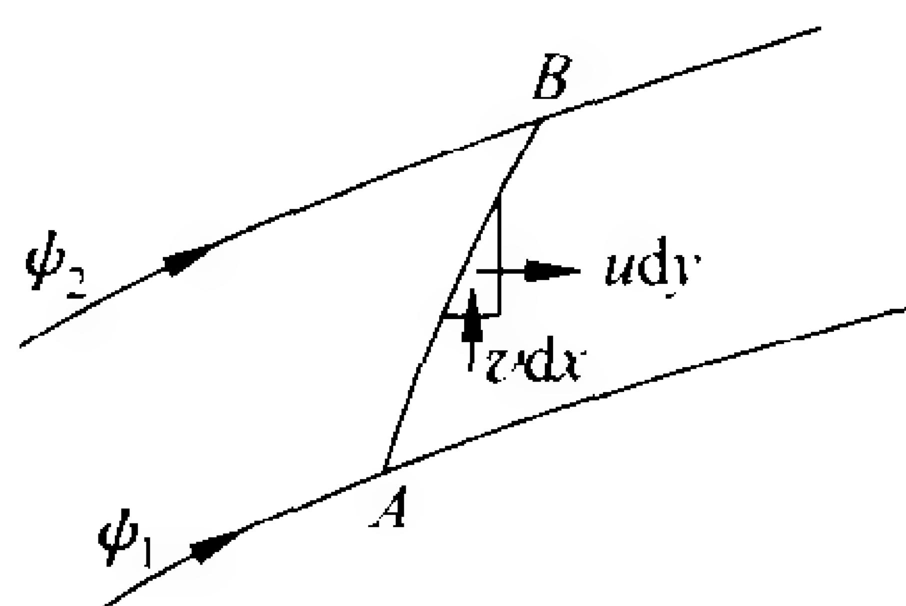


图 6-1 两条流线之间的流量

如图 6-1 所示，两条流线分别为 $\psi=\psi_1$，$\psi=\psi_2$。在两条流线之间任意取连线 AB，由于所考虑的是平面问题，在 z 方向包括流线及 AB 连线均为无穷长的柱面，这里在 z 方向均取单位长度。AB 线上某一点处取微元 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$，通过它们的流速分别是 v 与 u。于是通过 AB 的流量为

$$\begin{aligned} q &= \int_A^B \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}l \\ &= \int_A^B (un_x + vn_y)\mathrm{d}l \\ &= \int_A^B (u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x) \end{aligned} \tag{6-14}$$

由式(6-11)积分可得

$$\int_A^B \mathrm{d}\psi = \psi_2 - \psi_1 = \int_A^B (u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x) \tag{6-15}$$

比较式(6-14)与式(6-15)即得

$$\psi_2 - \psi_1 = q$$

(3) 流线与等势线(equipotential line)互相正交。

平面势流中 ϕ 为(x,y)的函数，其全微分为

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy$$

$$= u dx + v dy \tag{6-16}$$

等势线上 $\phi=\text{const}$，则 $d\phi=0$，即

$$u dx + v dy = 0 \tag{6-17}$$

或写为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{u}{v} \tag{6-18}$$

由式(6-13)与式(6-18)得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = \frac{v}{u} \cdot \left(-\frac{u}{v}\right) = -1 \tag{6-19}$$

流线上一点的斜率与该点处等势线的斜率的积为−1，说明两种曲线互相正交。这一点是下面 6.3 节所讨论的流网(flow net)的基础。

(4) 流函数的物面边界条件

在 2.3 节中已经说明在理想流动中流体的固体边界必然是一条流线。由流函数的性质已知流线即等流函数线，因此物面条件可以写为

$$\psi_b = \text{const} \tag{6-20}$$

式中：b 表示沿固体的边界。

通常令固体边界的流函数为零，因此物面边界条件通常写为

$$\psi_b = 0 \tag{6-21}$$

6.3 流　　网

恒定平面势流中由一族等势线和一族流线所构成的正交网格称为流网。绘制流网是求解平面势流问题的一种方法，是数值计

算方法普遍应用之前工程界比较通用的方法。

图 6-2 所示为流网中的一个网格。首先，如 6.2 节所述，流线与等势线是相互垂直的。流网中每一网格的两个方向的边长 dl 与 dn 之比 $\frac{dl}{dn}$ 等于 ϕ 与 ψ 的增值之比 $\frac{d\phi}{d\psi}$。如取 $d\phi=d\psi$，则网格为正方形，由式(1-56)知

$$d\phi = \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l} = u dl \tag{6-22}$$

由流函数的性质知两根流线之间的流量 dq 等于该两流函数的差值 $d\psi$，即

$$d\psi = dq = u dn \tag{6-23}$$

于是可知在流网中

$$\frac{d\phi}{d\psi} = \frac{dl}{dn} = 1 \tag{6-24}$$

即 $dl=dn$，所有网格均为正方形。

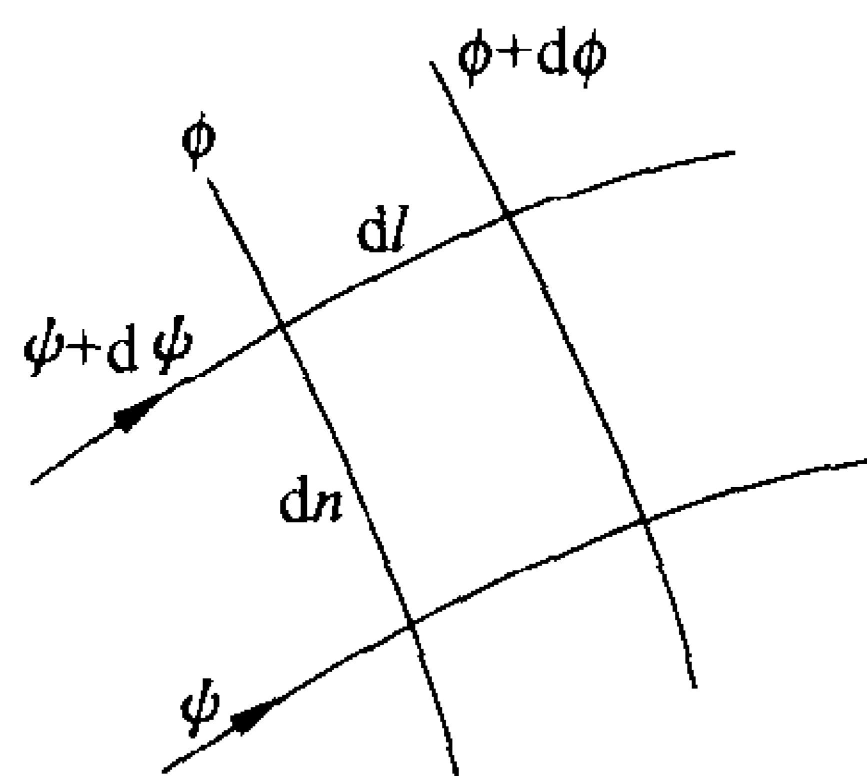


图 6-2 流网

由于流网的这种特性，因此可以通过流网求得在流场中的流速分布，进而通过伯努利方程求得压强分布。由流网可以看出当两条流线的间距愈大，则流速愈小；反之若间距愈小则流速愈大。对于不恒定流动流网是随时间而变化的。

图 6-3 表示绕一圆头物体流动的流网，并且给出由此求得的沿 GS 线及固体边界 SS' 上相应点处的流速分布 $\frac{u}{u_\infty}$ 和压强分布 $\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}=\frac{2\Delta p}{\rho u_\infty^2}$，$u_\infty$ 为无穷远均匀来流流速，p_∞ 为无穷远处未受物体扰动影响的压强。

图 6-4 表示平板闸门下泄流的立面流网，闸门上下游均为有自由水面的情况。流网中的 S 点均表示驻点。

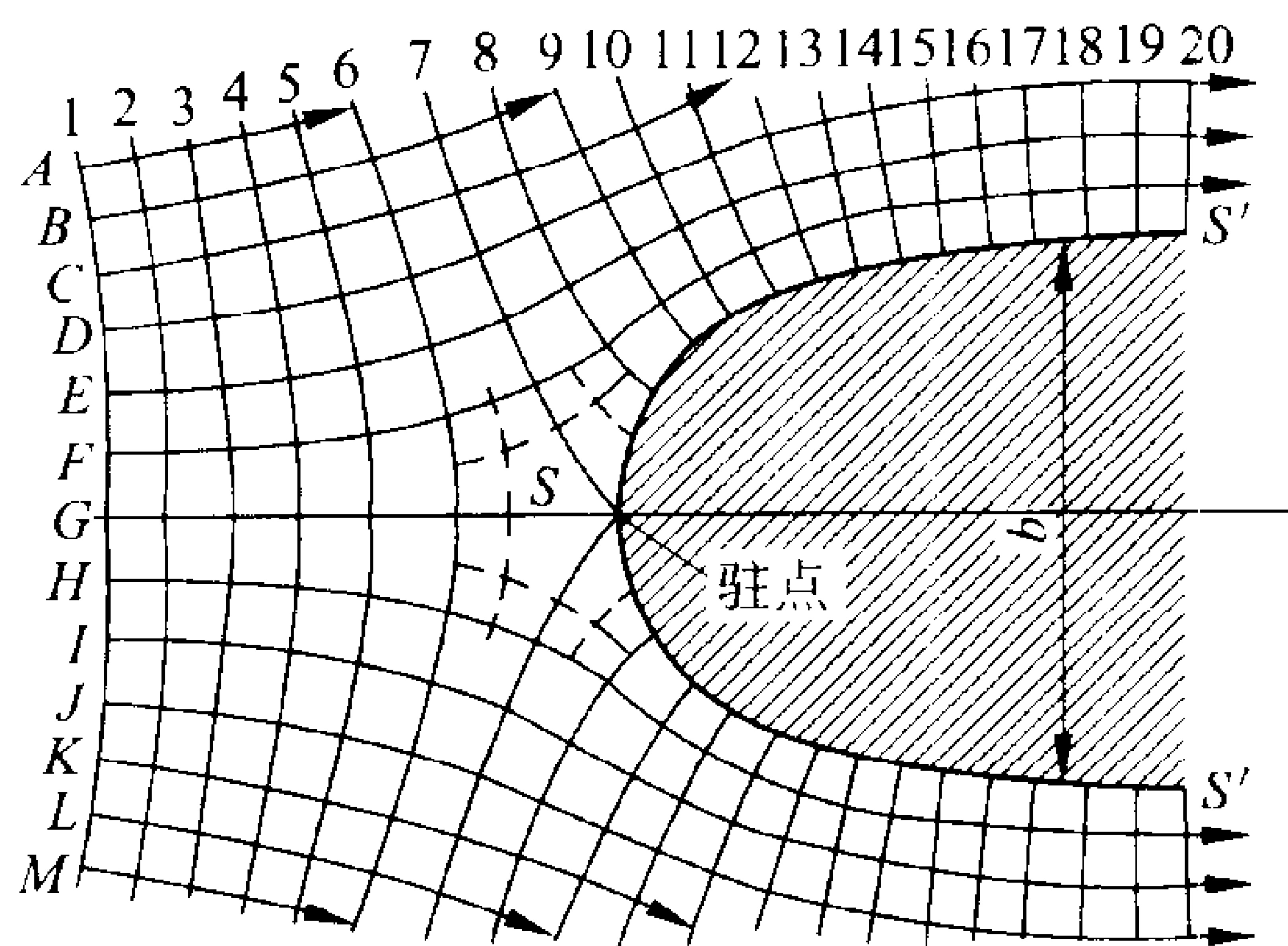


图 6-3 圆头物体绕流流网[3]

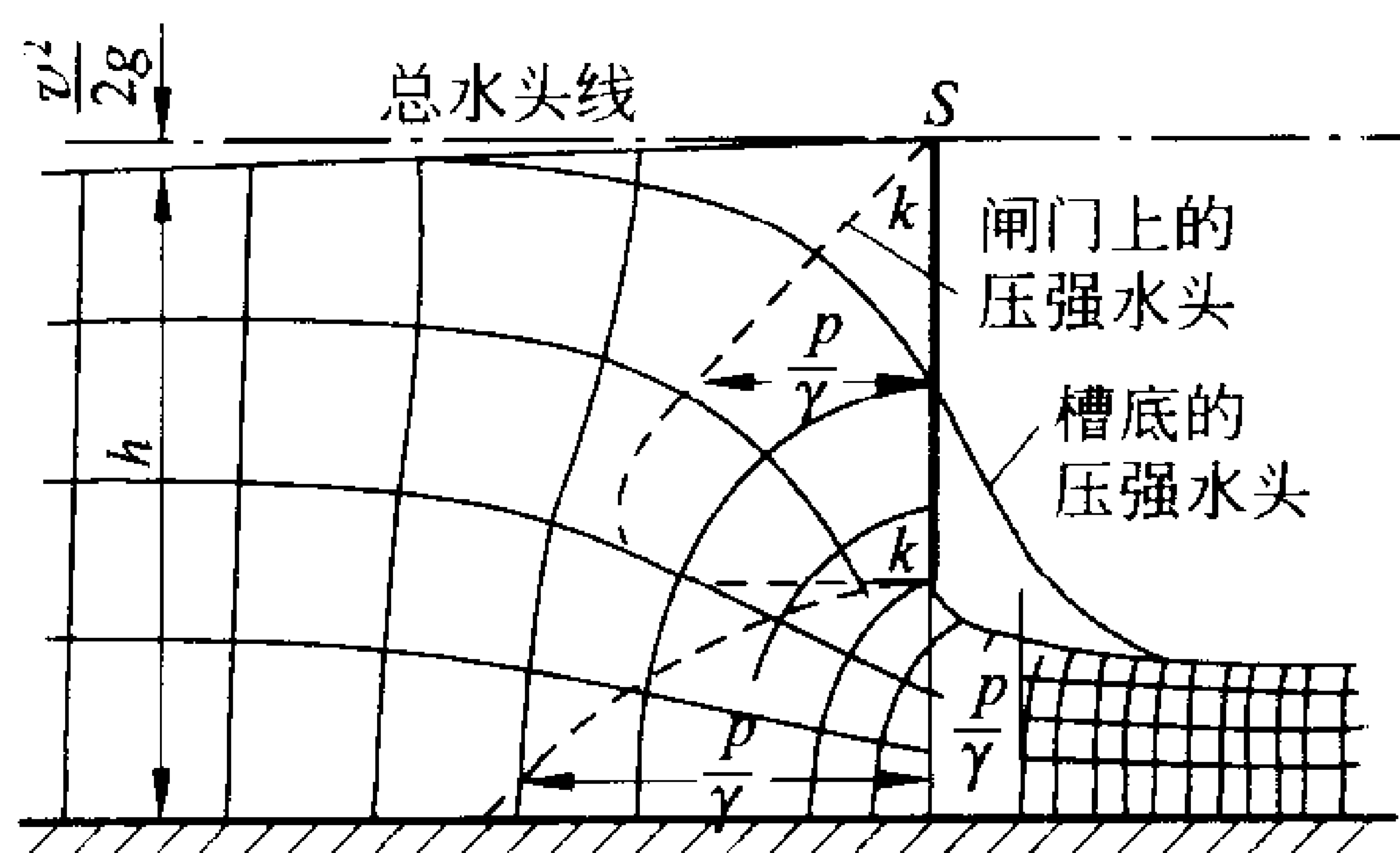


图 6-4 闸门出流流网[3]

6.4 复势与复速度

平面势流中流速分量 u 和 v 既用流速势 ϕ，也用流函数 ψ 表示，即

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

可见 ϕ 与 ψ 满足以下关系：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{6-25a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6-25b}$$

这是一对很重要的关系式，在数学分析中称为柯西-黎曼条件。由于平面势流中 ϕ 与 ψ 是满足柯西-黎曼条件的两个调和函数，由它们可以构成一个复变解析函数 $F(z)$。定义 $F(z)$为

$$F(z) = \phi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y) \tag{6-26}$$

式中：$z = x + \mathrm{i}y$ 为复变量。

如果 $F(z)$为解析函数（见附录Ⅲ.4 节），也就是说在域中某一点 z_0 及其邻域$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$存在，而且$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$值与所取方向无关，这时 ϕ 和 ψ 自动满足柯西-黎曼条件。$F(z)$的实部（real part）为势函数，虚部（imaginary part）为流函数，$F(z)$称为复势（complex potential）。显然，平面势流必然对应一个确定的复势，而一个复势也代表一种平面势流。应用复变函数的方法去解平面势流问题将可以避免解偏微分方程式的困难。

用复势来描述有势流动时，另一个重要的物理量是复势 $F(z)$ 对 z 的微分。即

$$W(z) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$$

由于 $F(z)$为解析函数，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$的值与所取方向无关（见附录Ⅲ.4 节），因此可以沿 x 轴进行微分运算，得

$$W(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

从而可以得到复势的导数与流速的如下关系：

$$W(z) = u - \mathrm{i}v \tag{6-27}$$

根据这个式子，$W(z)$称为复速度（complex velocity）。

复速度 $W(z)$的共轭函数（complex conjugate）（见附录Ⅲ.1 节）

$$\overline{W}(z) = \frac{\mathrm{d}\,\overline{F}}{\mathrm{d}z} = u + \mathrm{i}v \tag{6-28}$$

称为共轭复速度。图 6-5 表示在平面坐标中的复速度及共轭复速度。复速度的模（modulus）为

$$\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right| = \sqrt{u^2 + v^2} = U \tag{6-29}$$

表示复速度的绝对值。速度向量与 x 轴的夹角为 α，则复速度也可表示为

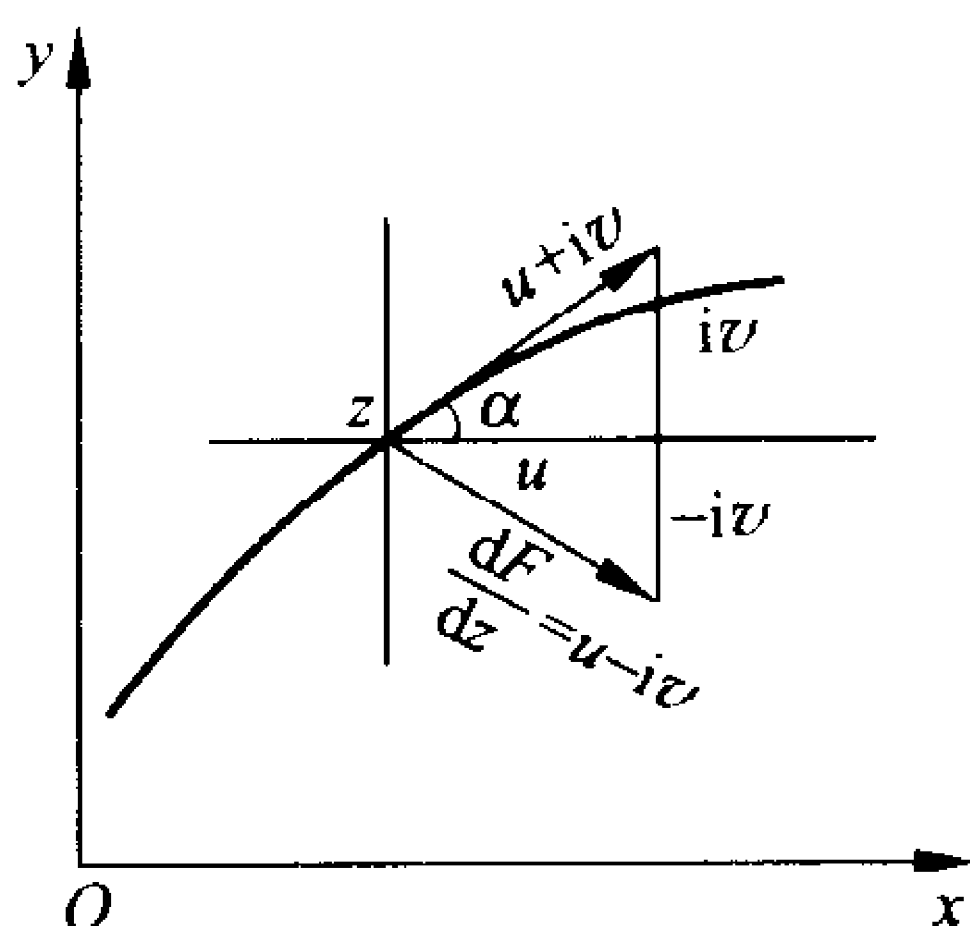


图 6-5 复速度与共轭复速度

$$W(z) = U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \tag{6-30}$$

$$\alpha = \arctan \frac{v}{u} \tag{6-31}$$

α 称为复速度的幅角（argument），简写为 $\arg W(z)$。

在某些情况下，圆柱坐标要比较方便，因此下面给出圆柱坐标中速度与复速度的表达式。图 6-6 表示一流速向量 $\boldsymbol{u}$ 在直角坐标系中分解为 x 轴上的 u 和 y 轴上的 v 两个速度分量。在圆柱坐标

上则 $\boldsymbol{u}$ 分解为径向的 u_r 和圆周向的 u_θ 两个流速分量。由图可得到以下关系：

$$u = u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta$$

$$v = u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta$$

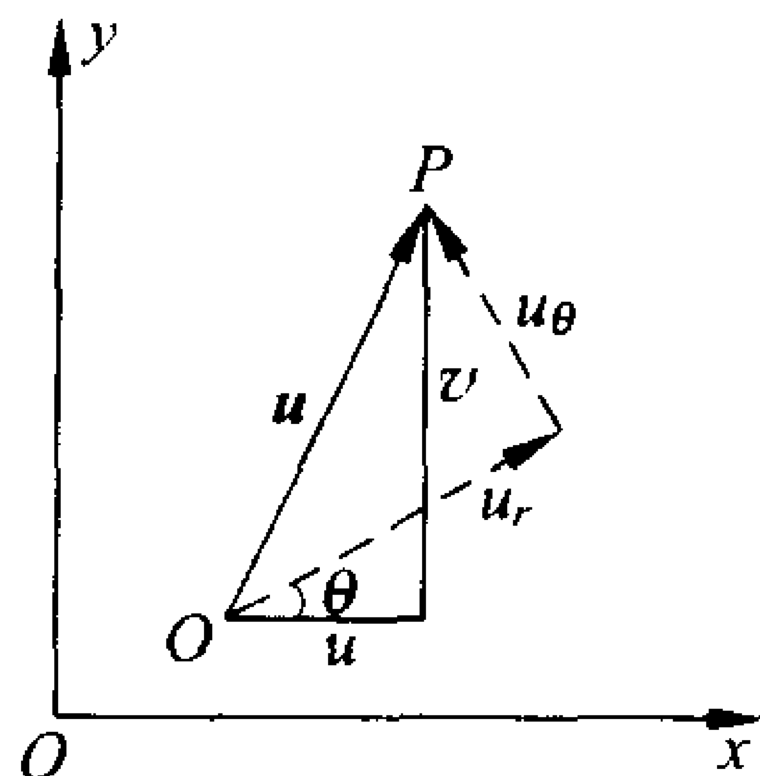


图 6-6　圆柱坐标与直角坐标中速度分量表示法

代入复速度的表示式(6-27)中，得到以圆柱坐标表示的复速度为

$$\begin{aligned} W &= (u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta) - \mathrm{i}(u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta) \\ &= u_r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) - \mathrm{i}u_\theta(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= (u_r - \mathrm{i}u_\theta)(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= (u_r - \mathrm{i}u_\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{aligned} \tag{6-32}$$

复势具有以下的性质：

(1) 复势 $F(z)$ 可以相差一任意常数而不影响所代表流场的流速和压强。

(2) 复势 $F(z)$ 等于常数也就是表示 $\phi(x,y)=\text{const}$ 和 $\psi(x,y)=\text{const}$，而它们分别代表流场中的等势线和流线，而且等势线与流线正交。

(3) 复速度沿闭曲线 L 的积分，其实部等于绕闭曲线 L 的环量，而其虚部表示穿过封闭曲线 L 的流量，即

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \oint_L \mathrm{d}F = \oint_L \mathrm{d}\phi + \oint_L \mathrm{i}\mathrm{d}\psi = \oint_L \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \mathrm{i}\oint_L \mathrm{d}q$$

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \Gamma + \mathrm{i}q \tag{6-33}$$

以 $F(z)$ 为未知函数求解绕流问题，其边界条件如下：

(1) 在物面上，复势的虚部 $\mathrm{Im}F(z)$ 为

$$\mathrm{Im}F(z) = \psi = \text{const} \tag{6-34}$$

(2) 在无穷远处，共轭复速度的分量

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}z} = \overline{W}(z) = u_\infty + \mathrm{i}v_\infty \tag{6-35}$$

分别等于无穷远处的流速分量 u_∞ 与 v_∞。

6.5 几个基本的平面势流

本节中给出几个基本的也是最简单的平面势流，由它们的组合可以给出复杂边界流动的平面势流解。

6.5.1 均匀流动

复变量的最简单的解析函数就是这个复变数 z 自身的倍数。与此相应的流动则是均匀流动。例如：当这个倍数为复数时，复势可写为

$$F(z)=U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z \tag{6-36}$$

式中：U,α 为实数。

相应的复速度 $W(z)$ 为

$$W(z)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}=U(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)=u-\mathrm{i}v$$

$$u=U\cos\alpha,\quad v=U\sin\alpha \tag{6-37}$$

式(6-37)表示一个流速场，流速均匀分布，其大小为 U，其方向与实轴成 α 角，如图 6-7 所示。与复速度共轭的函数为

$$\overline{W}(z)=U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{6-38}$$

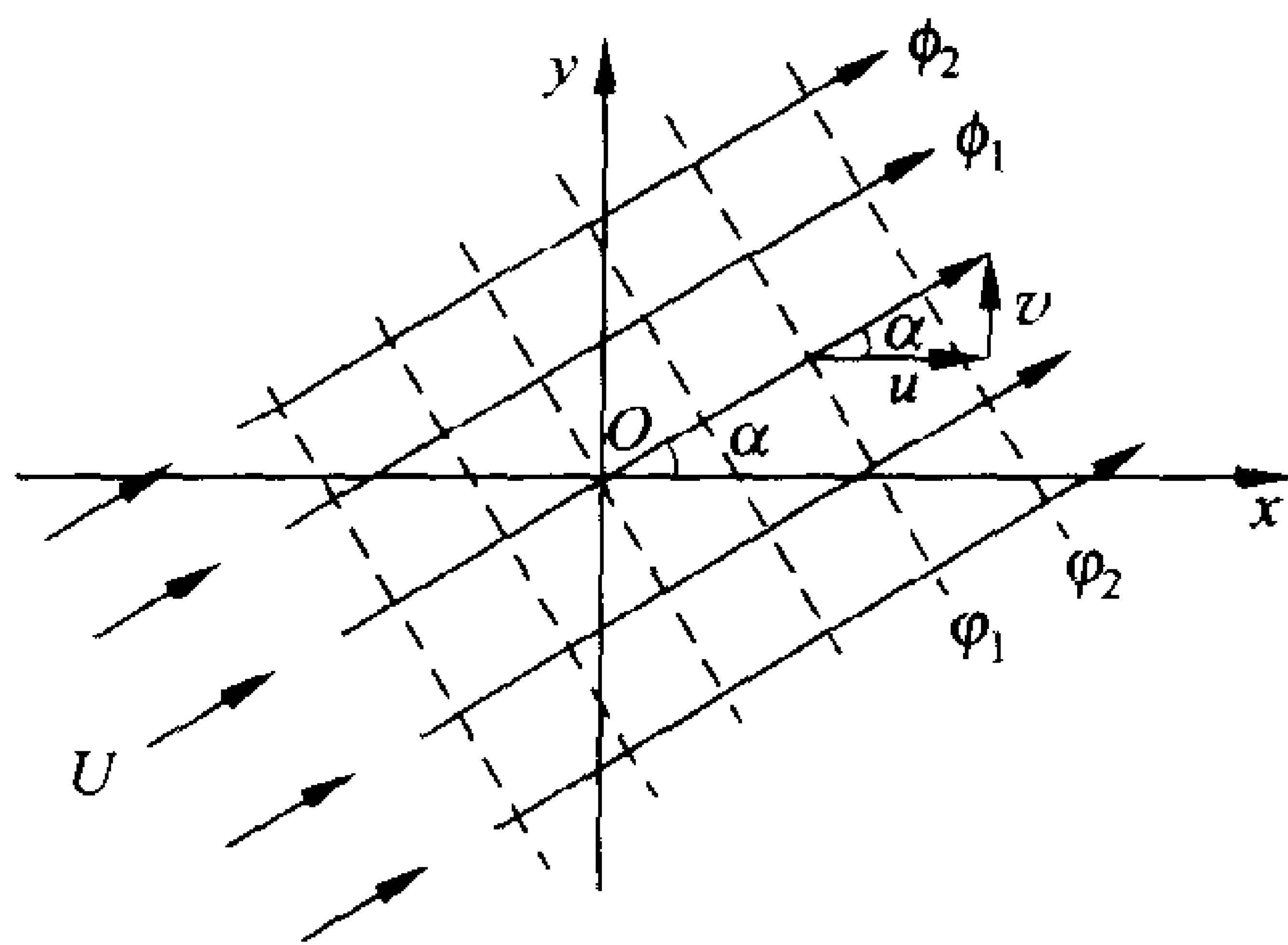


图 6-7 均匀流

式(6-38)表示流速向量。

当 $\alpha=0°$,则

$$W(z)=U \tag{6-39}$$

是表示沿 x 轴的均匀流动。

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,则

$$W(z)=-\mathrm{i}U \tag{6-40}$$

是表示与 y 轴平行的均匀流动。

由式(6-26)和式(6-36)可得 $F(z)$ 为

$$F(z)=\phi+\mathrm{i}\psi=U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z=U(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)(x+\mathrm{i}y)$$

展开后得

$$\phi+\mathrm{i}\psi=U(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+\mathrm{i}U(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\phi&=U(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\\ \psi&=U(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{6-41}$$

6.5.2 源、汇与涡

平面势流中自一点以恒定流量流出的均匀径向流动,称为源。反之,如果一定的流量均匀地由四周流入该点,称为汇。所有流体质点皆绕一点作圆周运动且流速与距该点的径长成反比的流动,称为涡(vortex)。源、汇与涡从数学上看都是复势与 z 的对数 $\ln z$ 成比例的流动。

用复变数 z 的模为 r,幅角为 θ 表示,即

$$z=x+\mathrm{i}y=re^{\mathrm{i}\theta}$$

规定对数函数 $\ln z$ 在主值范围 $0\leqslant\theta<2\pi$ 内取值,令

$$F(z)=\frac{m}{2\pi}\ln z \tag{6-42}$$

式中:m 为实数。

则

$$F(z)=\phi+\mathrm{i}\psi=\frac{m}{2\pi}\ln r+\mathrm{i}\,\frac{m}{2\pi}\theta$$

$$\phi=\frac{m}{2\pi}\ln r \tag{6-43a}$$

$$\psi=\frac{m}{2\pi}\theta \tag{6-43b}$$

由此可计算径向流速 u_r 及圆周向流速 u_θ。即

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{m}{2\pi r} \tag{6-44a}$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \tag{6-44b}$$

式(6-43)说明流动的等势线是 $r=\mathrm{const}$ 的一族圆而流线是自源点出发的径向直线 $\theta=\mathrm{const}$，如图6-8所示。图中实线为流线，虚线为等势线。这个流动称为源。在源的流动中径向流速随半径 r 的增加而成比例减小。因此源所在的点，在图 6-8 中即为原点，其流速 u_r 为无穷大，流速函数的连续性遭到破坏，是一个奇点(见附录Ⅲ.5 节)。对于源点，m 表示直线线源(三维)单位长度上(二维)的流量，常称为源的强度。

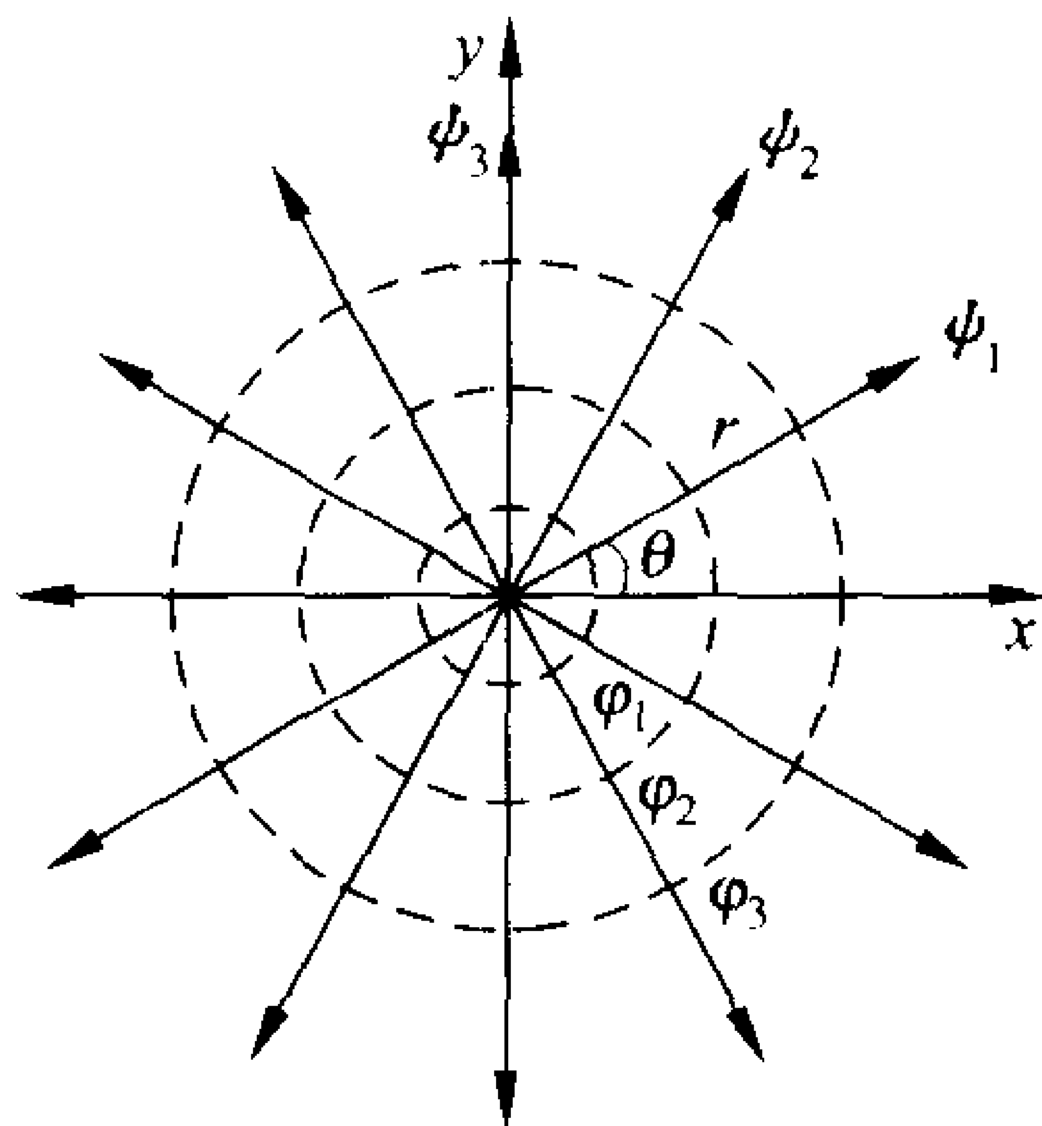


图 6-8　源

绕源点的环量 Γ 为

$$\Gamma=\oint_L \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{2\pi}u_\theta r\,\mathrm{d}\theta=0$$

由源点流出的流量 Q 在任意 r 的圆周上都是相同的，

$$Q=\int_0^{2\pi}u_r r\,\mathrm{d}\theta=m>0 \tag{6-45}$$

如果源并不处于原点而是处于 $z=z_0$ 点，则源的复势可写为

$$F(z) = \frac{m}{2\pi}\ln(z - z_0) \qquad (6\text{-}46)$$

如果式(6-42)或式(6-46)中的 $m<0$,则表示“汇”。

流线和等势线是两族互相正交的曲线。单纯从几何的观点来看,取哪一族曲线为等势线,取哪一族曲线为流线并无不同,因此这两族函数 ϕ 与 ψ 称为共轭函数(conjugate function)。如果能求出某一流动问题的解,如得到它满足边界条件的流速势函数 ϕ 的分布,当然也就得到流函数 ψ 的分布。这时也就得到了另外一个平面问题的解,在这个问题中 ψ 将作为流速势而 ϕ 则作为流函数。

这里对“源”作这样的处理,把源点的等势线作为流线而把源点的流线作为等势线,从而得到一种如图6-9所示的流动——涡。这种互换只需将源的复势式(6-42)乘以$-\mathrm{i}$,即

$$F(z)=\frac{-\mathrm{i}m}{2\pi}\ln z \qquad (6\text{-}47)$$

这时复势 $F(z)$ 与 $\ln z$ 的比例常数为虚数。由复势可以确定流速势 ϕ 为

$$\phi = \frac{m}{2\pi}\theta \qquad (6\text{-}48)$$

流函数为

$$\psi=-\frac{m}{2\pi}\ln r \qquad (6\text{-}49)$$

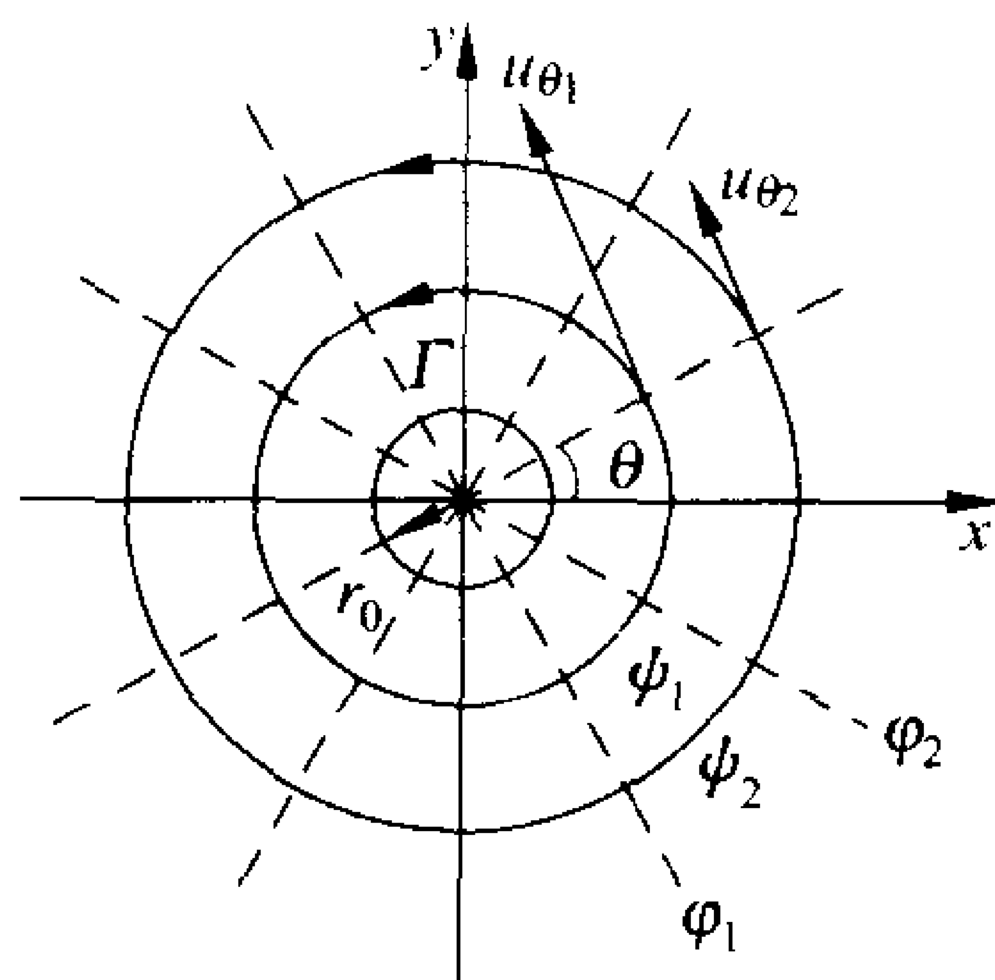


图 6-9 涡

用求复速度的方法确定流速场。复速度 $W(z)$为

$$W(z)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{\mathrm{i}m}{2\pi}\ln z\right)$$

$$=-\frac{\mathrm{i}m}{2\pi z}=-\frac{\mathrm{i}m}{2\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad (6\text{-}50)$$

从而由式(6-32)得

$$u_r = 0 \qquad (6\text{-}51a)$$

$$u_\theta = \frac{m}{2\pi r} \tag{6-51b}$$

等势线为自原点出发的径向直线(图 6-9 中的虚线)而流线则为一族圆(图 6-9 中的实线),$m>0$ 时 u_θ 为正,表示反时针方向流动。涡的强度可以环绕它封闭流线的环量 Γ 来表示,即

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} u_\theta r\,\mathrm{d}\theta = m$$

可以将复势式(6-47)中的 m 代以 Γ,则涡的复势为

$$F(z) = -\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z \tag{6-52}$$

如果涡不在原点,而是位于 $z=z_0$ 处,则复势为

$$F(z) = -\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0) \tag{6-53}$$

由涡点向外射出的流量显然为零。式(6-52)或式(6-53)所代表的涡称为自由涡(free vortex)。也就是说涡所在的点为一奇点,任意不包围此奇点的封闭曲线,环量将为零,因而流动都是无涡的,所有环量和涡量都只是集中在涡点上。在涡点处流速为∞,流动的连续性遭到破坏,而且在涡点 Γ 不为零,流动的无涡性也遭到破坏,此点同样为一奇点。

6.5.3 绕角流动

复势与 z^n 成比例的流动为绕角流动,如图 6-10 所示。这类流动的复势为

$$F(z) = Uz^n \tag{6-54}$$

式中:U 为实数,n 为正实数。

1. 当 $n=1$,其复势表示如下:

$$F(z) = Uz \tag{6-55}$$

复速度 $W(z)$ 为

$$W(z) = U \tag{6-38}$$

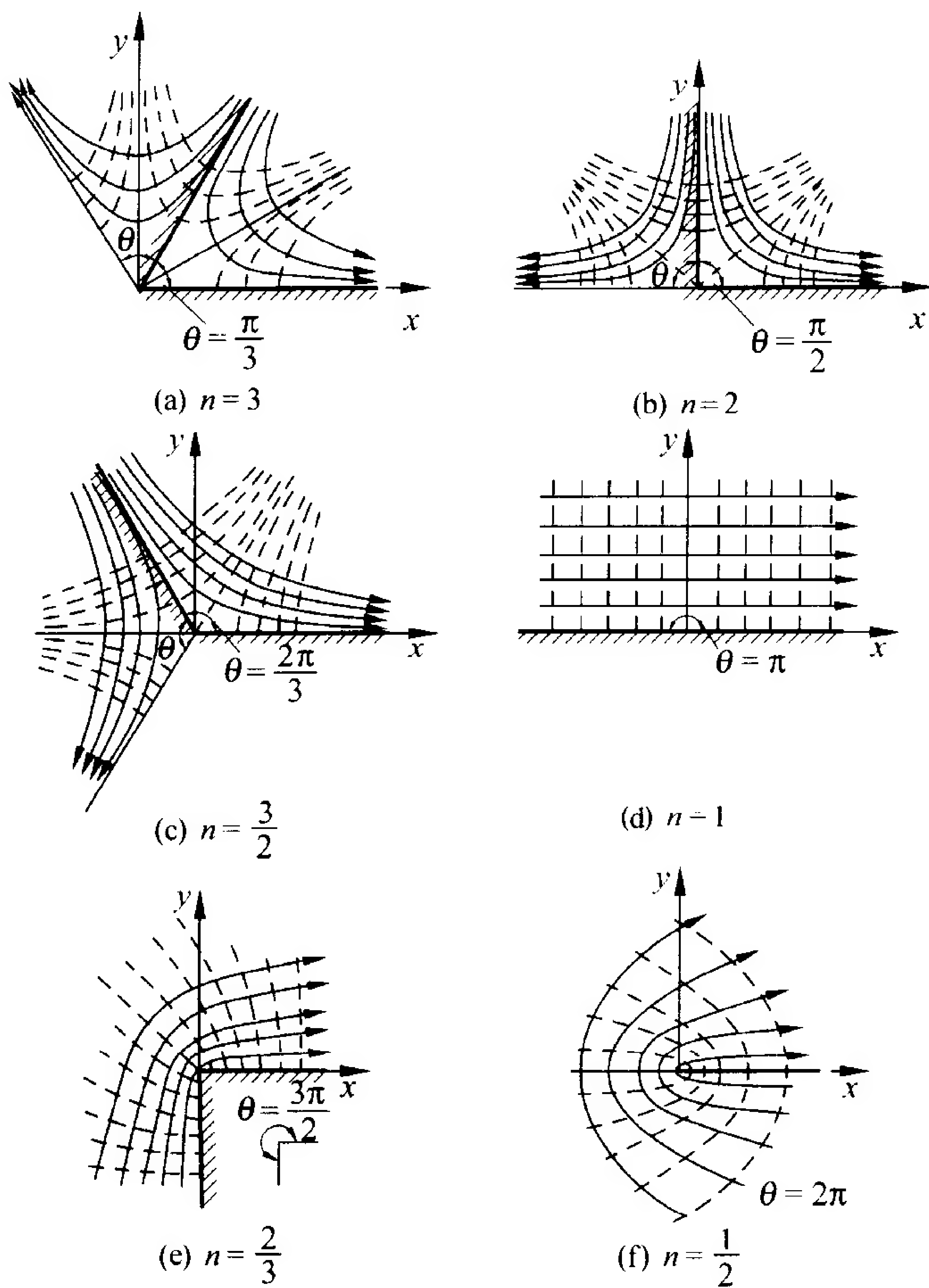


图 6-10　绕角流动[7]

即全部流场内的流速均为 U，即均匀流，如图 6-10(d)所示。

2. 当 $n>1$，令 $z=re^{i\theta}$，将复势中实部与虚部分开，表示如下：

$$F(z)=Ur^n\cos n\theta+iUr^n\sin n\theta \tag{6-56}$$

可见流速势 ϕ 与流函数 ψ 分别为

$$\phi = Ur^n \cos n\theta \tag{6-57a}$$

$$\psi = Ur^n \sin n\theta \tag{6-57b}$$

当 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{n}$ 时流函数 $\psi=0$，说明：这两条流线是两条相当于固体边界的边界线，流动正是在这两条边界线内发生的角隅内的流动，如图 6-10 中的(a)，(b)，(c)。图 6-11 更比较详细地绘出了这种流动的流线和等势线。复速度可由复势微分给出

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = nUz^{n-1} \\ &= nUr^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta} \\ &= (nUr^{n-1}\cos n\theta + \mathrm{i}nUr^{n-1}\sin n\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{aligned}$$

可知

$$u_r = nUr^{n-1}\cos n\theta \tag{6-58a}$$

$$u_\theta = -nUr^{n-1}\sin n\theta \tag{6-58b}$$

在 $0<\theta<\frac{\pi}{2n}$ 区域内 u_r 为正而 u_θ 为负，在 $\frac{\pi}{2n}<\theta<\frac{\pi}{n}$ 区域内 u_r 为负而 u_θ 仍为负数，即顺时针方向。

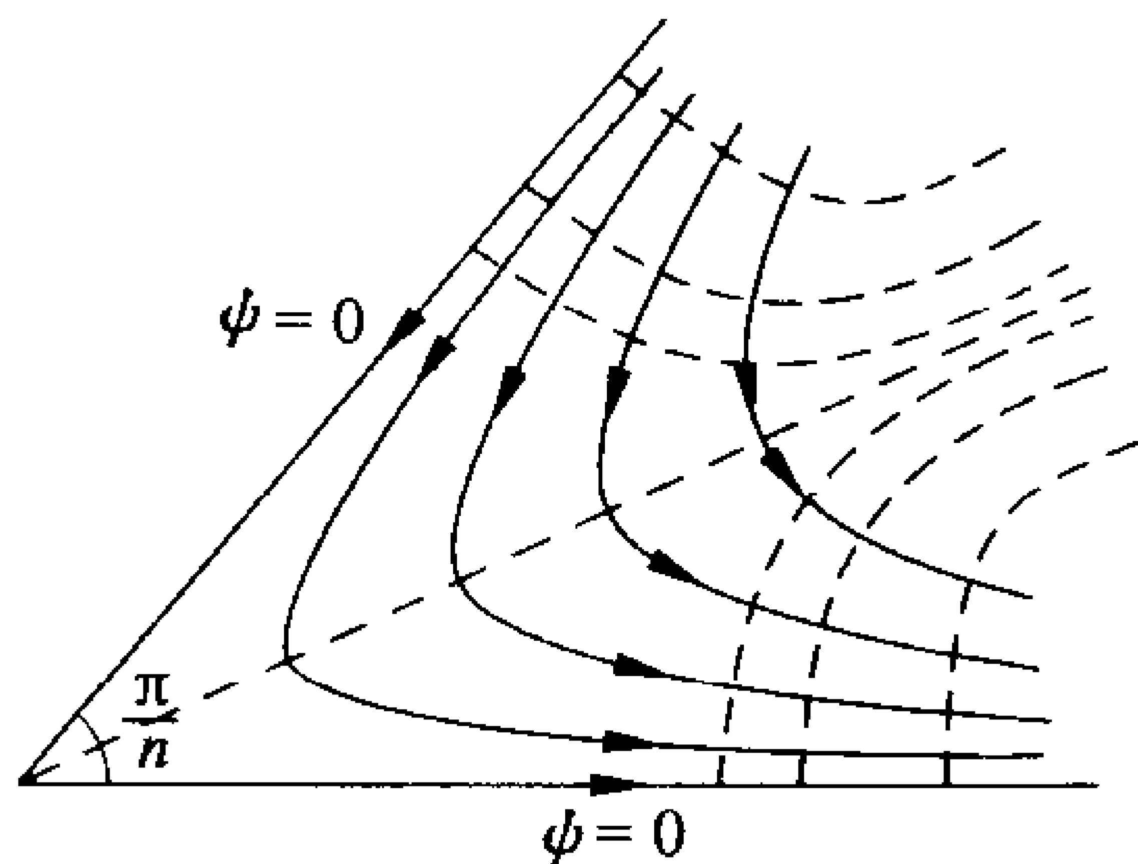


图 6-11　角隅内流动[11]

当 $n=2$ 时是角隅内流动的一种特殊情形，称为驻点流动(stagnation point flow)，如图6-12所示。对于驻点流动的复势表示如下：

$$F(z)=Uz^2$$
$$=Ur^2\cos 2\theta+\mathrm{i}Ur^2\sin 2\theta \tag{6-59}$$

流速势 ϕ 与流函数 ψ 分别为

$$\phi = Ur^2\cos 2\theta \tag{6-60a}$$

$$\psi = Ur^2\sin 2\theta \tag{6-60b}$$

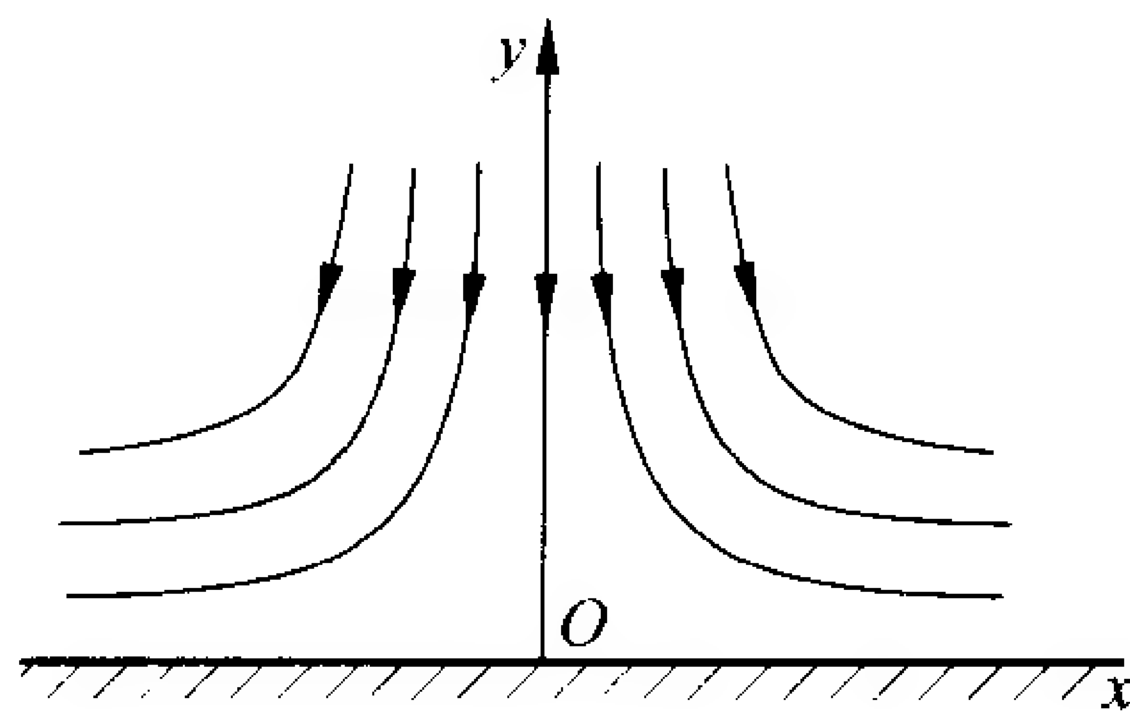


图 6-12 驻点流动

当 $\theta=0$ 和 π 时，相当于固体的边界线，而当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，则相当于驻点流动的对称中线，同时这些线也是流线。其复速度 $W(z)$ 为

$$W(z) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = 2Uz \tag{6-61}$$

在直角坐标内，复速度为

$$W(z)= u-\mathrm{i}v = 2U(x+\mathrm{i}y)$$

即

$$u= 2Ux \tag{6-62a}$$

$$v=-2Uy \tag{6-62b}$$

而在极坐标内则复速度为

$$u_r= 2Ur\cos 2\theta \tag{6-63a}$$

$$u_\theta=-2Ur\sin 2\theta \tag{6-63b}$$

在坐标原点（$x=0, y=0$），流速 $u=0, v=0$ 为驻点。如果驻点位于 z_0，则该驻点流动的复势为

$$F(z) = U(z-z_0)^2 \tag{6-64}$$

驻点流动的流线方程式可由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{u}=\frac{-y}{x}$ 积分求得

$$xy = \text{const}$$

所以流线为一族以 x 轴和 y 轴为渐近线的双曲线。当流动恒定时，压强分布可由伯努利方程式(2-98) $p+\frac{\rho u^2}{2}=\text{const}$ 得出。此

时令驻点压强为 p_0，则

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{u}^2} = 4(x^2 + y^2)$$

等压线是一族同心的圆。

3. 当 $n<1$ 时，为绕锐角外部的流动。例如图 6-10 中(e)所表示的 $n=\frac{2}{3}$，为绕直角外部的流动。当 $n=\frac{1}{2}$时得到一个绕平板前缘的流动，这时可理解为 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{1/2}=2\pi$ 为两条零流线，所以是在 2π 角内的流动。平板前缘的绕流是一种很重要的平面势流，本节中予以详述。当 $n=\frac{1}{2}$，复势为

$$F(z) = Uz^{\frac{1}{2}} \tag{6-65}$$

U 为实数，令 $z=re^{i\theta}$，于是

$$\begin{aligned} F(z) &= U(re^{i\theta})^{\frac{1}{2}} \\ &= Ur^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} + iUr^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{6-66}$$

可得流速势 ϕ 和流函数 ψ 为

$$\phi = Ur^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \tag{6-67a}$$

$$\psi = Ur^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{6-67b}$$

图 6-13 中画出了等势线和流线。在 $0<\theta<\pi$ 的区域内流速势函数 ϕ 为正值，而在 $\pi<\theta<2\pi$ 的区域内流速势函数 ϕ 为负值，当 $\theta=\pi$时，$\phi=0$，读者需要注意在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 的分隔线以上和以下的等势线也是被分隔的。流速的方向可由复速度 $W(z)$确定。

$$W(z)=\frac{dF}{dz}=\frac{U}{2z^{\frac{1}{2}}}=\frac{U}{2r^{\frac{1}{2}}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\theta} \tag{6-68}$$

从而得到径向和圆周向流速为

$$u_r = \frac{U}{2r^{\frac{1}{2}}}\cos\frac{\theta}{2} \tag{6-69a}$$

$$u_\theta = -\frac{U}{2r^{\frac{1}{2}}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{6-69b}$$

由此可见：在 $0<\theta<\pi$ 区域 $u_r>0, u_\theta<0$，而在 $\pi<\theta<2\pi$ 区域内则 $u_r<0, u_\theta<0$。流速方向如图 6-13 中所示。在平板前缘 $r=0$ 点处流速变为无穷大，这个点是奇点。

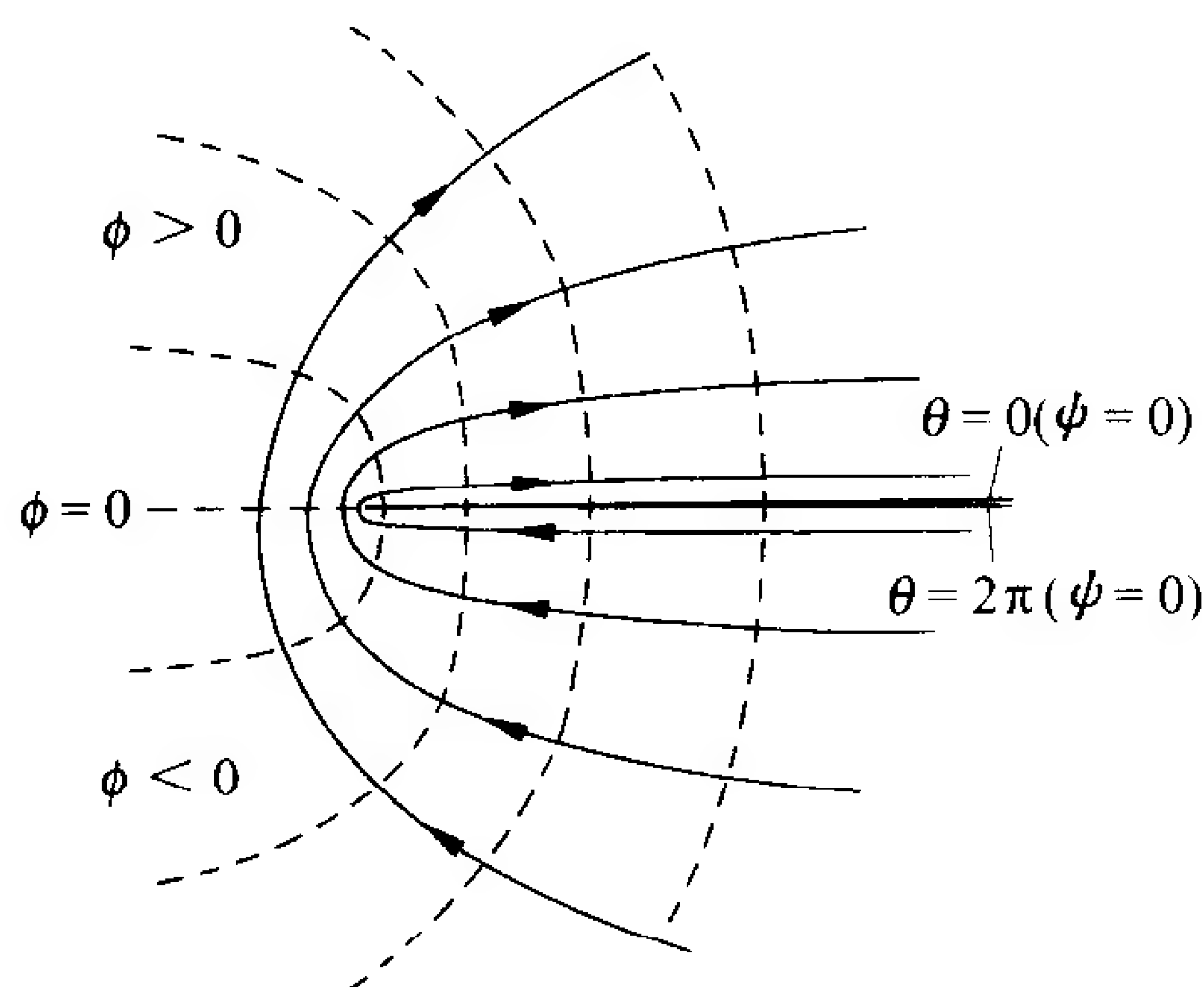


图 6-13 平板前缘绕流[11]

当 $n<\frac{1}{2}$，由于 $F(z)=Uz^n$ 所代表的流动的流线彼此相交，如图 6-14 所示，因而在物理上没有意义，所以绕角流动中限制 $n>\frac{1}{2}$。

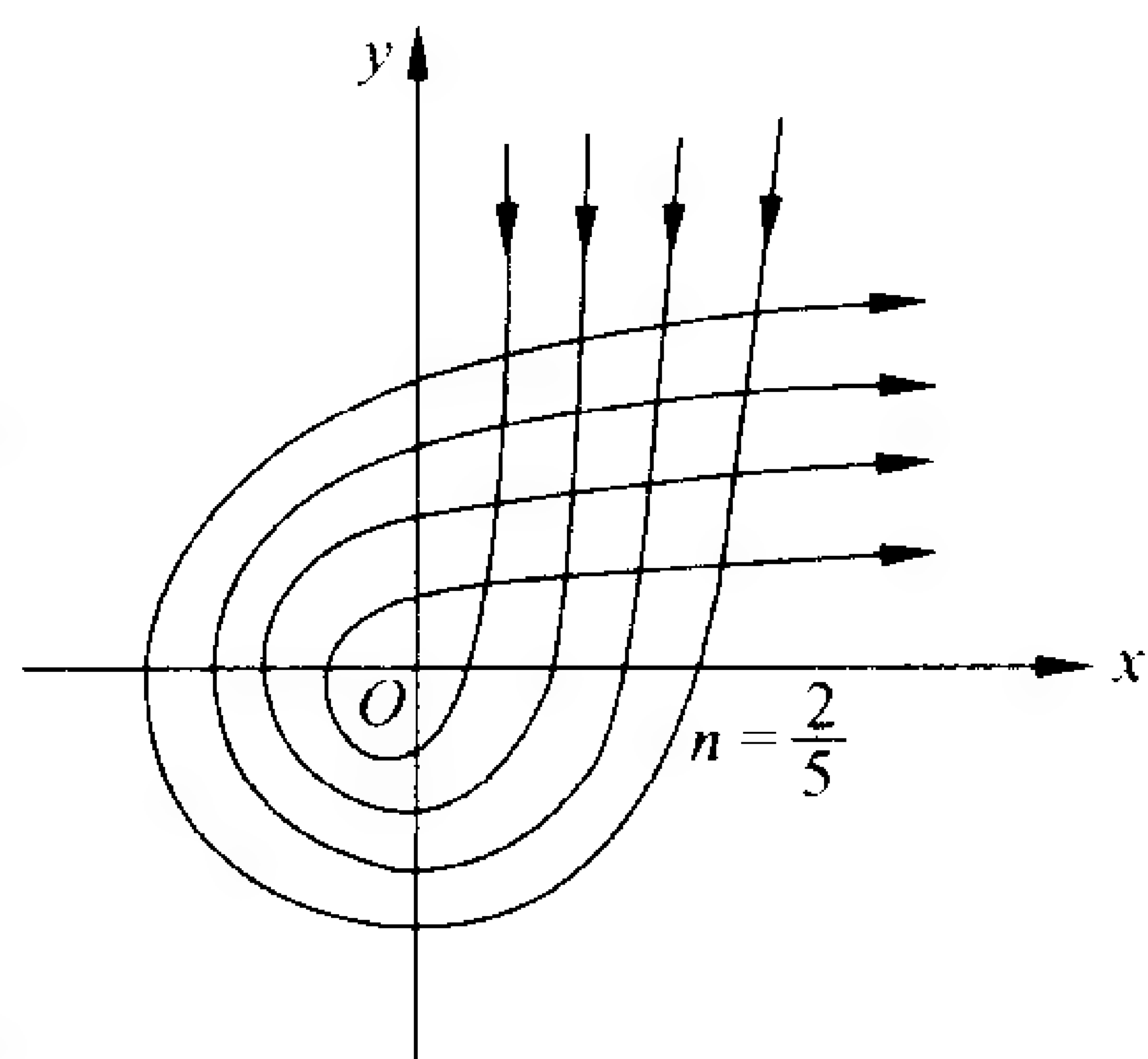


图 6-14 $n<\frac{1}{2}$ 的流动[1]

6.5.4 偶极子

一对相同强度的源与汇在平面上无限靠近，当它们之间的距离为

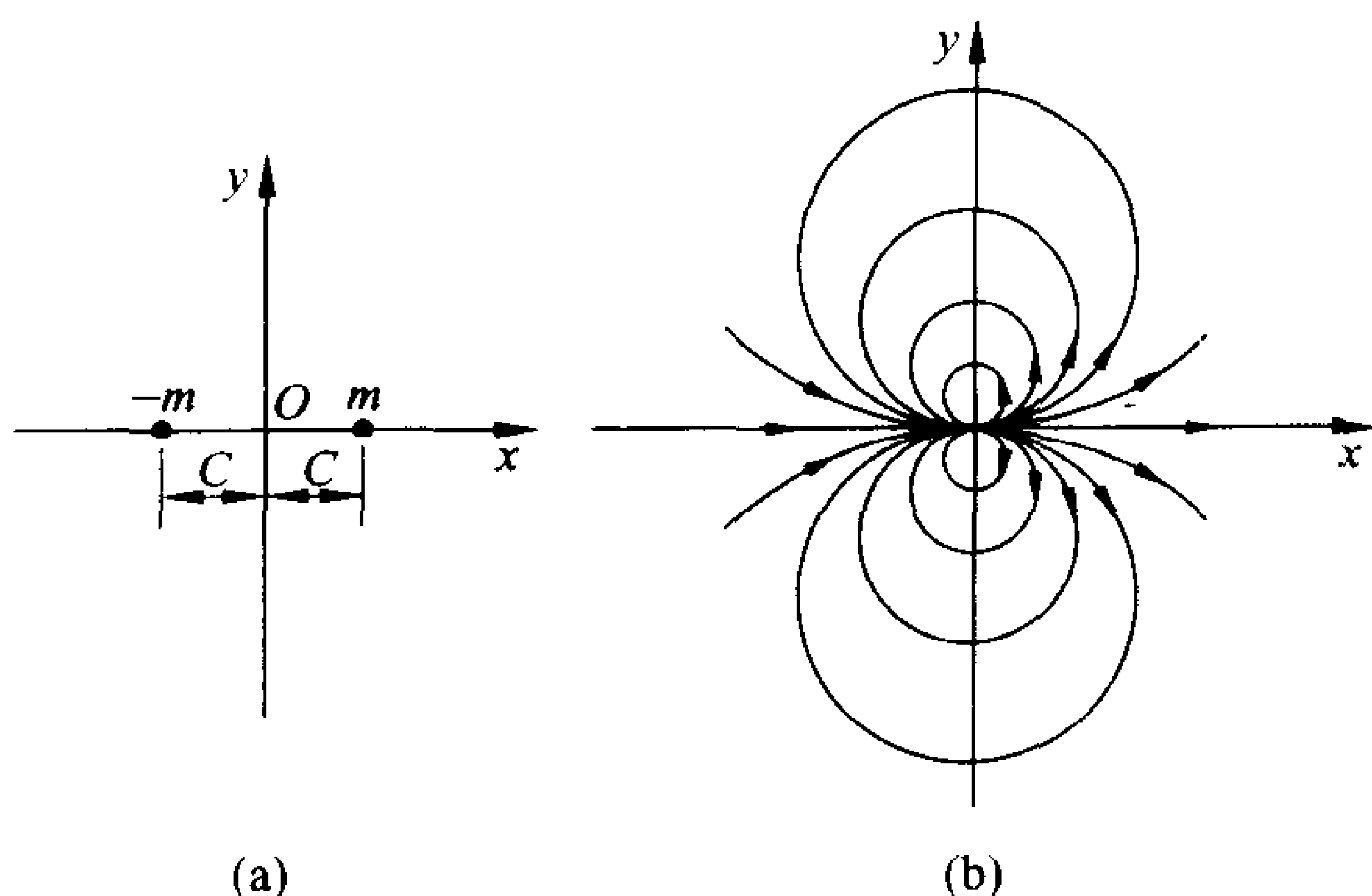


图 6-15　偶极子[11]

无穷小量，而强度与距离的乘积却趋近一个有限值时，这一对源与汇组成一个偶极子(doublet)。设强度为 m 的源位于 $z=\varepsilon$ 点，而强度同样为 m 的汇位于 $z=-\varepsilon$ 点，这时在 x 轴上形成正 x 方向的流速，如图 6-15。定义该源与汇为正偶极子，其复势为

$$F(z)=\frac{m}{2\pi}\ln(z-\varepsilon)-\frac{m}{2\pi}\ln(z+\varepsilon)$$

$$=\frac{m}{2\pi}\ln\left(\frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{m}{2\pi}\ln\left(\frac{1-\dfrac{\varepsilon}{z}}{1+\dfrac{\varepsilon}{z}}\right)$$

令 $\varepsilon\to 0$ 而 $m\to\infty$ 使 $m(2\varepsilon)=\mu=\text{const}$，$\mu$ 为偶极子的强度或称偶极矩(dipole strength, dipole moment)。式中的 $\left(1+\dfrac{\varepsilon}{z}\right)^{-1}$ 用幂级数展开为

$$\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon}{z}}=1-\frac{\varepsilon}{z}+\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{2}-\cdots$$

因此

$$F(z) = \frac{m}{2\pi}\ln\left(\frac{1-\frac{\varepsilon}{z}}{1+\frac{\varepsilon}{z}}\right) = \frac{m}{2\pi}\ln\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{z}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{z}\right)+o\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^2\right]$$

式中：$o\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^2$ 表示为二阶以下的小量。

所以

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{m}{2\pi}\ln\left[1-2\frac{\varepsilon}{z}+o\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^2\right] \\ &= \frac{m}{2\pi}\left[1-2\frac{\varepsilon}{z}+o\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^2\right] \\ &= -\frac{\mu}{2\pi z} \end{aligned} \tag{6-70}$$

式中将对数函数已展开为级数。式(6-70)为偶极子的复势。也就是一个源和相同强度的汇放在一起，距离甚近时的叠加。为了得到相应的流场，可将式(6-70)作一些变化，设 $z=x+iy$，与其共轭的复数 $\bar{z}=x-iy$，则

$$F(z) = -\frac{\mu}{2\pi z} = -\frac{\mu\bar{z}}{2\pi z\bar{z}} = -\frac{\mu}{2\pi(x^2+y^2)}(x-iy)$$

从而可知，当 $x^2+y^2=r^2$ 时，得

$$\phi = -\frac{\mu x}{2\pi r^2} = -\frac{\mu\cos\theta}{2\pi r} \tag{6-71}$$

$$\psi = \frac{\mu y}{2\pi r^2} = \frac{\mu\sin\theta}{2\pi r} \tag{6-72}$$

流线方程式为

$$\psi = \frac{\mu\sin\theta}{2\pi r} = C \tag{6-73}$$

或者写为

$$x^2 + \left(y-\frac{\mu}{4\pi C}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{4\pi C}\right)^2 \tag{6-74}$$

说明流线是一族圆，圆心在 $x=0, y=\frac{\mu}{4\pi C}$ 上，而半径 $r=\frac{\mu}{4\pi C}$，见图 6-15 所示。流场的复速度为

$$W(z)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=\frac{\mu}{2\pi z^2} \tag{6-75}$$

将 $z=re^{i\theta}$ 代入上式，可得流速。即

$$W(z)=\frac{\mu}{2\pi r^2}e^{-i2\theta}$$

$$=\frac{\mu}{2\pi r^2}(\cos\theta-i\sin\theta)e^{-i\theta} \tag{6-76}$$

$$u_r=\frac{\mu}{2\pi r^2}\cos\theta \tag{6-77}$$

$$u_\theta=\frac{\mu}{2\pi r^2}\sin\theta \tag{6-78}$$

位于流场中任意一点 $z=z_0$ 处的偶极子，其复势为

$$F(z)=-\frac{\mu}{2\pi(z-z_0)} \tag{6-79}$$

偶极子常被用来与其他基本势流叠加，以得到比较复杂的流动的解。偶极子中如果源与汇的位置互换，则为负的偶极子，但其复势应为正值，即

$$F(z)=\frac{\mu}{2\pi z} \tag{6-80}$$

从而流速的方向与图 6-15 相反。总之流速方向应该是自源点出来而进入汇点，在 x 轴上的流速方向决定偶极子的正负。

由式(6-77)和式(6-78)还可得出，在距偶极子 r 处流速的绝对值为 $|\boldsymbol{u}|$。即

$$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{u_r^2+u_\theta^2}=\frac{\mu}{2\pi r^2} \tag{6-81}$$

由此可见：以偶极子为中心的圆周上各点的流速值为常数且与 r^2 成反比。当 $r\to 0$，$|\boldsymbol{u}|\to\infty$，所以偶极子也是流场中的一个奇点。

6.6 圆柱绕流

在讨论了一些基本的平面势流解后，本节将研究的是，使它们进行叠加以解决某些实际流动的问题。最基本的例子是用势流叠加方法研究圆柱绕流。

6.6.1 无环量圆柱绕流

将均匀流与位于原点的偶极子叠加，所形成流动的复势可由式(6-36)和式(6-70)得到

$$F(z) = Uz + \frac{\mu}{2\pi z} \tag{6-82}$$

这里均匀流的复势是令式(6-36)中 $\alpha = 0°$，即流动为沿 x 轴的自左向右的均匀流动；偶极子是源点在左，汇点在右所组成负方向的偶极子。如图 6-16 所示。复速度可以得出为

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = U - \frac{\mu}{2\pi z^2} \tag{6-83}$$

如果令 $W(z) = U - \frac{\mu}{2\pi z^2} = 0$，可以找到流场中相当于驻点的位置。

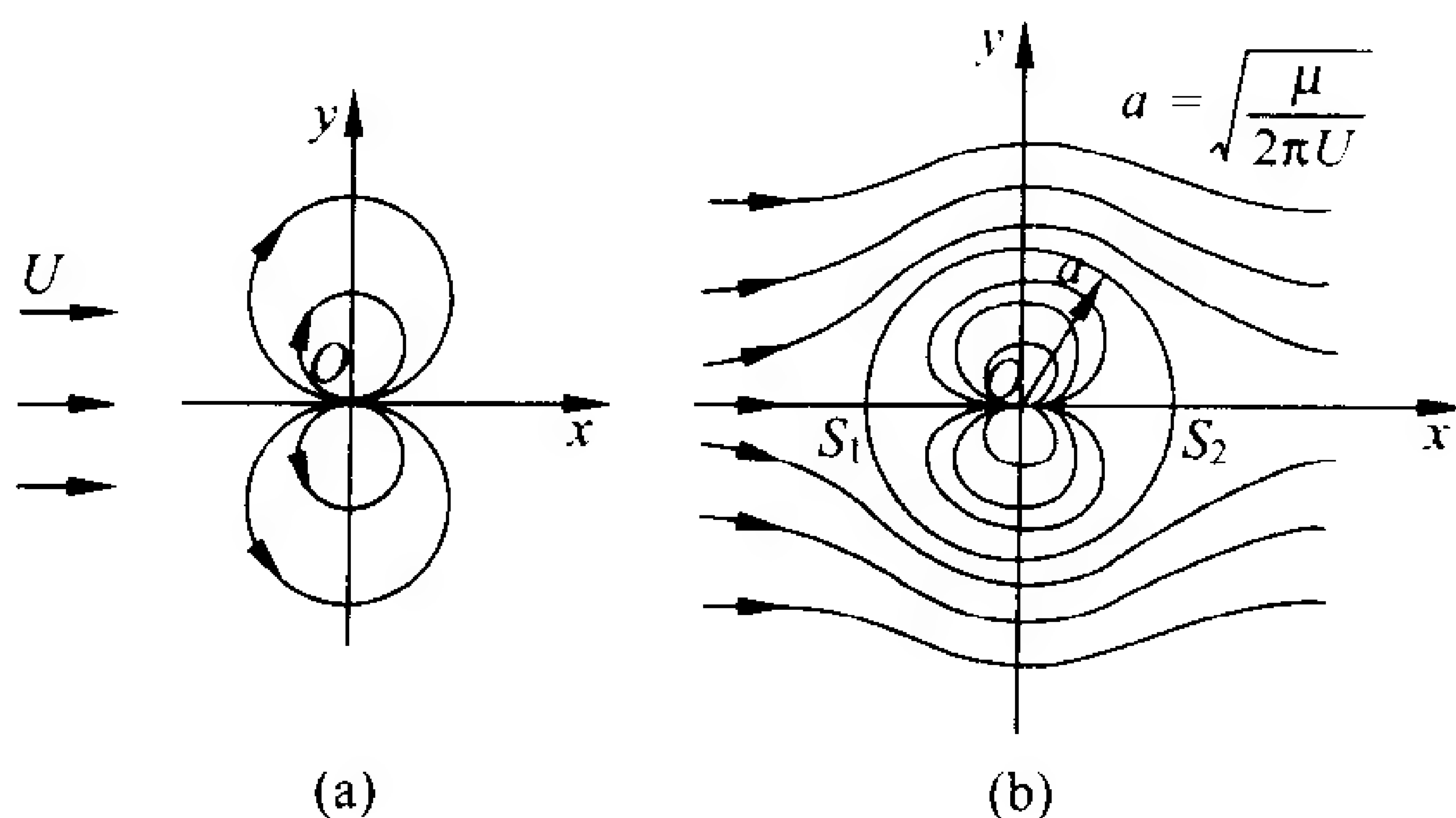


图 6-16 均匀流与偶极子叠加

这时

$$U-\frac{\mu}{2\pi z^2}=0$$

$$z^2=\frac{\mu}{2\pi U}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{\mu}{2\pi U}}=\pm a$$

如图 6-16 中的 S_1 和 S_2 点为驻点。将 a 的数值，$a^2=\frac{\mu}{2\pi U}$代入式(6-82)，得

$$F(z)=Uz+U\frac{a^2}{z}=U\left(z+\frac{a^2}{z}\right) \tag{6-84}$$

引入 $z=re^{i\theta}$，得

$$F(z)=U\left(re^{i\theta}+\frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right)=\phi+i\psi \tag{6-85}$$

展开式(6-85)可得流速势 ϕ 及流函数 ψ，即

$$\phi=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta \tag{6-86a}$$

$$\psi=U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \tag{6-86b}$$

流速也可由此得到

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{6-87a}$$

$$u_\theta=\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}=-U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \tag{6-87b}$$

因 u_θ 是以逆时针方向为正，此式中的负号说明 u_θ 是沿 x 正方向的。在远离圆形边界即 $r\gg a$ 处，$u_r=U\cos\theta$，$u_\theta=-U\sin\theta$，而流速的绝对值$\left|\sqrt{u_r^2+u_\theta^2}\right|=U$。说明这些地方的流动并未受到影响。当$\theta=0$，$\theta=\pi$ 或 $r=a$ 时，$\psi=0$ 为零的流线，可以假定这些边界为固体边界。在 $r=a$ 的圆形边界上 $u_r=0$，即$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{\partial\phi}{\partial n}=u_r=0$，说明

这个边界上没有流动穿过，为不透水边界。图 6-17 为式(6-84)的复势所表示的流动和绕过以 a 为半径的圆柱体的流动，二者完全相同。由图 6-17(a)看出由偶极子引致的流动完全限制在 $r=a$ 的圆内，而均匀流则受偶极子的影响而形成绕 $r=a$ 的圆柱绕流流动。$r=a$ 的圆周对于其内外的两个流场是共同的。在这种流动情况下如果用一个半径为 a 的薄金属圆壳在流场中 $r=a$ 的流线位置处插入，则流动并不会受到扰动。这时圆壳内的由偶极子引致的流动可以移去而并不影响外部的流动。圆壳内部当然可以以物料填充成为圆柱体。这就是用均匀流与偶极子叠加形成圆柱绕流的原因。

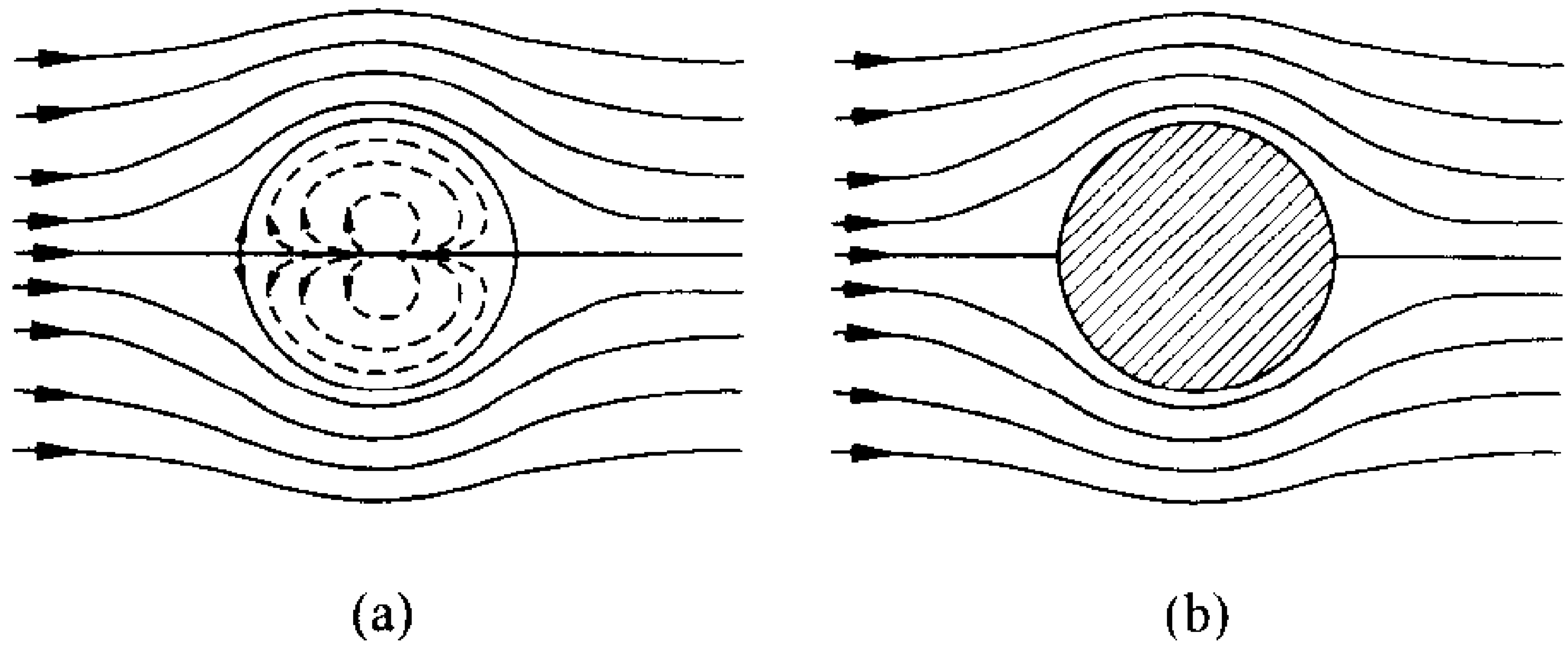


图 6-17　圆柱绕流(无环量)[11]

由式(6-87)可知，在圆柱面上，$r=a$ 时

$$u_\theta = -2U\sin\theta \tag{6-88}$$

$\theta=0,\pi$ 处 $u_\theta=0$，在柱面上 $u_r=0$，所以这两点为驻点，在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $u_\theta=-2U$，为切向最大流速的位置。

对于恒定、无旋流动，伯努利方程为

$$p+\frac{\rho u^2}{2}=C \tag{2-98}$$

对于无穷远未受扰动流动，即 $p=p_\infty$，$u=U$，代入上式得常数 $C=p_\infty+\dfrac{\rho U^2}{2}$，从而可知流场中一点处的压强 p。即

$$p = C - \frac{\rho u^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho u^2}{2}$$

在柱面上 $u_r=0, u_\theta=-2U\sin\theta$，压强 p 为

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} - 2\rho U^2 \sin^2\theta = C - 2\rho U^2 \sin^2\theta$$

作用于单位长度圆柱面上的合力 D 为

$$D = \int_S -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

这是由于圆柱面上的压力分布在上下和左右之间均对称的缘故。这个结论就是所谓的达朗贝尔疑题(D'Alembert paradox)，因为这是没有考虑流体的粘性而导致的结果。这个结果显然与物理现实相违背。在粘性流体力学中可以知道：在绕流物体表面上将存在一极薄的边界层，粘性作用将主要体现在边界层中，而边界层外界的流动将由势流解确定，因此研究势流理论仍具有重要意义。

6.6.2 有环量圆柱绕流

本节中将说明绕流物体的环量将产生作用于该物体的升力(lift)，仍以圆柱体为例。在6.5.2节中已说明涡点形成的是一族同心圆的流线，可以设想如果把涡叠加于上节的绕圆柱流动上，将可得到有环量的圆柱绕流，复势为

$$F(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln z + C$$

这里叠加的是一个负方向的涡，因为这样可以得到正的升力。上式中还加了一项常数 C，原因是在无环量圆柱绕流中 $r=a$ 时流函数不仅等于常数而且是零，即 $\psi=0$，这条流线是零流线。但当叠加涡以后，在 $r=a$ 时流函数尽管仍是常数但不是零。为了使 $r=a$ 时 $\psi=0$ 可以带来不少方便，因此在复势中增加一项常数项 C 以达到这个目的。而在复势中增加一个常数，根据6.1节，6.2节的讨论，对流场并无改变，流速和压强的分布均不受影响。为确定常

数 C 值，须计算 $r=a$ 时的流函数，使 $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其复势为

$$F(z)=U(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+C$$

$$=2Ua\cos\theta-\frac{\Gamma}{2\pi}\theta+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln a+C$$

由此可见：在 $r=a$ 的圆周上流函数确是一个常数，如使 $C=-\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln a$，则 $\psi=0$，这样就确定了 C 值。最后复势可写为

$$F(z)=U\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z}{a} \tag{6-89}$$

式(6-89)表示一流速为 U 的均匀流流过一半径为 a 且有一强度为 Γ 的负涡所环绕的圆柱体的流动。将 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 代入，得

$$F(z)=U\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\frac{a^2}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\left(\ln\frac{r}{a}+\mathrm{i}\theta\right)$$

流速势 ϕ 和流函数 ψ 分别为

$$\phi=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta-\frac{\Gamma\theta}{2\pi} \tag{6-90a}$$

$$\psi=U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{a} \tag{6-90b}$$

复速度 $W(z)$ 为

$$W(z)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=U\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z}$$

$$=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\right)+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

$$=\left[U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\frac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi r}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

$$=\left\{U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta+\mathrm{i}\left[U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi r}\right]\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \tag{6-91}$$

可得流速为

$$u_r = U(1 - \frac{a^2}{r^2})\cos\theta \tag{6-92a}$$

$$u_\theta = - U(1 + \frac{a^2}{r^2})\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{6-92b}$$

在圆柱表面上 $r=a$ 时，由(6-92)得

$$u_r = 0 \tag{6-93a}$$

$$u_\theta = - 2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \tag{6-93b}$$

$u_r=0$ 说明圆柱表面为不透水边界，而且由式(6-90)说明该处 $\psi=0$，可认为是固体边界。在这个流动中很重要的一个点就是在该点处所有流速分量均为零的驻点，该点在圆柱面上的位置以 θ_S 表示，则

$$\sin\theta_S = - \frac{\Gamma}{4\pi Ua} \tag{6-94}$$

当 $\Gamma=0$，$\sin\theta_S=0$，$\theta_S=0$ 和 π 时，与无环量圆柱绕流中情况相同。但当环量 $\Gamma\neq0$，则显然驻点的位置决定于 $\frac{\Gamma}{4\pi Ua}$。

(1) 当 $0<\frac{\Gamma}{4\pi Ua}<1$，此时 $-1<\sin\theta_S<0$，θ_S 必然位于第三或第四象限中，如图 6-18(a)。一般情况下有两个驻点。显然原来位于 $\theta=\pi$ 的驻点现在移至第三象限的 S_1，而原来位于 $\theta=0$ 的驻点现在移至第四象限的 S_2。这两个驻点应该对称于 y 轴。驻点的这种移动从物理上可以理解为：由于涡而引致的流动和无环量圆柱绕流的流动，二者在第一和第二象限为互相加强；而在第三和第四象限，由于二者流动方向相反，这两种流动将互相抵消，而在圆柱面上的某点处流速消失为零。可见环量的作用是使圆柱面上两个驻点互相靠近。当涡为负涡，这种驻点的靠近发生在圆柱体的下表面。

(2) 当 $\frac{\Gamma}{4\pi Ua}=1$，此时 $\sin\theta_S=-1$，$\theta_S=\frac{3\pi}{2}$，相应的流动如图 6-18(b)所示。两个驻点重合为一个点为 S，位于圆柱体下表面的

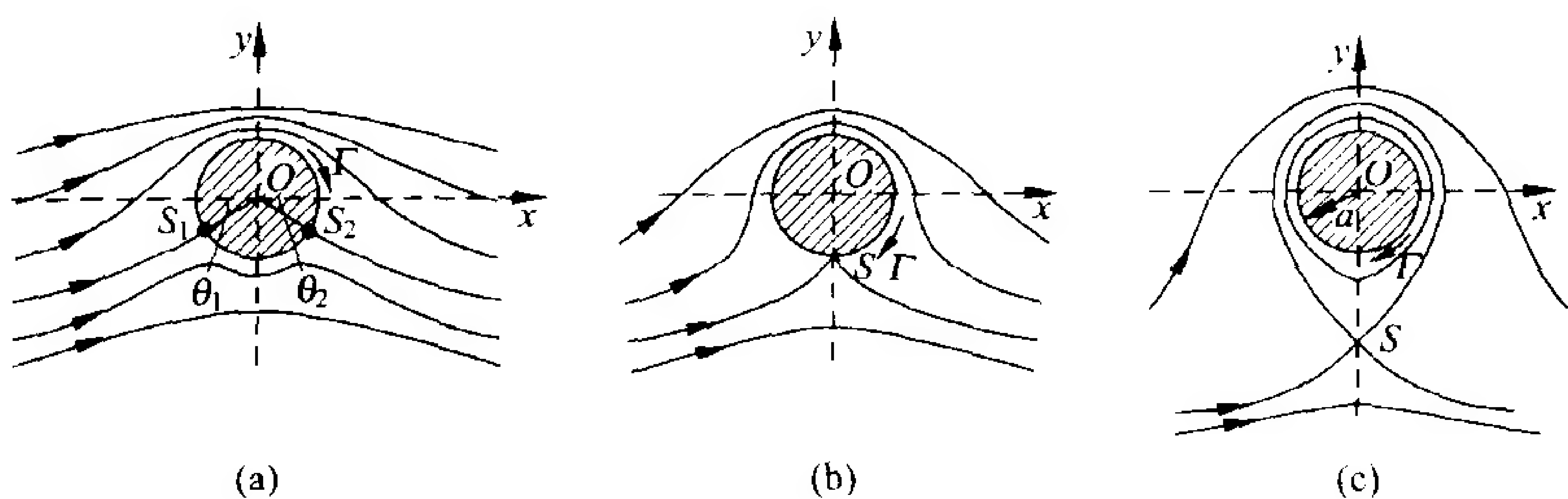


图 6-18 圆柱绕流(有环量)

中点。显然,如果环量 Γ 再增加,则单个驻点将不会仍然位于圆柱表面上,它将移至流体的内部。

(3) 当 $\frac{\Gamma}{4\pi Ua}>1$,此时 $\sin\theta_S<-1$,驻点将离开圆柱体表面,此时流速分量应由式(6-92)计算。令 r_S 和 θ_S 为圆柱坐标中驻点的位置坐标,则

$$U\left(1-\frac{a^2}{r_S^2}\right)\cos\theta_S=0 \tag{a}$$

$$U\left(1+\frac{a^2}{r_S^2}\right)\sin\theta_S=-\frac{\Gamma}{2\pi r_S} \tag{b}$$

此时 $r_S\neq a$,因此式(a)中 $\cos\theta_S=0$,即 $\theta_S=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$。当 $\theta_S=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$时,式(b)为

$$U\left(1+\frac{a^2}{r_S^2}\right)=\pm\frac{\Gamma}{2\pi r_S} \tag{c}$$

式中的"—"号相应 $\theta_S=\frac{\pi}{2}$,"+"号相应 $\theta_S=\frac{3\pi}{2}$。由于 $U>0$,所以式(c)中左侧为正,右侧中 $\Gamma>0$,因此右侧不可能出现负号。r_S 可由下式计算:

$$U\left(1+\frac{a^2}{r_S^2}\right)=\frac{\Gamma}{2\pi r_S}$$

得

$$r_S = \frac{\Gamma}{4\pi U} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U}\right)^2 - a^2}$$

或

$$\frac{r_S}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi Ua}\left[1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{4\pi Ua}{\Gamma}\right)^2}\right]$$

这个结果说明：当$\frac{4\pi Ua}{\Gamma}\to 0$时，方括弧内如果取"＋"号，则$r_S\to\infty$；如果取"－"号，则$r_S$无法定义。现将根式在$\frac{4\pi Ua}{\Gamma}\ll 1$时展开为级数，得

$$\frac{r_S}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi Ua}\left\{1-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi Ua}{\Gamma}\right)^2+\cdots\right]\right\}$$

忽略二阶以上的小量，$\frac{4\pi Ua}{\Gamma}\to 0$时，则可由此式得到$r_S\to 0$，也就是说驻点在圆柱内部。因此，圆柱外面的驻点，其位置在

$$\left.\begin{aligned} &\theta_S=\frac{3\pi}{2} \\ &\frac{r_S}{a}=\frac{\Gamma}{4\pi Ua}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{4\pi Ua}{\Gamma}\right)^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{6-95}$$

式(6-95)给出了在圆柱边界面下部惟一的驻点为S，如图6-18(c)所示。驻点处流线必然是互相正交的。该点流线围成的内区里流体独自作循环运动，与外区流动完全隔离。

有环量的圆柱绕流，其流动对于y轴是对称的，因此可知环量并不形成阻力。但是环量的存在破坏了流动对于x轴的对称，因此将有在y方向的作用力作用于圆柱上。负的环量将使圆柱上部流速增加而下部流速减低。根据伯努利方程，圆柱上部的压强减小而下部压强增加，从而产生垂直向上的升力。

6.7 柱体受力的布拉休斯公式

由上节知道有环量圆柱绕流的速度场后，可以通过伯努利方程求出相应的压强场。由圆柱面上压强沿曲面的积分可以求得作用于圆柱的力。这种计算的方法将是很繁复的。布拉休斯提供了另外一种考虑，即沿曲线的积分可以由留数定理(residue theorem)计算。

设有如图 6-19 所示任意形状柱体的绕流，柱体界面由 S_b 表示。在柱体外部设一固定的任意形状的控制界面 S 包围柱体，除柱体内部以外，在 S 与 S_b 之间的区域内并不存在任何奇点。设在柱体形心处 x 方向的作用分力为X，y 方向的作用分力为 Y。对于界面 S_b 和 S 之间的流体而言，它们对力只起传递的作用而并不吸收。因此作用在 S 界面上的流体作用力与作用在柱体 S_b 上的力是相同的。现应用动量定律计算作用于 S 界面上的流体作用力，在图 6-19 中取一微元段 dS，作用于 dS 上的 x 方向的力 dX为

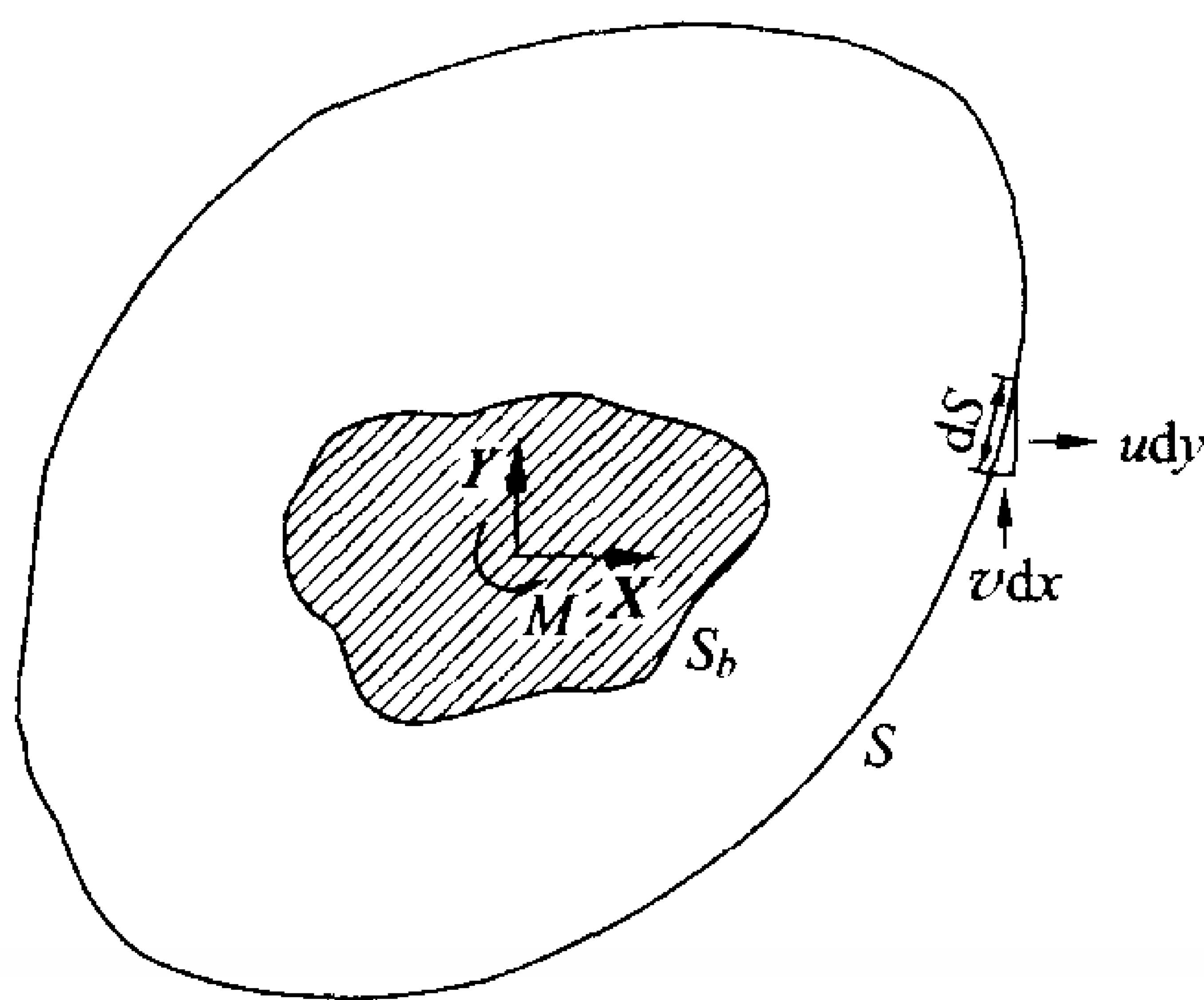


图 6-19 任意形状柱体受力分析

$$\mathrm{d}X = -p\mathrm{d}y - \rho u^2 \mathrm{d}y + \rho uv\mathrm{d}x$$

式中：$\mathrm{d}X$ 取为正 x 方向；等号右侧的第一项为压强在 x 方向产生的作用力；第二项与第三项为通过 $\mathrm{d}S$ 段的 x 方向的流体动量的变化率，根据动量定律它们相当力的作用。

由伯努利方程式(2-98)可知压强 p，即由 $p+\frac{\rho(u^2+v^2)}{2}=C$ 求得，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X &= \left[-C\mathrm{d}y + \frac{\rho}{2}(u^2+v^2)\mathrm{d}y\right] - \rho u^2 \mathrm{d}y + \rho uv\mathrm{d}x \\ &= -C\mathrm{d}y - \frac{\rho}{2}u^2\mathrm{d}y + \frac{\rho}{2}v^2\mathrm{d}y + \rho uv\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{a}$$

同理可以得到 $\mathrm{d}Y$ 为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y &= \rho\mathrm{d}x - \rho uv\mathrm{d}y + \rho v^2\mathrm{d}x \\ &= C\mathrm{d}x - \frac{\rho}{2}u^2\mathrm{d}x + \frac{\rho}{2}v^2\mathrm{d}x - \rho uv\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{b}$$

由于对整个封闭曲线而言 $\oint_S C\mathrm{d}x = 0$，$\oint_S C\mathrm{d}y = 0$，如果假设一个复数形式的合力 $\boldsymbol{R}=X-\mathrm{i}Y$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} = X - \mathrm{i}Y &= \oint_S (\mathrm{d}X - \mathrm{i}\mathrm{d}Y) \\ &= \frac{\rho}{2}\oint_S [(-u^2\mathrm{d}y + v^2\mathrm{d}y + 2uv\mathrm{d}x) \\ &\quad - \mathrm{i}(-u^2\mathrm{d}x + v^2\mathrm{d}x - 2uv\mathrm{d}y)] \end{aligned} \tag{c}$$

又由复速度 $W(z)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=u-\mathrm{i}v$ 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z &= \mathrm{i}(u-\mathrm{i}v)^2(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y) \\ &= \mathrm{i}(u^2 - v^2 - 2\mathrm{i}uv)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \\ &= (-u^2\mathrm{d}y + v^2\mathrm{d}y + 2uv\mathrm{d}x) \\ &\quad - \mathrm{i}(-u^2\mathrm{d}x + v^2\mathrm{d}x - 2uv\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{d}$$

比较式(c)与式(d)可得

$$X - \mathrm{i}Y = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint_S \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\frac{\rho}{2}\oint_S W^2(z)\mathrm{d}z \qquad (6\text{-}96)$$

式(6-96)为布拉休斯关于柱体受力的第一定律(Blasius first theorem for force on a body)。

为了计算流体力作用在绕流柱体上的力矩，设 M 表示对柱体重心的力矩，如图 6-19 所示，并微元弧段 $\mathrm{d}S$ 上作用力对柱体重心的力矩 $\mathrm{d}M$ 为(见图 6-20 所示)

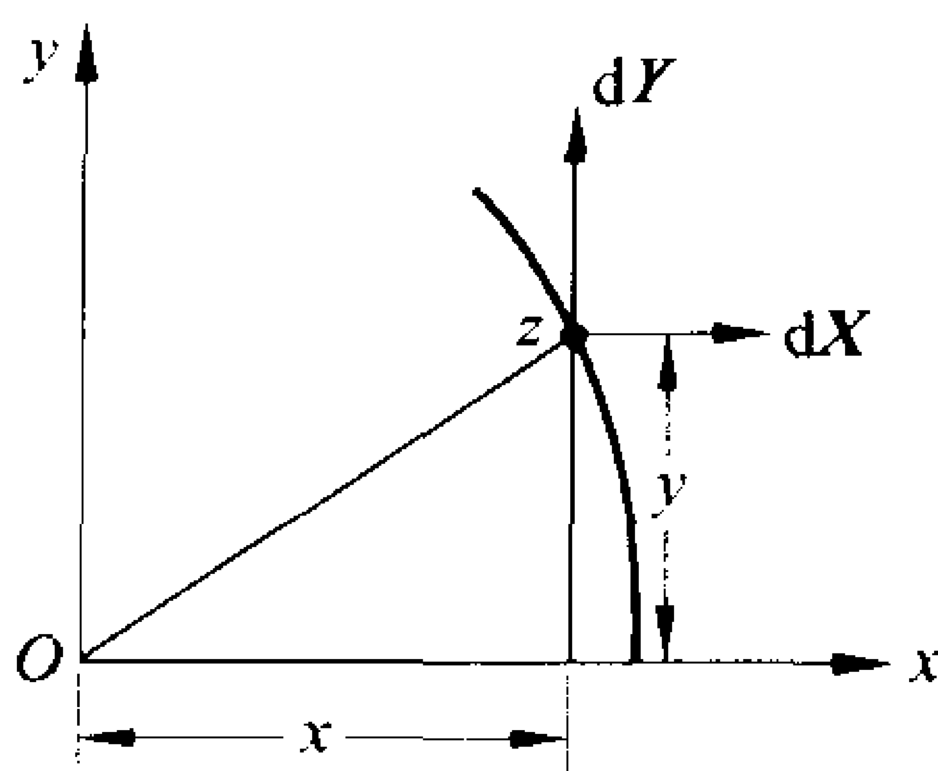


图 6-20　流体力矩

$$\mathrm{d}M = x\mathrm{d}Y - y\mathrm{d}X$$
$$= \mathrm{Re}[\mathrm{i}(\mathrm{d}X - \mathrm{i}\mathrm{d}Y)z]$$

沿整个包围柱体的任意曲线 S 积分即得

$$M = \oint_S \mathrm{d}M$$
$$= \mathrm{Re}\left[\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint_S \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 z\mathrm{d}z\right]$$
$$= -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[\oint_S z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z\right]$$
$$= -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[\oint_S zW^2\mathrm{d}z\right] \qquad (6\text{-}97)$$

式(6-97)为布拉休斯关于柱体受力的第二定律(Blasius second theorem for force on a body)。这里假定逆时针方向的力矩为正。在布拉休斯两个公式中的沿封闭曲线的积分均可由留数定理进行计算。

由附录Ⅲ.9 节中式Ⅲ.36 可知解析函数 $F(z)$ 在奇点 $z=z_0$ 处的留数 $\mathrm{res}F(z)$ 为

$$\mathrm{res}F(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_r F(z)\mathrm{d}z = C_{-1} \qquad (\text{Ⅲ-36})$$

C_{-1}为罗朗级数(Laurent series)中 z 的-1次幂项的系数。因此，作用在绕流柱体上的力，由式(6-96)可得

$$X - \mathrm{i}Y = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint_S \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\left[2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \tag{6-98}$$

式中：F 为流动的复势。

同理，绕流柱体的力矩 M 为

$$M = -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[\oint_S z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z\right]$$

$$= -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \tag{6-99}$$

应当指出：布拉休斯的两个定律都是对恒定流动而言的，因为压强是应用式(2-98)得出的。对于不可压缩流体的非恒定流动，由式(2-99)可得

$$p = C(t) - \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$$

式中：p 为动水压强；$C(t)$为对于整个流场适用的随时间 t 变化的一个不恒定伯努利常数。

柱体受力为

$$\mathrm{d}X = \left[-C(t)\mathrm{d}y + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}y + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)\mathrm{d}y\right] - \rho u^2\mathrm{d}y + \rho uv\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}Y = \left[C(t)\mathrm{d}x - \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}x - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)\mathrm{d}x\right] + \rho v^2\mathrm{d}x - \rho uv\mathrm{d}y$$

化简后得

$$\mathrm{d}X = \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}y - \frac{\rho u^2}{2}\mathrm{d}y + \frac{\rho v^2}{2}\mathrm{d}y + \rho uv\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}Y = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}x - \frac{\rho u^2}{2}\mathrm{d}x + \frac{\rho v^2}{2}\mathrm{d}x - \rho uv\mathrm{d}y$$

于是

$$
\begin{aligned}
X-\mathrm{i}\,Y &= \oint_{S}(\mathrm{d}\,X-\mathrm{id}\,Y) \\
&= \frac{\rho}{2}\oint_{S}\Big[\Big(2\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}y-u^{2}\,\mathrm{d}y+v^{2}\,\mathrm{d}y+2uv\,\mathrm{d}x\Big) \\
&\qquad -\mathrm{i}\Big(-2\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}x-u^{2}\,\mathrm{d}x+v^{2}\,\mathrm{d}x-2uv\,\mathrm{d}y\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

与 6.7 节中式(c)进行比较,可知$X-\mathrm{i}\,Y$中,由于流动的不恒定性,增加了如下的一项:

$$
\rho\oint_{S}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}y+\mathrm{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}x\Big) \tag{6-100}
$$

6.8 镜像定理

已经讨论了用奇点叠加的方法解决某些物体绕流的平面势流问题。但在流场中除被绕流的物体以外还有其他的固体壁面(平面的或曲面的)存在,这时固体壁面对流动的影响将改变流动的边界条件,从而改变了绕物体流动的复势。例如飞机降落时地面对机翼绕流的影响就是这种类型的问题。解决这类问题时镜像法是一种思路,将固体壁面作为一面镜子,将物体 K 映射得到镜像 K',如图 6-21(b)所示,x 轴即为一假想的镜面。求解在流场中有 K 和 K'两个物面的无界流域中的流动,由于 K 和 K'对于 x 轴对称,所以在原物体 K 和镜像 K'的叠加的绕流中 x 轴,即 $y=0$ 的线必然是流线。也就是说这一物体与其镜像叠加的流动满足固体壁面处法向速度等于零的边界条件,因此由这一叠加而得到的流场的流动要素,如复势、速度场、压强场等与图 6-21(a)所示的在固体壁面附近的绕物体流动相同。

6.8.1 平面壁镜像定理

平面壁镜像可分为两种情形:

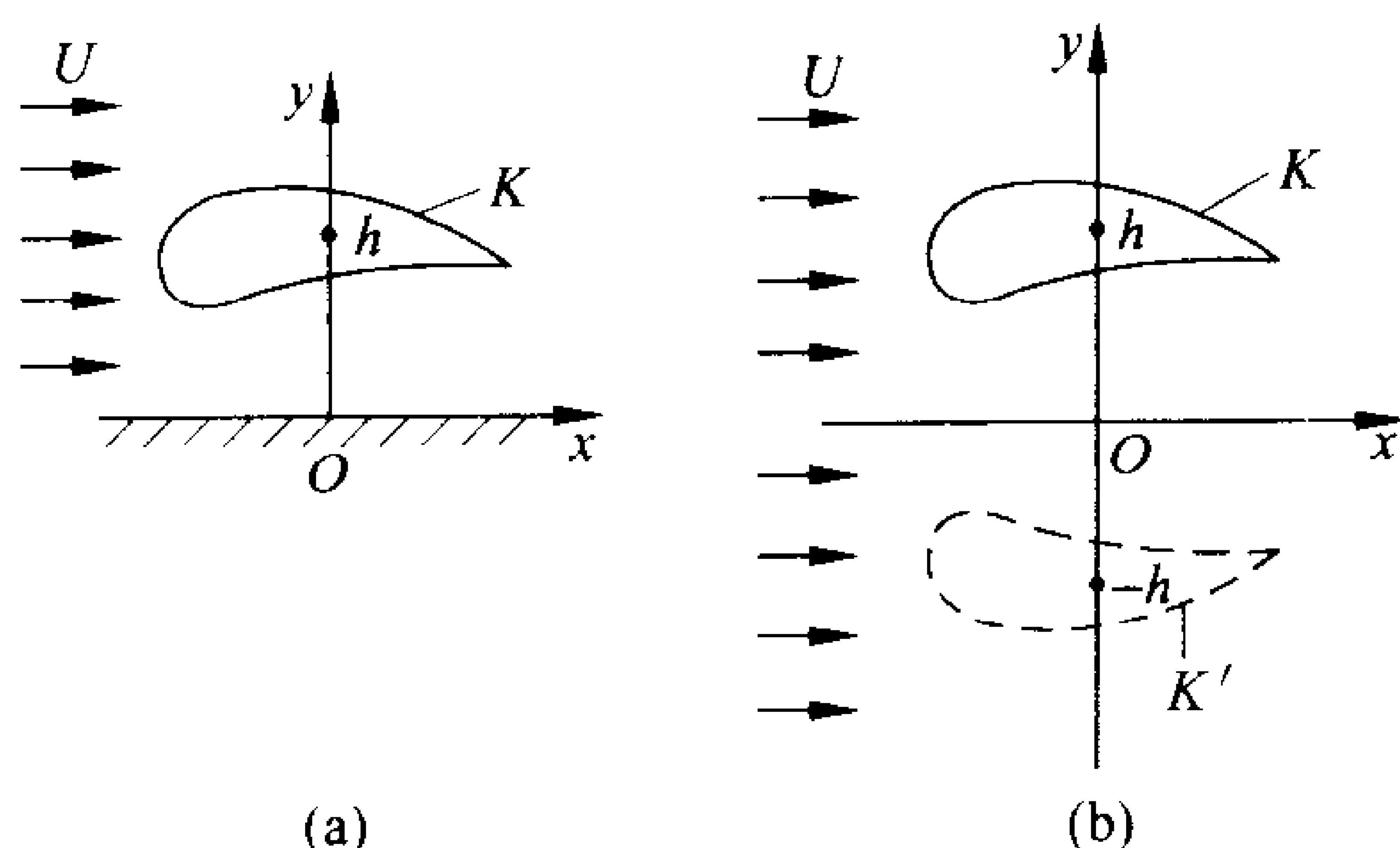


图 6-21 镜像法示意图

1. $y=0$ 的平面壁镜像

定理 设一无界的不可压缩平面无涡流动中，在 $y>0$ 的流域中存在若干奇点为源、汇、涡或其他奇点，复势为 $F(z)$，则在流场中插入 $y=0$ 的平面壁后，在 $y>0$ 域中的复势为

$$G(z) = F(z) + \overline{F}(z) \tag{6-101}$$

$G(z)$满足 $y=0$ 处平面壁上不可穿透的边界条件，$\overline{F}(z)$表示对 $F(z)$中除自变量 z 以外的各复数均取其共轭值。

证明 这里需要证明两点：一是在流场中插入 $y=0$ 的平面后并未改变 $y>0$ 流域中奇点的性质和位置，新的复势 $G(z)$应满足这一要求；二是 $y=0$ 平面应该是一个不透水的边界。

(1) $y>0$ 流域中奇点导致的流场复势为 $F(z)$。在插入 $y=0$ 平面后复势为 $G(z)=F(z)+\overline{F}(z)$。对于 $F(z)$的奇点如在 $y>0$ 域内，则对于$\overline{F}(z)$的奇点必在 $y<0$ 的域内。例如在 $y>0$ 域内位于 z_j 点的源，其复势 $F(z)=\frac{m}{2\pi}\ln(z-z_j)$。复势$\overline{F}(z)$则是把$F(z)$中除 z 以外的复数，这里是 z_j 改为它的共轭复数$\overline{z}_j$。所以$\overline{F}(z)=\frac{m}{2\pi}\ln(z-\overline{z}_j)$，它仍是源，但源的位置在$\overline{z}_j$ 点处。可见对应于$\overline{F}(z)$的奇点都位于 $y<0$ 的半平面内。可见新的复势 $G(z)=F(z)+$

$\overline{F}(z)$并未改变上半平面 $y>0$ 流域内的奇点。复势 $G(z)$ 对于 $y>0$的流域是适用的，是与 $y>0$ 域内的奇点所对应的。

(2) 在 $y=0$ 的平壁面上有 $z=\bar{z}$。因此

$$\begin{aligned} G(z) &= F(z) + \overline{F}(z) \\ &= F(z) + \overline{F}(\bar{z}) \end{aligned} \tag{a}$$

这里需要说明共轭函数的概念。共轭函数就是复变量 z 的解析函数的实部和虚部。例如：当 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$f(z) = \phi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y) = \phi + \mathrm{i}\psi \tag{b}$$

式(b)中 ϕ 和 ψ 就是共轭函数。如果使共轭函数等于常数，例如 $\phi(x,y)=C_1$，$\psi(x,y)=C_2$，则得到两族互相正交的曲线族。由式(b)可得以下恒等式：

$$f(z) + \overline{f}(\bar{z}) = 2\phi(x,y) \tag{c}$$

$$f(z) - \overline{f}(\bar{z}) = 2\mathrm{i}\psi(x,y) \tag{d}$$

由此可知式(a)为

$$G(z) = F(z) + \overline{F}(\bar{z}) = 2\phi(x,y) \tag{e}$$

上式说明：对于 $y=0$ 的平壁面流函数 $\psi=0$，可见 $y=0$ 是一条零流线，为不可穿透的固体壁面，符合命题的要求。

由此可见：如果在 $y>0$ 的半平面内分布奇点，并且 $y=0$ 为一不透水的固体边界，这种流动与 $y>0$ 平面内的奇点和以 $y=0$ 为一镜面映射在 $y<0$ 平面内奇点的镜像叠加而成的流场等价。如图 6-22 所示。

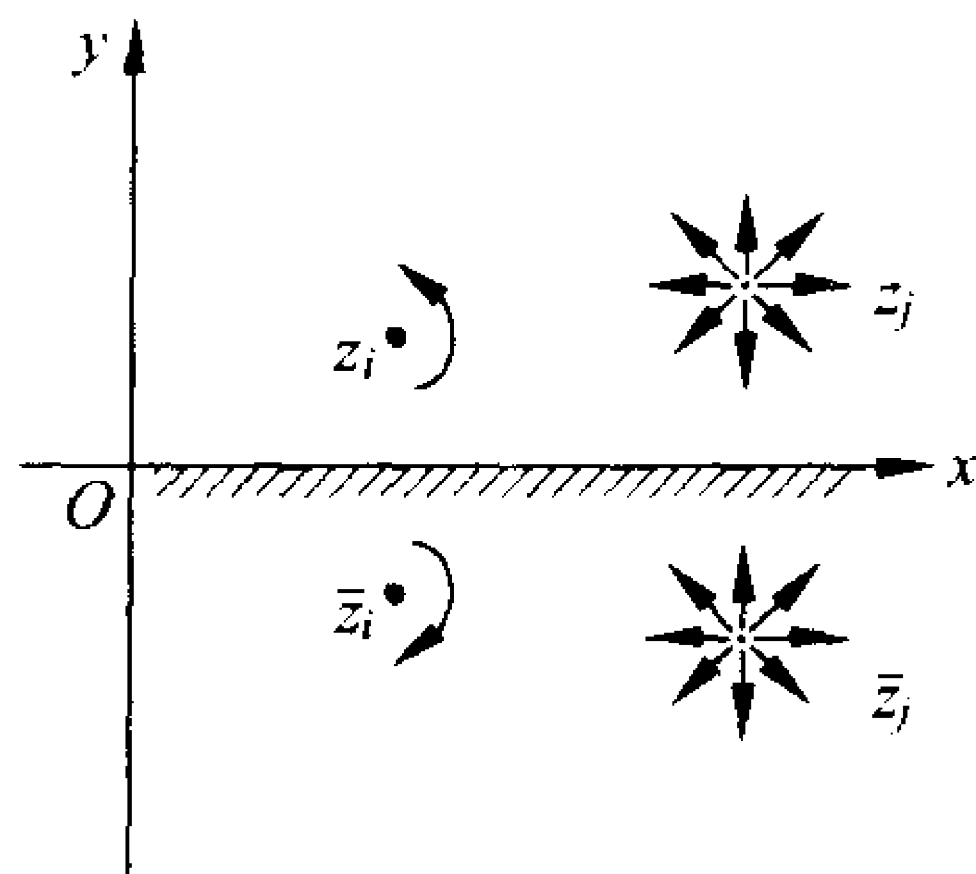


图 6-22 平面壁镜像($y=0$)

2. $x=0$ 的平面壁镜像

定理 设在 $x>0$ 的域内存在若干奇点，复势为 $F(z)$，则在流场中插入$x=0$的平面壁后，在 $x>0$ 的域中流场的复势为

$$G(z) = F(z) + \overline{F}(-z) \tag{6-102}$$

式中的$\overline{F}(-z)$表示在 $F(z)$中除 z 以外的各复数均取其共轭值而 z 以 $-z$ 代替之。

证明 在 $x=0$ 的平面上 $z=-\overline{z}$,因此对于 $x=0$ 平面有

$$\begin{aligned} G(z) &= F(z) + \overline{F}(-z) \\ &= F(z) + \overline{F}(\overline{z}) \end{aligned}$$

由此可见:在 $x=0$ 平面上复势只存在实部,虚部为零,即 $\psi=0$,为零流线,所以 $G(z)$满足 $x=0$ 平面壁的边界条件。

$F(z)$的奇点位置 z_i 均位于 $x>0$ 的域中,$\overline{F}(-z)$的奇点位置$-\overline{z}_i$恰与 z_i 对称于 $x=0$ 的平壁面。因此在 $x>0$ 中的奇点当 $x=0$为平面壁时,其复势为这些奇点的复势与它们的以 $x=0$ 为镜面的像的复势的叠加。这就证明了奇点和它的平面镜像组合的复势式(6-101),式(6-102)既满足平壁面的边界条件,又不改变原有奇点的分布和性质。

6.8.2 对源

如果将一对强度相同的源分别置于 x 轴上的$(h,0)$,$(-h,0)$两点上,如图 6-23 所示。流动的复势为两个源点的叠加。即

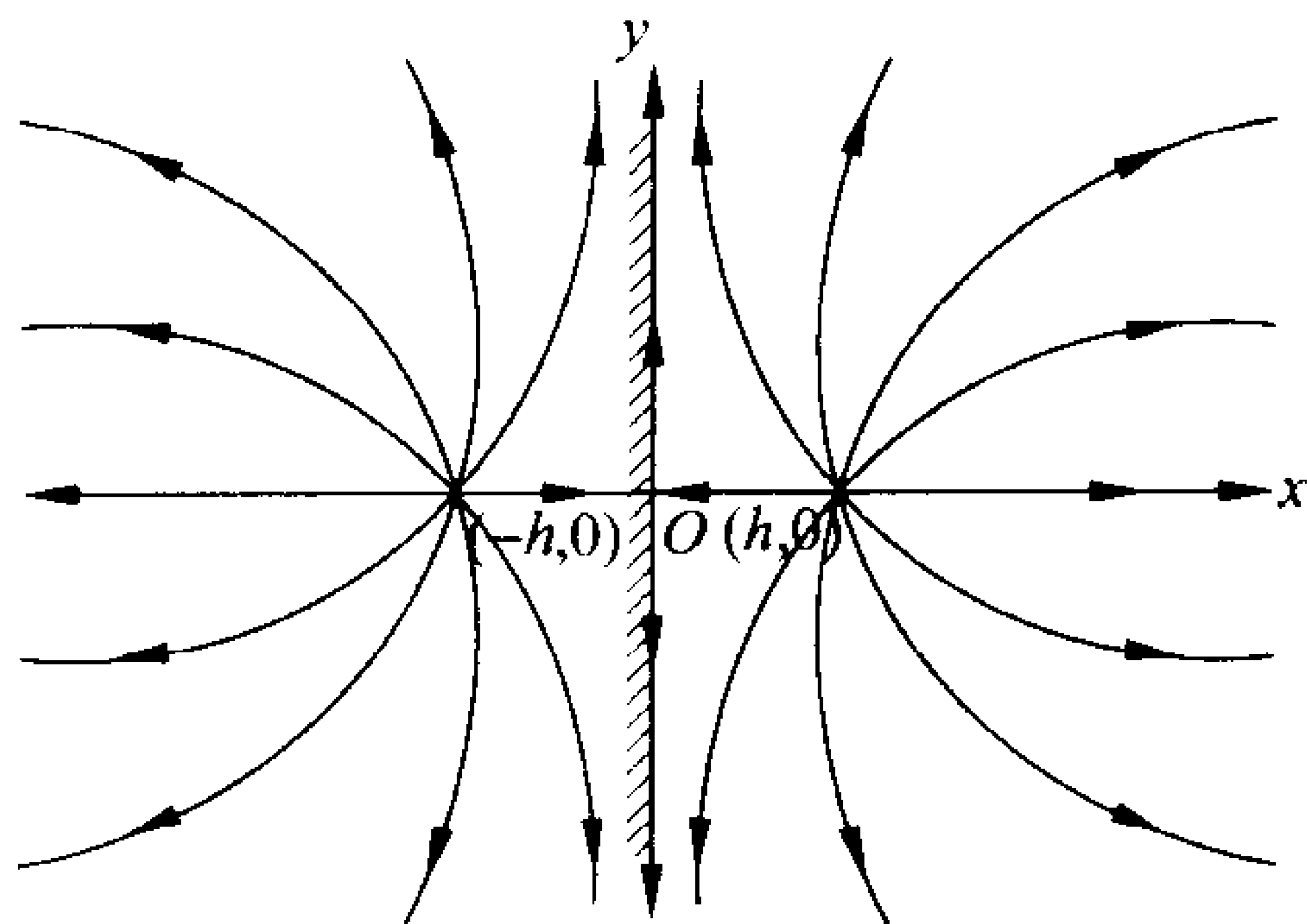


图 6-23 对源[14]

$$F(z)=\frac{m}{2\pi}\ln(z-h)+\frac{m}{2\pi}\ln(z+h)$$

$$=\frac{m}{2\pi}\ln(z^2-h^2) \tag{6-103}$$

复速度 $W(z)$ 为

$$W(z)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=\frac{mz}{\pi(z^2-h^2)}=u-\mathrm{i}v$$

在 $x=0$ 的 y 轴上，$z=0+\mathrm{i}y=\mathrm{i}y$，所以

$$W(\mathrm{i}y)=\frac{m\mathrm{i}y}{\pi(-y^2-h^2)}=-\mathrm{i}\frac{my}{\pi(y^2+h^2)} \tag{6-104}$$

由此得出 $u=0$，$v=\frac{my}{\pi(y^2+h^2)}$。因此在原点处（$x=0$，$y=0$），$u=0$，$v=0$，说明原点为一驻点。

在$(-h,0)$处的源点可以认为是源点$(h,0)$的像．$x=0$ 平壁面作为一个固体壁面边界，这时根据式(6-102)，在 $x>0$ 的域内，复速度 $G(z)$ 为

$$G(z)=F(z)+\overline{F}(-z)$$

$$=\frac{m}{2\pi}\ln(z-h)+\frac{m}{2\pi}\ln(-z-h)$$

$$=\frac{m}{2\pi}\ln(z^2-h^2)+\frac{m}{2\pi}\ln(-1)$$

$$=\frac{m}{2\pi}\ln(z^2-h^2)+C \tag{6-105}$$

式(6-105)与式(6-103)相差一个常数，对于复势来说相差一个常数并不影响所代表的流场，因此二者是一致的。

应用布拉休斯定律可以计算位于平壁面附近一个源点所受到的流体作用力，这时可以在源点处选取任意包围源点的曲面 S，作用在源点上的力为

$$X+\mathrm{i}Y=\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \tag{a}$$

式中的 F 应该是式(6-105)中的 $G(z)$。

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{m}{2\pi}\ln(z-h)+\frac{m}{2\pi}\ln(z+h)\right]$$

$$=\frac{m}{2\pi}\left[\frac{1}{z-h}+\frac{1}{z+h}\right] \tag{b}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2=\frac{m^2}{4\pi^2}\left[\left(\frac{1}{z-h}\right)^2+2\left(\frac{1}{z-h}\right)\left(\frac{1}{z+h}\right)+\left(\frac{1}{z+h}\right)^2\right] \tag{c}$$

式(c)即为$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2$展开为$(z-h)$的罗朗级数，其中$(z-h)^{-1}$项的系数 C^{-1}。当 $z\to h$，即在 h 点附近展开为罗朗级数时，C^{-1}为

$$C^{-1}=\frac{m^2}{4\pi^2}\left(2\,\frac{1}{z+h}\right)$$

$$=\frac{m^2}{4\pi^2}\left(2\,\frac{1}{2h}\right)$$

$$=\frac{m^2}{4\pi^2 h} \tag{d}$$

所以

$$X-\mathrm{i}\,Y=\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\left(2\pi\mathrm{i}\,\frac{m^2}{4\pi^2 h}\right)$$

$$=-\frac{\rho m^2}{4\pi h}$$

由此可得

$$X=-\frac{\rho m^2}{4\pi h}$$

$$Y=0 \tag{6-106}$$

壁面上的压强分布可由伯努利方程式(2-98)计算得

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}-\frac{1}{2}(u^2+v^2)$$

此处 $u=0, v=\frac{my}{\pi(y^2+h^2)}$，$p_0$ 表示驻点处的压强，因此

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}-\frac{m^2y^2}{2\pi^2(y^2+h^2)^2} \tag{6-107}$$

式(6-107)说明在原点处($x=0, y=0$)的压强为驻点压强与无穷远处未受扰动压强相同。而沿 $x=0$ 平壁面上由于有了速度存在，压强较无穷远压强均降低。作用于源点上的流体作用力与平壁面上的流体作用力是作用与反作用的关系，二者方向相反，大小相等。因此作用在源点上的 x 方向的力为负值。就是说平壁面的负压使源点受到吸向壁面的力。由式(6-99)可知作用于源点的力矩 M 为

$$M=-\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]$$

$$z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2=\frac{m^2z}{4\pi^2}\left[\frac{1}{(z-h)^2}+2\frac{1}{(z+h)}\frac{1}{(z-h)}+\frac{1}{(z+h)^2}\right]$$

在 S 内惟一的奇点位于 $z=h$ 处，所以该处展开的罗朗级数为

$$C^{-1}=\frac{m^2h}{4\pi^2}\frac{1}{h}=\frac{m^2}{4\pi^2}$$

$$M=-\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{m^2}{4\pi^2}\right)=0$$

6.8.3 圆柱壁镜像定理——米尔-汤姆逊圆定理

定理 令 $F(z)$ 为没有圆边界的无界流场中的复势，且在 $|z|\leqslant a$ 中没有奇点，若在此流场中插入 $|z|=a$ 的圆柱面，则圆柱外的复势改变为

$$G(z)=F(z)+\overline{F}\left(\frac{a^2}{z}\right) \tag{6-108}$$

式中的 $\overline{F}\left(\frac{a^2}{z}\right)$表示在 $F(z)$函数中除 z 以外的各复数均取其共轭值而 z 以$\frac{a^2}{z}$代替之。

证明　对于米尔-汤姆逊(Milne-Thomson)圆定理同样需要证明两点:一是在流场中插入以原点为圆心,以 a 为半径的圆柱面后并未改变圆周以外奇点的性质和分布,新的复势 $G(z)$应满足这一要求;二是$|z|=a$ 的圆柱面应该是不透水的边界。

(1) 对应于圆外的 z 点,$\frac{a^2}{z}$必位于圆内,如附录Ⅲ.2.8 中所示,$\frac{a^2}{z}$为与 z 点对于以 a 为半径的圆的反演点的共轭点。如定理中所规定的复势 $F(z)$所对应的奇点都在圆外,函数 $\overline{F}\left(\frac{a^2}{z}\right)$所对应的奇点均位于圆周之内。函数 $F(z)$在 $z=0$ 处没有奇点,因此函数 $\overline{F}\left(\frac{a^2}{z}\right)$在无穷远点也没有奇点。所以对于圆外流域函数 $G(z)$与 $F(z)$有完全一样的奇点。

(2) 在圆柱面上,因$|z|=a$,所以

$$|z^2| = \overline{z}z = a^2$$

$$\overline{z} = \frac{a^2}{z}$$

圆柱面上的复势为

$$G(z) = F(z) + \overline{F}(\frac{a^2}{z})$$

$$= F(z) + \overline{F}(\overline{z})$$

此式只有实部,$F(z)+\overline{F}(\overline{z})=2\phi(x,y)$,虚部 $\psi=0$。可见圆柱面是流动中不可穿透的流动边界。

例 1　设一与 x 轴成 α 角的均匀流

$$F(z) = U\mathrm{e}^{-i\alpha}z$$

在流场中放置一半径为 a,圆心为坐标原点的圆周面,则

$$G(z) = F(z) + \overline{F}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$
$$= Ue^{-i\alpha}z + Ue^{i\alpha}\frac{a^2}{z}$$
$$= U\left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{ze^{-i\alpha}}\right)$$

上式为此流动的复势。当 $\alpha=0$，即沿 x 轴向的均匀流绕圆周流动，其复势为

$$G(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

与式(6-84)相同。

例 2 设在 $z=z_0$ 点有一强度为 m 的源，见图 6-24，这时复势为

$$F(z)=\frac{m}{2\pi}\ln(z-z_0)$$

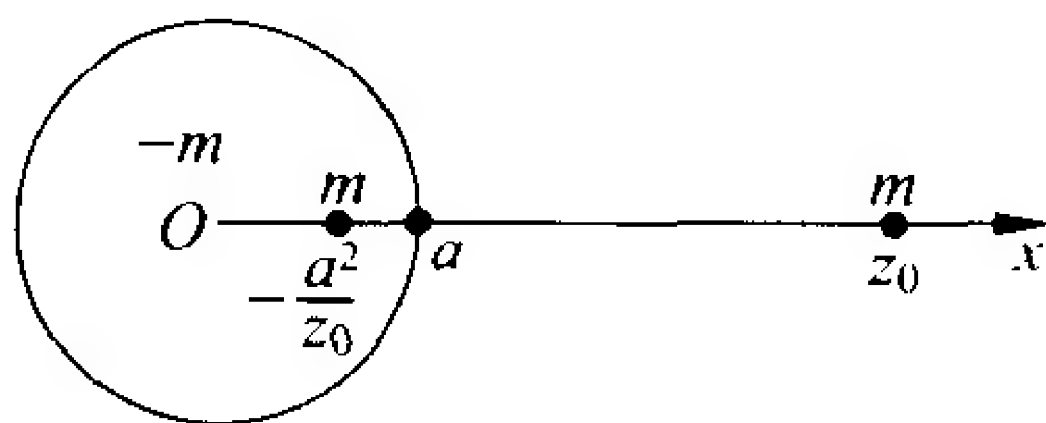


图 6-24 圆定理

如果在流场中插入半径为 a 的圆柱面，根据式(6-108)，圆柱面外部流场的复势为

$$G(z)= F(z) + \overline{F}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$
$$= \frac{m}{2\pi}\ln(z - z_0) + \frac{m}{2\pi}\ln\left(\frac{a^2}{z} - \overline{z}_0\right)$$

如果取坐标使 z_0 在 x 轴上，圆柱面的圆心为原点，z_0 距原点距离为 b，则 $z_0=b$，其共轭复数 $\overline{z}_0$ 仍为 b。所以

$$G(z)= \frac{m}{2\pi}\ln(z-b) + \frac{m}{2\pi}\ln\left(\frac{a^2}{z} - b\right)$$
$$= \frac{m}{2\pi}\ln(z-b) + \frac{m}{2\pi}\ln\left(\frac{a^2 - bz}{z}\right)$$
$$= \frac{m}{2\pi}\ln(z-b) + \frac{m}{2\pi}\ln\left[\frac{(-b)\left(z - \frac{a^2}{b}\right)}{z}\right]$$

$$= \frac{m}{2\pi}\ln(z-b) + \frac{m}{2\pi}\ln\left(z-\frac{a^2}{b}\right) - \frac{m}{2\pi}\ln z + \frac{m}{2\pi}\ln(-b)$$

式中：$\frac{m}{2\pi}\ln(z-b)$为位于 $x=b$，即 z_0 点的源；$\frac{m}{2\pi}\ln\left(z-\frac{a^2}{b}\right)$为位于 $\frac{a^2}{b}$，即圆柱面外流域中的 z_0 点对于以 a 为半径的圆的反演点处的源；$-\frac{m}{2\pi}\ln z$ 表示位于原点，即圆周中心处的汇；$\frac{m}{2\pi}\ln(-b)$为常数，对复势而言此常数量没有什么意义，可以忽略。

此式说明：对于圆外流域，奇点仍是位于 z_0 的源，反映到新的复势 $G(z)$中，它的复势$\frac{m}{2\pi}\ln(z-b)$未变。为了保证圆柱面为一流面，也就是说在圆柱面上 $\psi=0$，则需在圆周内与 z_0 反演点处放置同等强度的源，同时还须在圆心处放置同样强度的汇，以保持圆周内部流体质量的平衡。这样，最终流场是由三个奇点构成。

6.9 绕圆柱流动中的作用力

在 6.5 节中讨论了圆柱绕流的流场，本节中将应用布拉休斯定律进一步研究绕圆柱流动中作用于圆柱上的流体作用力。

6.9.1 无环量圆柱绕流的作用力——达朗贝尔疑题

由式(6-84)知，无环量时圆柱绕流的复势为

$$F(z) = U\left(z+\frac{a^2}{z}\right) \tag{6-84}$$

应用布拉休斯公式求作用于圆柱上的流体作用力，式(6-98)为

$$X - \mathrm{i}Y = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \tag{6-98}$$

此处

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = U^2\left(1 - \frac{2a^2}{z^2} + \frac{a^4}{z^4}\right)$$

由此可见：在$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2$的展开式中由于奇点位于原点 $z_0=0$，罗朗级数的 $n=-1$ 项即$\frac{1}{(z-z_0)}=\frac{1}{z}$项的系数 $C_{-1}=0$，因此得

$$X - \mathrm{i}\,Y = 0 \tag{6-109}$$

也就是说$X=0$，$Y=0$，对于以 a 为半径的圆柱体既没有 x 方向的作用力又没有 y 方向的作用力。这就是达朗贝尔疑题。由于没有考虑粘性作用，当然不会有 x 方向的阻力出现，至于 y 方向的力，则与绕流圆柱的环量有关。作用在圆柱上的力矩可由式(6-99)计算得 M，即

$$M = -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \tag{6-99}$$

$$z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = U^2\left(z - \frac{2a^2}{z} + \frac{a^4}{z^3}\right)$$

所以留数

$$\mathrm{res}z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = C_{-1} = -2a^2U^2$$

代入式(6-99)，得

$$M = -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}[2\pi\mathrm{i}(-2a^2U^2)] = 0$$

因为式中的$[-4a^2\pi U^2\mathrm{i}]$的实部为零。圆柱上并无力矩作用。

6.9.2 有环量圆柱绕流的作用力——库塔-儒可夫斯基升力

由式(6-89)，有环量圆柱绕流的复势为

$$F(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z}{a} \tag{6-89}$$

应用布拉休斯公式(6-98)

$$X - \mathrm{i}\,Y = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \tag{6-98}$$

此处

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi z}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = U^2 - \frac{2U^2a^2}{z^2} + \frac{U^2a^4}{z^4} + \frac{\mathrm{i}U\Gamma}{\pi z} - \frac{\mathrm{i}U\Gamma a^2}{\pi z^3} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2}$$

由此得到

$$\mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = C_{-1} = \frac{\mathrm{i}U\Gamma}{\pi}$$

代入式(6-98),得

$$X - \mathrm{i}\,Y = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\left(2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}U\Gamma}{\pi}\right)$$

$$= -\,\mathrm{i}\rho U\Gamma \tag{6-110}$$

式(6-110)说明:x 方向的阻力X仍为零,而 y 方向的作用力Y为

$$Y = \rho U\Gamma \tag{6-111}$$

式中: Y称为库塔-儒可夫斯基升力(Kutta-Joukowski lift),简称升力。

这个公式称为库塔-儒可夫斯基定律(Kutta-Joukowski law)。这个定律说明作用于绕流圆柱的升力主要取决于环量,当绕流柱体为无环量绕流,升力必为零;对于有环量的绕流柱体,其升力与来流流速和环量值的乘积成正比,而且与流体密度成正比。这里升力为正值,作用方向向上,是由于对绕流圆柱所加的环量为负环量所致;反之如加的环量为正值,则升力方向相反,指向下方。应用式(6-99)计算作用于绕流圆柱的力矩为

$$M = -\,\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{res}z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \tag{6-99}$$

$$z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = zU^2 - \frac{2U^2a^2}{z} + \frac{U^2a^4}{z^3} + \frac{\mathrm{i}U\Gamma}{\pi} - \frac{\mathrm{i}U\Gamma a^2}{\pi z^2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z}$$

由此得到

$$\operatorname{res}z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 = C_{-1} = -2U^2a^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$$

代入式(6-99),得

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\left[-\left(2U^2a^2+\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right)\right]\right\} \\ &= -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[-2\pi\left(2U^2a^2+\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right)\mathrm{i}\right] = 0 \end{aligned}$$

由此说明在圆柱上并无力矩作用。

第7章

翼 型 理 论

本章中将以平面势流理论为基础研究不可压缩理想流体绕二维翼型的流动。首先介绍保角变换的概念，通过保角变换可以把绕二维翼型流动变换为平面势流中已研究过的均匀流绕圆柱的流动，从而利用已有圆柱绕流的成果得到绕翼型的流动，包括流场（流速场和压强场）和翼型受到的流体作用力。

翼型理论在工程实践中具有重要意义，飞机的重要组成部分——机翼和转动机械（如涡轮机、水轮机、水泵等）的叶片都是一种翼型。因此研究翼型的流体动力特性对解决机翼或叶片绕流问题都是基础性的工作。

本章中主要研究理论翼型，也就是按已知的函数构作的翼型剖面族。这是研究实际翼型的理论基础。

7.1 翼型的几何参数与流体动力特性

机翼或叶片的横剖面称为翼型（airfoil），它是指以垂直于机翼长度方向的平面，截取机翼而得到的机翼横剖面形状。本章中将研究二维翼型，也就是研究在一无界流域中一个其翼展为无穷的孤立的翼型情形，这时机翼的每一截面得到的翼型剖面都是相同的。翼型的几何形状和几何参数决定着它的流体动力特性。翼

型的几何参数包括：

（1）弦长表示翼型的前缘（leading edge）与后缘（trailing edge）的连线——翼弦（chord）的长度，也就是翼型的宽度，用 C 表示，如图 7-1 所示。通常翼型的后缘是翼型尾部的一个尖点；而前缘则是在翼型周线上距后缘最远的点，也有定义为翼型前端曲率半径最小的点。

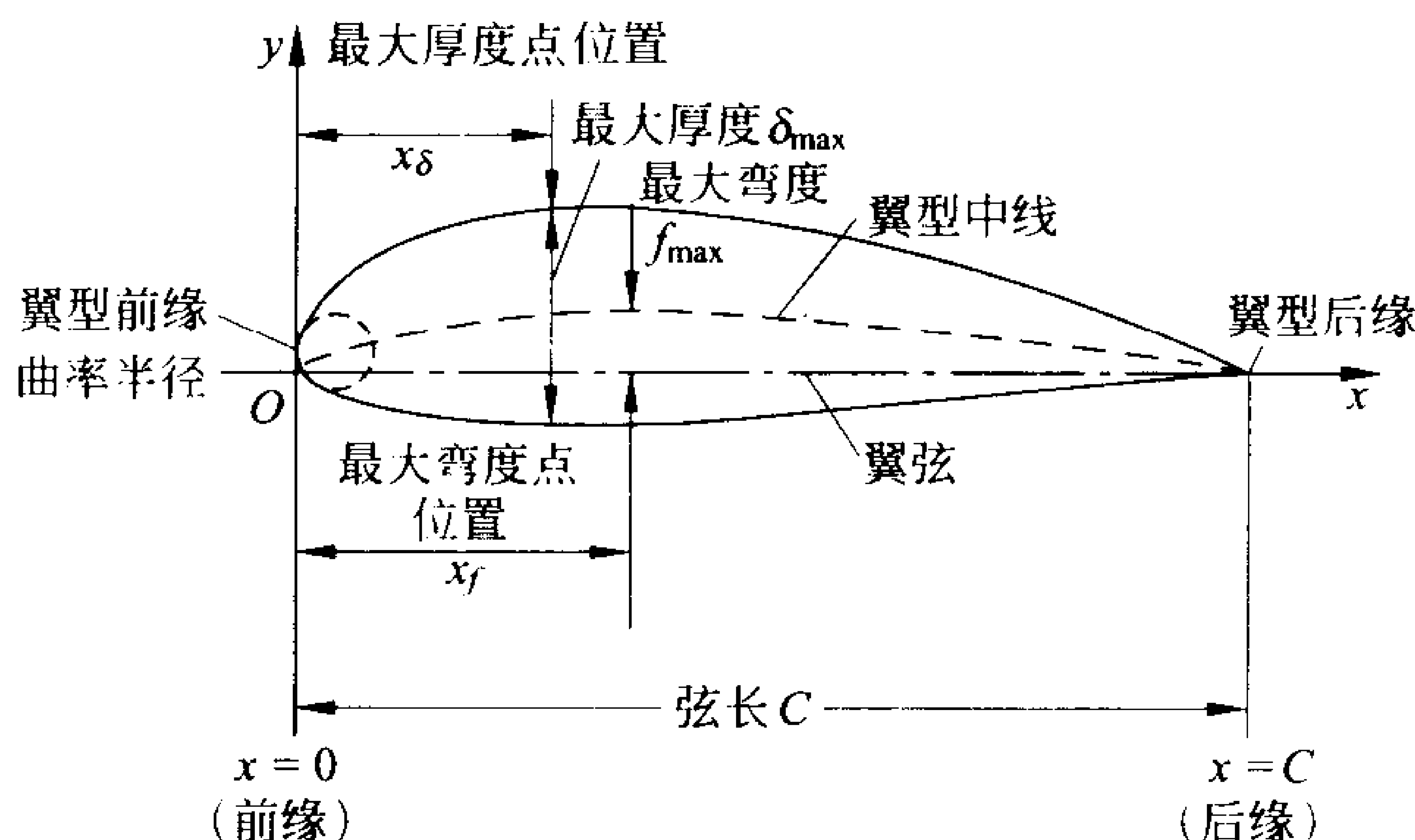


图 7-1　翼型剖面[3]

（2）翼型厚度（thickness）表示翼型剖面上下周线（contour）之间与翼弦垂直的直线段长度，常以 δ 表示。最大厚度就是各个厚度中的最大值，以 δ_{max} 表示，通常以最大厚度作为翼型厚度的代表。最大厚度与翼弦之比称为相对厚度（relative thickness），$\bar{\delta}=\frac{\delta_{max}}{C}$。最大厚度点距前缘的距离以 x_δ 表示，其相对值 $\bar{x}_\delta=\frac{x_\delta}{C}$。

（3）中线（mean camber line）表示翼型的中线是与翼弦垂直的各个厚度线段中点的连线。中线到翼弦的距离 f 称为翼型的弯度（camber），其最大值与翼弦之比 $\bar{f}=\frac{f_{max}}{C}$ 称为最大相对弯度（maximum relative camber），简称相对弯度。翼弦上最大弯度点

到前缘的距离以 x_f 表示，其相对值 $\overline{x}_f=\frac{x_f}{C}$。

翼型采用如图 7-1 的坐标，取上下两周线的方程分别为 $y=F_1(x)$ 及 $y=F_2(x)$，则

$$\delta=F_1(x)-F_2(x) \tag{7-1}$$

$$f=\frac{F_1(x)+F_2(x)}{2} \tag{7-2}$$

近代飞机机翼所采用的翼型一般相对厚度与相对弯度均比较小，相对厚度在 10%左右，相对弯度在 3%以下。但在螺旋桨、各种涡轮机的叶片与导流装置中采用的翼型则有较大的相对厚度与相对弯度。

机翼的长度称为翼展(span)，它是机翼两端点之间的距离。翼展与翼弦之比称为展弦比(aspect ratio)。

翼型的流体动力特性包括流体作用于翼型的升力、阻力和绕翼型质心的力矩等。阻力主要来源于流体的粘性，本书中不作深入讨论。设机翼在空气中以 U_∞ 的速度运动，根据伽利略(Galileo Galilei 1564－1642)相对性原理，它相当于无穷远处的均匀来流 U_∞ 绕机翼的流动。来流和翼弦的夹角 α_0 称为冲角也称攻角

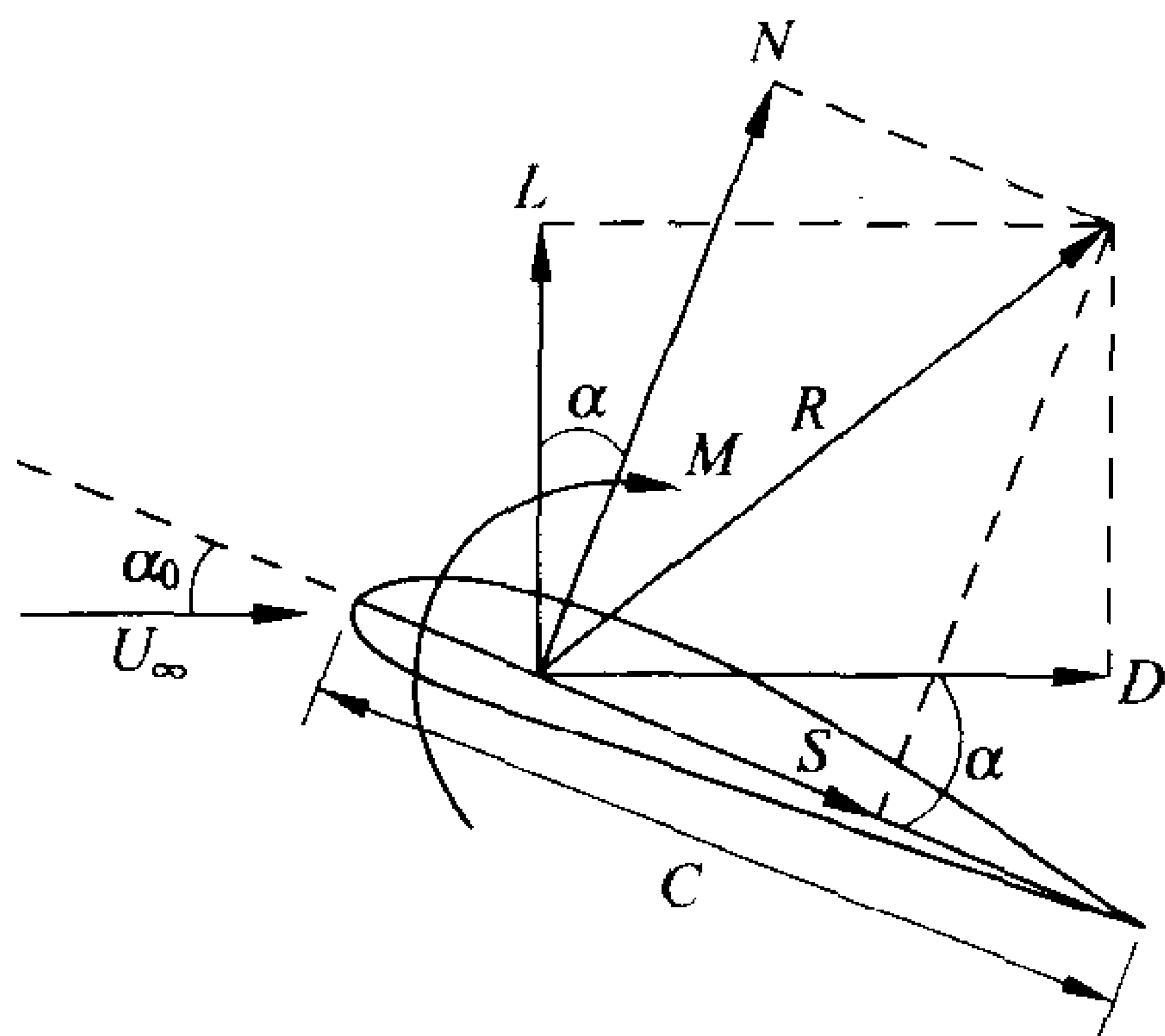


图 7-2 翼型的受力

(attack angle),如图 7-2 所示。翼型剖面绕流中与来流方向垂直的流体作用于翼型上的力 L 为升力而与来流方向平行的流体作用力为阻力(drag force)D。采用无量纲的系数 C_L 和 C_D,升力和阻力均可写为以下形式,即

$$L=C_L\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A \tag{7-3}$$

$$D=C_D\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A \tag{7-4}$$

式中:A 为单位长度机翼的面积,等于弦长 C 乘 1.0;C_L 称为升力系数;C_D 称为阻力系数。升力与阻力的合力为 R,R 也可分解为与翼弦垂直的 N 和与翼弦平行的 S 两个分力。

力矩也可以表示为类似的形式,即

$$M=C_M\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 C^2 \tag{7-5}$$

作用于翼型的力矩要看对那一点取矩而定。通常可以对翼型的前缘点取矩,这时如果力矩是使得翼型冲角增大,其方向为正,反之为负,力矩系数以 C_M 表示。也可对距离前缘为 1/4 翼弦长度的 1/4 弦长点(quarter-chord point)取矩。如果对翼弦的压力中心(center of pressure)取矩,则力矩为零。

对于不可压缩流体中的翼型绕流,升力系数和阻力系数主要与翼型的形状、几何参数、冲角 α_0 和雷诺数 Re 有关。如果能够得到翼型周线上各点的压强,一般压强用无量纲的压强系数 C_p 表示为

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \tag{7-6}$$

升力和阻力均可通过计算得出。图 7-3 表示不同冲角情况下翼型上的压强系数分布情况。由图可以看出翼型的上部周线是低压区,压强系数大多为负值,下部周线作用有较无穷远处未受扰动压强 p_∞ 略高的正压强。上下周线压强分布曲线之间的面积决定着升力的大小。图 7-3(a)、(b)、(c)分别表示当冲角为 0°,5.1°和

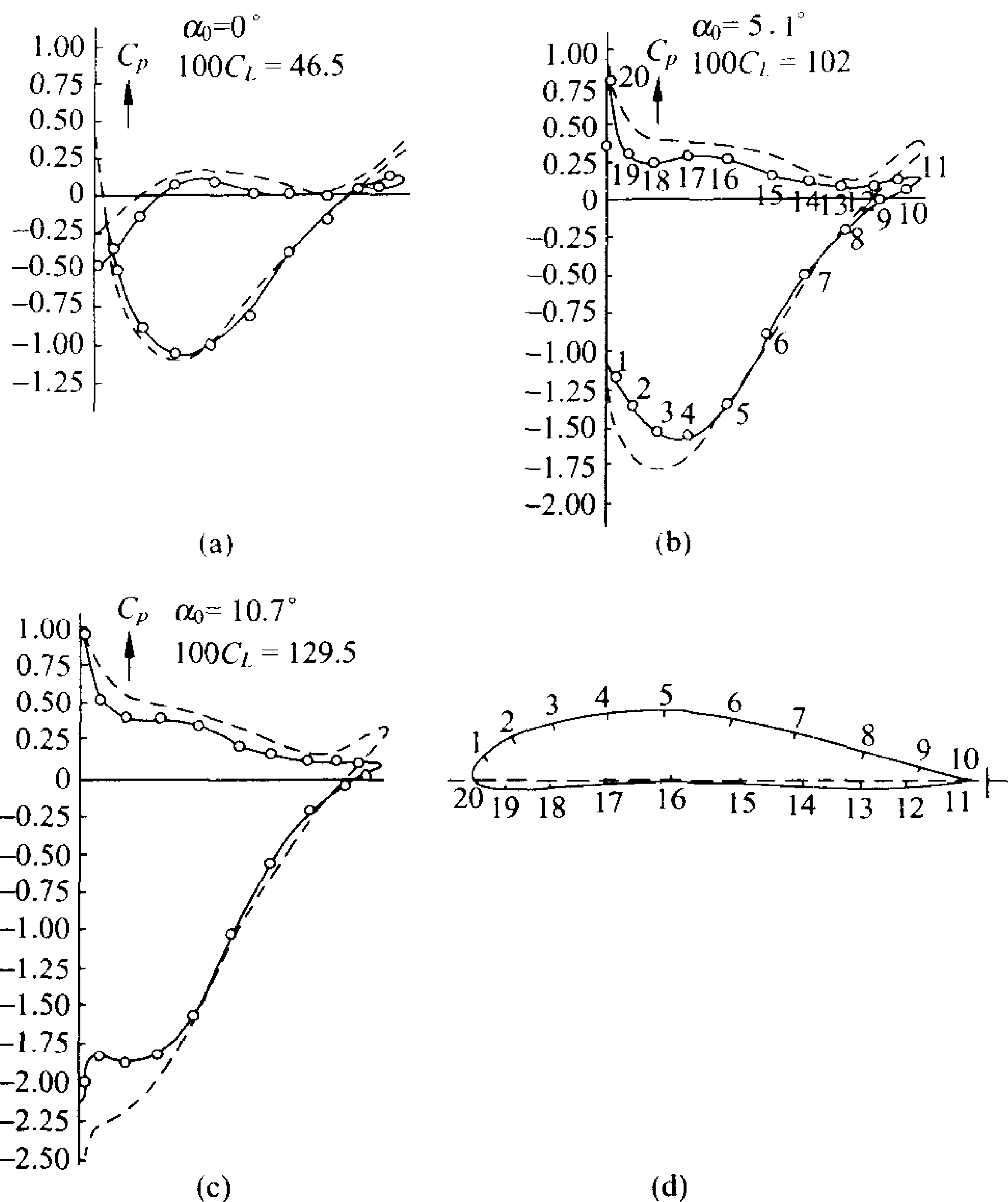


图 7-3 翼型压强系数分布[1]

10.7°时的压强分布，如图 7-4 中升力曲线上的 A，B，C 点的情况。

翼型的流体动力特性通常可以用一些特性曲线来表示，比较常用的有：

(1) 升力系数 C_L 与冲角 α_0 的关系曲线，如图 7-4 所示。在实用范围内，升力系数与冲角基本上是线性关系。当冲角较大时，曲线略向下弯曲。升力系数有一最大值 C_{Lmax}，随后升力系数突然

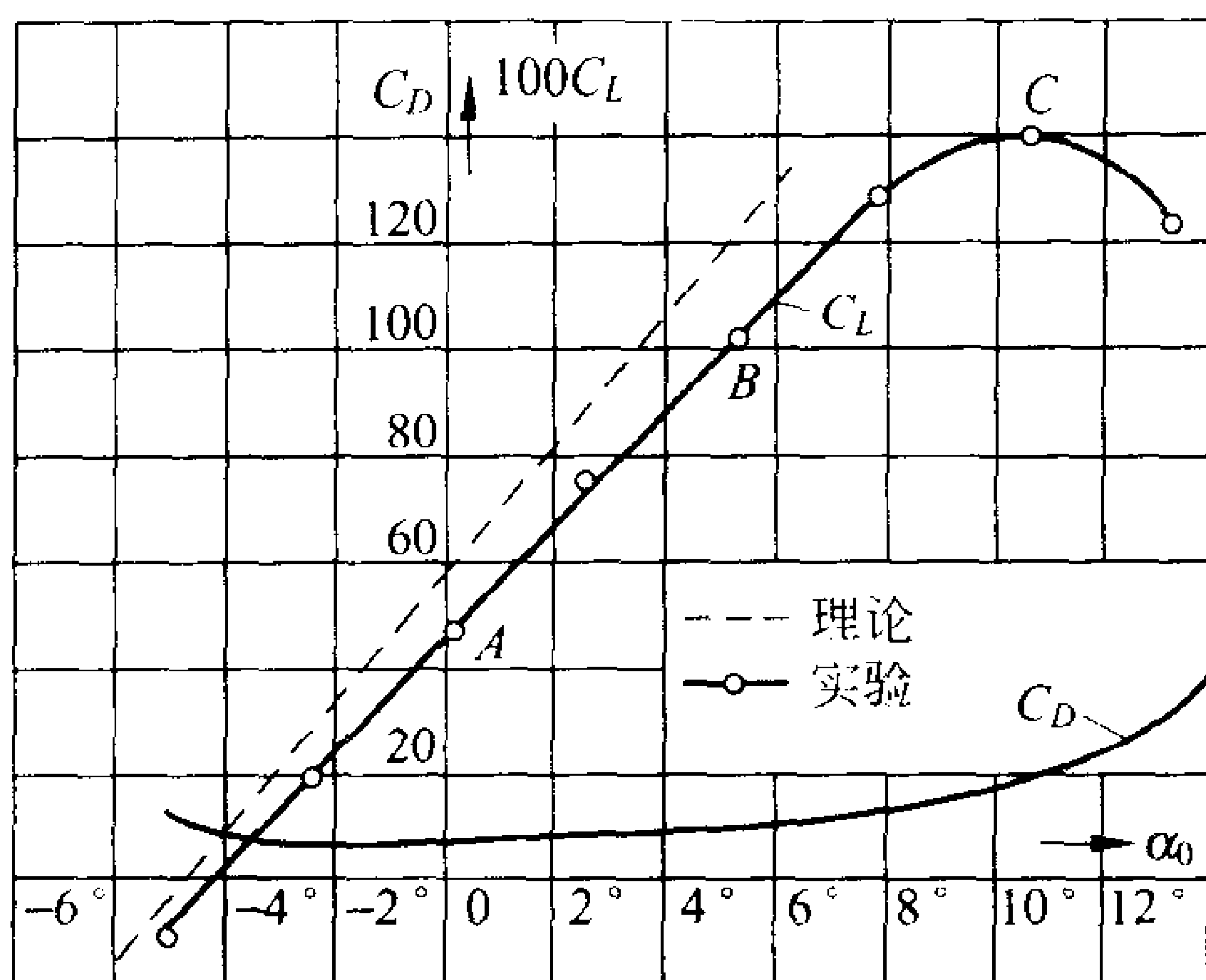


图 7-4　升力与阻力系数[1]

下降，这一现象称为失速(stall)，是飞行中一种很危险的情况。升力系数为 $C_{L\max}$ 时的冲角为临界冲角(critical attack angle)。

(2) 阻力系数 C_D 与冲角 α_0 的关系曲线，如图 7-4 所示。一般在某一不大的负冲角时有最小值 $C_{D\min}$。随着冲角的增加，阻力增加得很快。

(3) 升力系数 C_L 与阻力系数 C_D 的关系曲线，也称极曲线(drag polars)，如图 7-5 所示，曲线上注出了每一点处的冲角数值。由原点 O 到曲线上任一点的向径表示在该相应冲角情况下的总气动力系数的大小和方向。该向径的斜率即为在该冲角情况下升力与阻力之比 $K=C_L/C_D$，称为升阻比(lift/drag

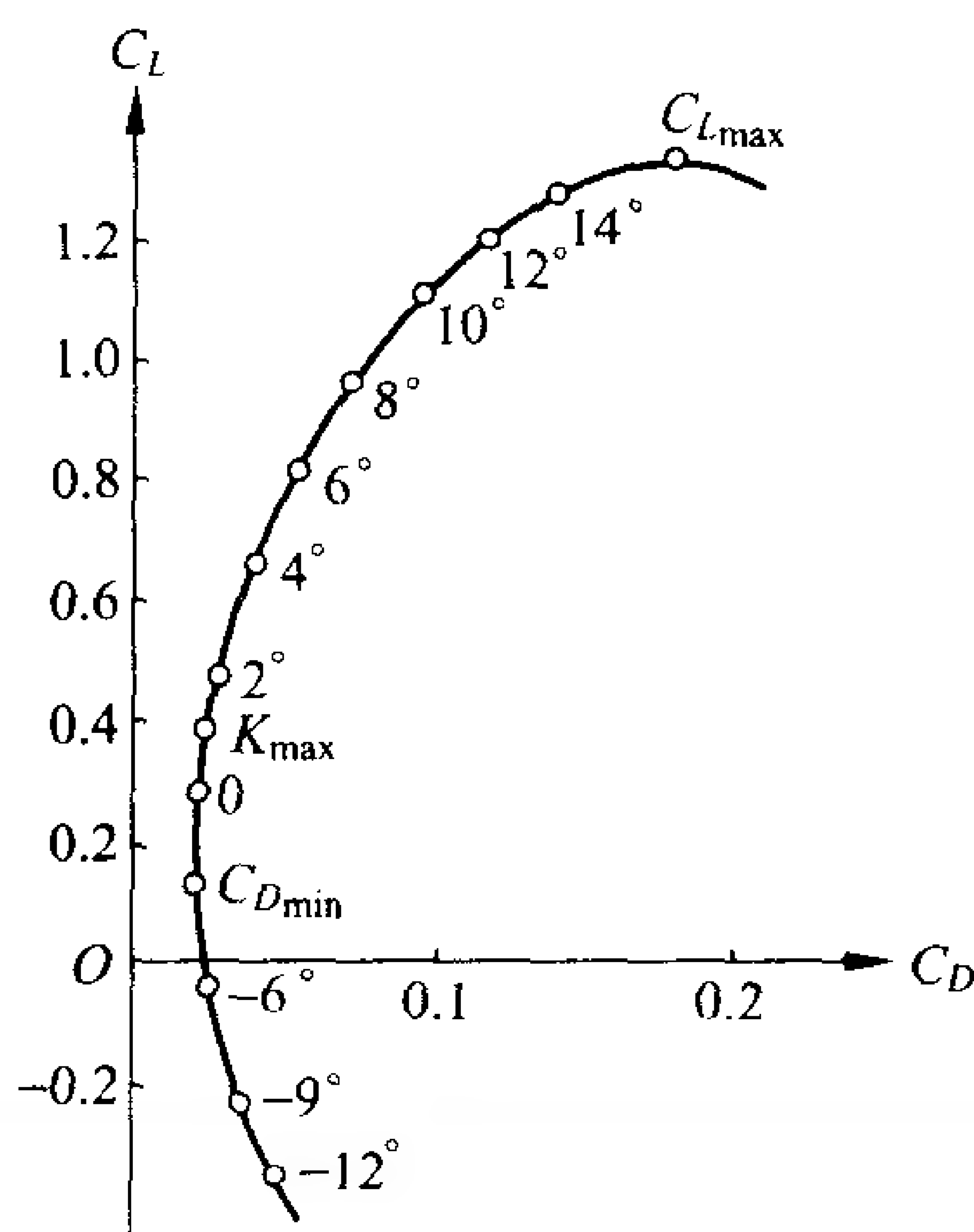


图 7-5　极曲线图[6]

ratio),是翼型流体动力特性中一个很重要的参数。注意由于 C_D 的值远小于 C_L,因此两个坐标的比尺并不相同。

(4) 力矩系数 C_M 与冲角 α_0 的关系曲线,如图 7-6 所示。在翼型未失速以前,C_M 基本为一直线。这里的力矩是对 $C/4$ 点取的。根据此曲线可以决定压力中心,即合力作用线与翼弦交点的位置。

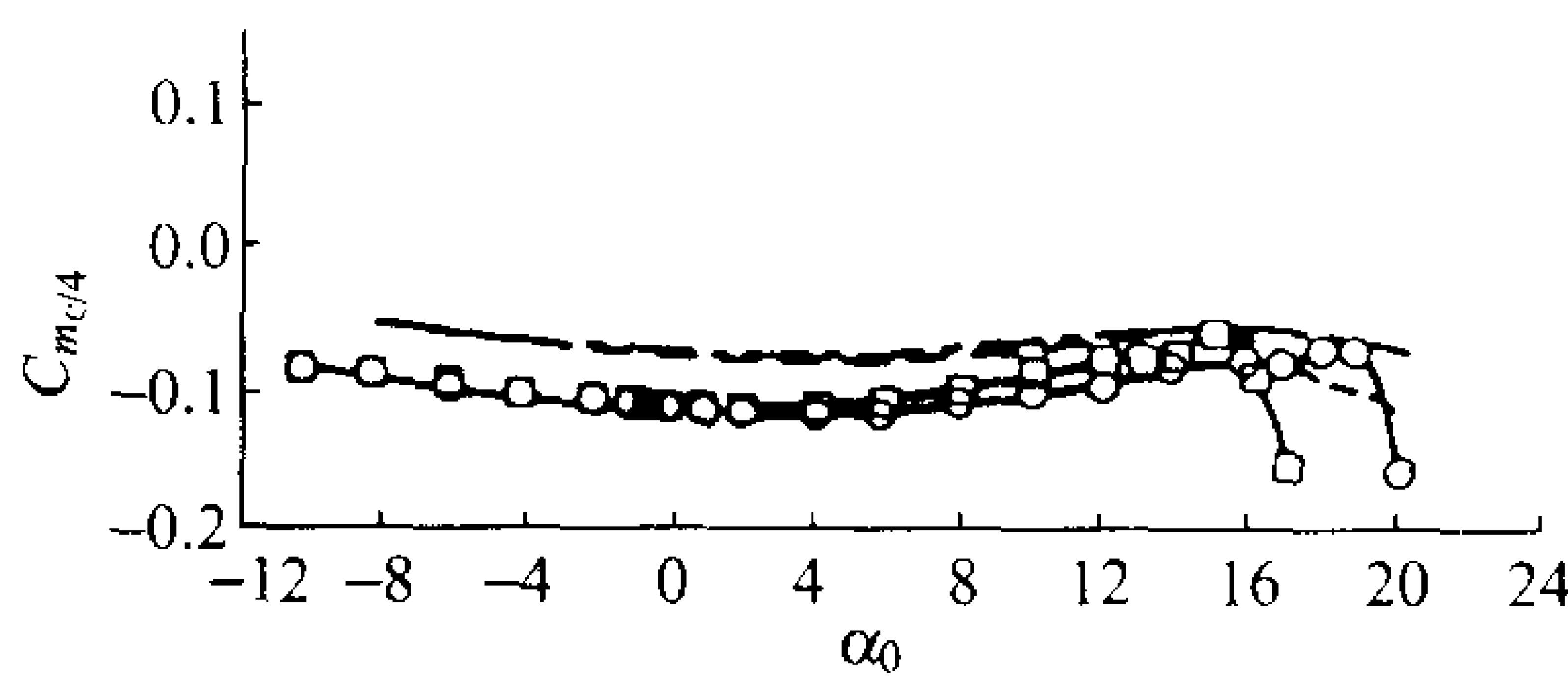


图 7-6 力矩与冲角关系[3]

7.2 保角变换

7.2.1 保角变换基本原理

在复变函数论中,解析函数的几何解释就是把一个平面通过函数关系映射(mapping),或者说是变换(tranformation)到另一平面,而这样的变换在所有解析函数导数不为零的那些点处,都是保角变换。一些复杂的流动边界通过保角变换可以变换为另一平面上比较典型的一些流动边界。例如:翼型绕流通过保角变换可以变换为另一平面上的圆柱绕流,而圆柱绕流已在平面势流理论中做过深入的研究,其复势包括其流速场、压强场和作用于圆柱的流体作用力等均为已知,因此就可以利用已有的圆柱绕流的成果解决翼型绕流的问题。

设在 z-平面上一个复杂的流动边界,z-平面也称为物理平面

(physical plane)，坐标为 x 轴及 y 轴，即 $z=x+\mathrm{i}y$。通过变换关系

$$\zeta=g(z) \tag{7-7}$$

可以变换到 ζ-平面上另外的流动边界。ζ-平面也称为辅助平面(auxiliary plane)，坐标为 ξ 轴和 η 轴，即 $\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$。式(7-7)中的函数 $g(z)$ 为一解析函数。z-平面上各点与 ζ-平面上各点通过式(7-7)的关系一一对应，如图 7-7 中 z_0 点与 ζ_0 点。

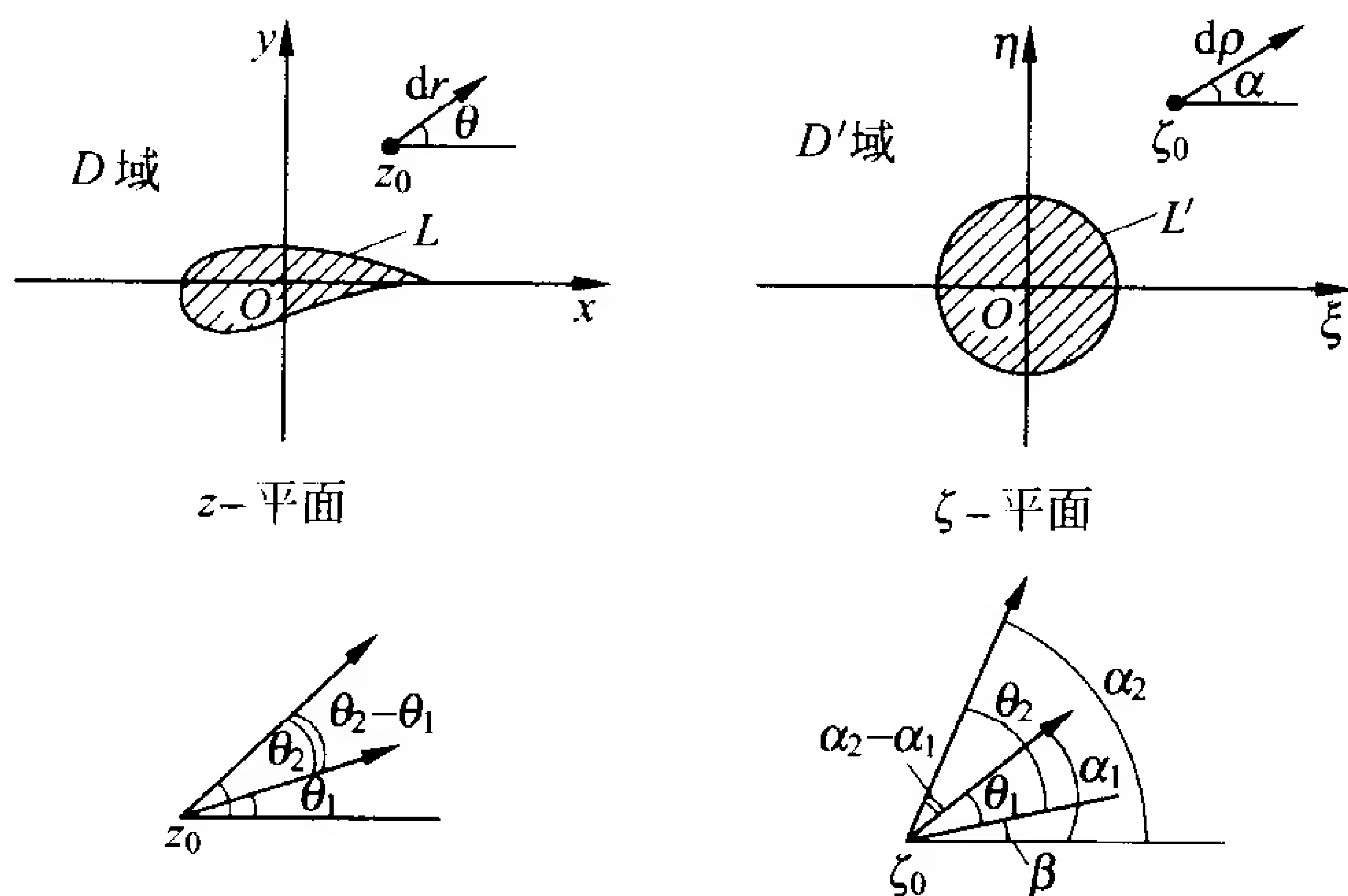


图 7-7　保角变换

在 z-平面上

$$z=x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{7-8}$$

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{7-9}$$

在 ζ-平面上

$$\zeta=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{7-10}$$

$$\mathrm{d}\zeta=\mathrm{d}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{7-11}$$

由式(7-7)得

$$\mathrm{d}\zeta=g'(z)\mathrm{d}z \tag{7-12}$$

在某一点 z_0 处，设

$$g'(z_0)=\sigma e^{i\beta} \tag{7-13}$$

式中：$\sigma=|g'(z_0)|$为复数的模；$\beta=\arg g'(z_0)$为复数的幅角。将式(7-9)、式(7-11)、式(7-13)代入式(7-12)得

$$d\zeta=d\rho e^{i\alpha}=\sigma e^{i\beta}dre^{i\theta}=\sigma dre^{i(\beta+\theta)}$$

所以

$$d\rho=\sigma dr \tag{7-14}$$

$$\alpha=\theta+\beta \tag{7-15}$$

由此可见：在 z 与 ζ 两个平面上，微线段的长度 dr 与 $d\rho$ 之间相差 σ 倍，σ 称为放大系数或变换比尺；而角度的变化是在原 z-平面上角度 θ 再向正方向旋转一个 β 角。对于 z-平面上不同的点，由于 $g'(z)$并不相等，因此 σ 与 β 也不相同。在 z-平面通过 z_0 点互相相交的两个线段之间的夹角则与其相应的 ζ_0 点处两相应线段的夹角相等，这种角度的保存性是把这一变换称为保角变换(comformal transformation)的原因。如图 7-7 所示，其角度可表示为

$$\alpha_2-\alpha_1=(\theta_2+\beta)-(\theta_1+\beta)=\theta_2-\theta_1 \tag{7-16}$$

在 ζ-平面上的复势为 $F(\zeta)=\Phi+i\Psi$，这个函数是在 D'域和边界周线 L'上连续且在 D'域内解析的函数，其中流速势函数 Φ 与流函数 Ψ 均为调和函数，分别满足拉普拉斯方程。保角变换是 z-平面和 ζ-平面之间的双向单值变换，因而式(7-7)也可写为

$$z=g^{-1}(\zeta) \tag{7-17}$$

式中：g^{-1}表示 g 的反函数。

通过式(7-17)可以把 ζ-平面变换到 z-平面，z-平面上的复势为 $f(z)=\phi+i\psi$，于是

$$f(z)=f[g^{-1}(\zeta)]=F(\zeta) \tag{7-18}$$

根据复合函数的性质可知：$f(z)$是 z-平面上 D 域和边界周线 L 上连续且在 D 域内解析的函数；ϕ 和 ψ 均为调和函数且满足拉普拉斯方程。在 ζ-平面和 z-平面的对应点上有

$$\phi+i\psi=\Phi+i\Psi$$

从而可知

$$\phi=\Phi,\psi=\Psi \tag{7-19}$$

式(7-19)说明物理平面上一点的流速势 ϕ 与流函数 ψ 分别与辅助平面上对应点处的流速势 Φ 与流函数 Ψ 相对应。保角变换中对应点上的复势可将变换关系直接代入即可得出。对于复速度，则由式(7-12)可得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{g'(z)}=\mathrm{d}F$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{1}{g'(z)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \tag{7-20}$$

式中：$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}=W(\zeta)$表示 ζ 平面上的复速度；$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=w(z)$表示 z-平面上的复速度。

式(7-20)表明两个平面上的复速度与复势的情况并不相同，但它们互成比例并相差一定的角度，这个比例就是所研究的点处$\frac{1}{g'(z)}$的模，而相差的角度就是该点处$\frac{1}{g'(z)}$的幅角。式(7-20)还可写为

$$w(z)=g'(z)W(\zeta) \tag{7-21}$$

保角变换的基本问题是已经给定在一个平面，例如 z-平面上的流动边界 L 和流动区域 D 以及另一平面 ζ-平面上的流动边界 L'和流动区域 D'，当然，ζ-平面上的流动最好是典型、已知的流动，要求构成一个解析函数，通过此解析函数把一个平面上的流动变换到另一平面上去，使得另一平面的流动得到解答。

根据黎曼定理(Riemann B.，1851)，不论两个单连通域 D 和 D'是怎样的，也不论这两个区域中的两个相应点 z_0 与 ζ_0 以及一个实数 β 是怎样给定的，总有一个把区域 D 变换到区域 D'上去的保角变换 $\zeta=g(z)$存在，使得 $\zeta_0=g(z_0)$，而且 $\arg g'(z_0)=\beta$。并且这样的保角变换只有一个。

保角变换的反问题是先给出保角变换的解析函数，然后由于这种变换确定 ζ-平面上与 z-平面对应的流动边界。一般来说，反

问题比较易于解答。

7.2.2 源、汇与涡的变换

源、汇与涡等基本的平面势流，作为奇点，它们在保角变换中保持其强度不变。设在 z-平面有源、汇和涡，汇可以作为强度为负值的源看待，包围这些奇点的封闭曲线为 L，由式(6-33)已知

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \oint_L \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \mathrm{i}\oint_L \mathrm{d}q$$

$$= \Gamma + \mathrm{i}q \tag{6-33}$$

式中：Γ 为沿封闭曲线 L 的环量，可以代表封闭曲线 L 所包围的所有涡的强度的总和；q 表示穿过封闭曲线 L 的流量，也就是封闭曲线 L 所包围的所有源或汇的强度的总和。

图 7-8 表示一封闭曲线 L，在 L 内分布有源和涡，封闭曲线 L 上任意微元弧 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 可以分解为 x 轴方向的 $\mathrm{d}x$ 和 y 轴方向的 $\mathrm{d}y$。于是

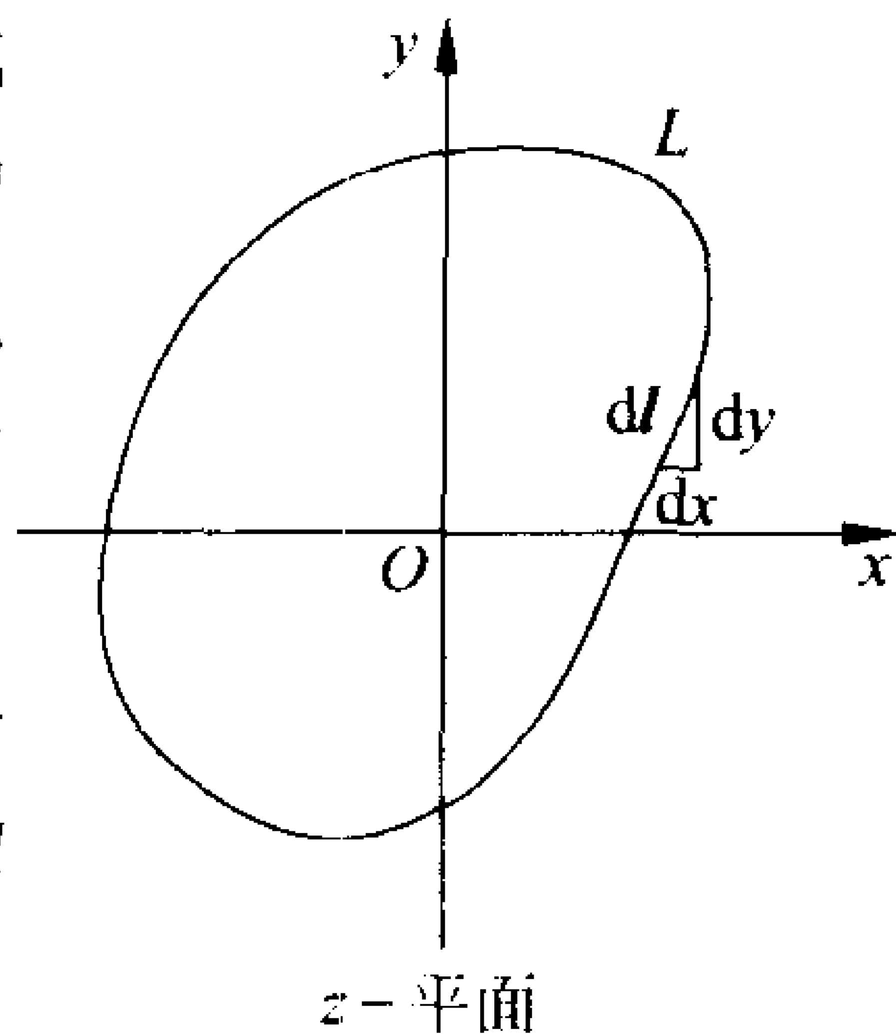


图 7-8　源与涡的变换

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) \tag{7-22}$$

$$q = \oint_L \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}l = \oint_L (u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x) \tag{7-23}$$

在 z-平面中，复速度 $w(z) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = u - \mathrm{i}v$，所以

$$\oint_L w(z)\mathrm{d}z = \oint_L (u - \mathrm{i}v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

$$= \oint_L (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint_L (u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x)$$

$$= \Gamma + \mathrm{i}q \tag{7-24}$$

对 z-平面的源、汇和涡通过保角变换变换到 ζ-平面上去，对应 z-平面的封闭曲线 L，在 ζ-平面上为封闭曲线 L'。各个奇点，包括源、汇和涡变换到 ζ-平面后其复势不变，也就是说保角变换并不改变奇点的性质，z-平面的源变换到 ζ-平面仍为源，而 z-平面的涡变换到 ζ-平面仍为涡。通过保角变换，它们的强度也是不变的，可通过下式说明。

$$\begin{aligned}\Gamma_z+\mathrm{i}q_z &=\oint_L w(z)\mathrm{d}z\\ &=\oint_L W(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\\ &=\oint_{L'} W(\zeta)\mathrm{d}\zeta\\ &=\Gamma_\zeta+\mathrm{i}q\zeta \end{aligned}\tag{7-25}$$

7.2.3 简单解析函数

本节研究线性函数及幂函数这两种解析函数作为变换函数进行保角变换的反问题。

(1) 线性函数

$$\zeta=Az+B=A(z-z_0),\quad z_0=-B/A \tag{7-26}$$

式中：A 和 B 均为复数。

这一线性变换关系表示坐标的平移，放大和旋转。坐标原点由 $z=O$ 平移至 $z=z_0$。$A=me^{-\mathrm{i}\theta_0}$ 表示坐标的放大（放大倍数为 m）和坐标的旋转，（旋转角度为 θ_0）。例如在 ζ-平面的圆柱绕流，其复势为

$$F(\zeta)=U_\infty^*\left(\zeta+\frac{a^2}{\zeta}\right)+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\frac{\zeta}{a} \tag{6-89}$$

式中：U_∞^* 为 ζ-平面中无穷远来流速度，其方向与 ξ 轴平行；a 为圆柱半径，圆柱的圆心位于 ζ-平面的原点处。

通过式(7-26)的线性变换,将 ζ-平面的圆柱绕流变换到 z-平面上去,z-平面上流动的复势为

$$f(z)=U_\infty^* A(z-z_0)+U_\infty^* \frac{a^2}{A(z-z_0)}+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\frac{A(z-z_0)}{a} \tag{7-27}$$

现在来考察 z-平面上这个新的复势所代表的流动。在 ζ-平面上,绕流圆柱的周线方程为

$$\zeta=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{7-28}$$

通过线性变换式(7-26),在 z -平面上绕流物体的周线方程为

$$z-z_0=\frac{a}{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\frac{a}{m}\mathrm{e}^{\alpha+\theta_0} \tag{7-29}$$

式(7-29)说明:变换到 z-平面上仍然是一个圆,半径 r 为$\frac{a}{m}$,而圆心在 $z=z_0$ 处;在 ζ 平面以坐标原点为圆心,a 为半径的圆柱上,角度为 α 的一个点变换为 z 平面以 z_0 为圆心,$\frac{a}{m}$为半径的圆柱上,角度为 $\theta=\alpha+\theta_0$ 的一个点。

z-平面的复速度 $w(z)$为

$$w(z)=U_\infty^* A-U_\infty^* \frac{a^2}{A}(z-z_0)^{-2}+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}(z-z_0)^{-1} \tag{7-30}$$

在无穷远处 $z\to\infty$时的复速度为

$$w(z)=U_\infty-\mathrm{i}V_\infty=U_\infty^* A=U_\infty^* m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0} \tag{7-31}$$

因此在 z-平面上无穷远来流速度 $\boldsymbol{U}_\infty$ 为

$$\boldsymbol{U}_\infty=U_\infty+\mathrm{i}V_\infty=U_\infty^* m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \tag{7-32}$$

式(7-32)说明:$\boldsymbol{U}_\infty$ 的大小为 U_∞^* 的 m 倍,而方向为 x 轴的正方向,即逆时针方向旋转 θ_0 角度。

将式(7-29) $z-z_o=\frac{a}{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$代入式(7-30)的复速度表达式中可得在 z-平面的圆柱柱面上的复速度。

$$
\begin{aligned}
W(z) &= U_\infty^* A - U_\infty^* \frac{a^2}{A}\left(\frac{a}{A}e^{i\alpha}\right)^{-2} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{a}{A}e^{i\alpha}\right)^{-1} \\
&= U_\infty^* A - U_\infty^* A e^{-2i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{A}{a}e^{-i\alpha} \\
&= \left[U_\infty^* A(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) + \frac{i\Gamma A}{2\pi a}\right]e^{-i\alpha} \\
&= \left[U_\infty^* m(2i\sin\alpha) + \frac{i\Gamma m}{2\pi a}\right]e^{-i(\alpha+\theta_0)}
\end{aligned}
$$

与式(6-32)对比可知：在 z 平面上以 z_0 为原点的圆柱坐标中径向与圆周向的流速分量分别为

$$
\left.\begin{aligned}
u_r &= 0 \\
u_\theta &= -2U^* m\sin\alpha - \frac{\Gamma m}{2\pi a}
\end{aligned}\right\} \tag{7-33}
$$

在圆柱表面 $u_r=0$，符合柱面上无穿透边界条件。将式(7-33)与式(6-93)比较可知：这里无穷远来流流速为 mU_∞^* 而圆柱半径为 $\frac{a}{m}$。这一变换如图 7-9 所示。

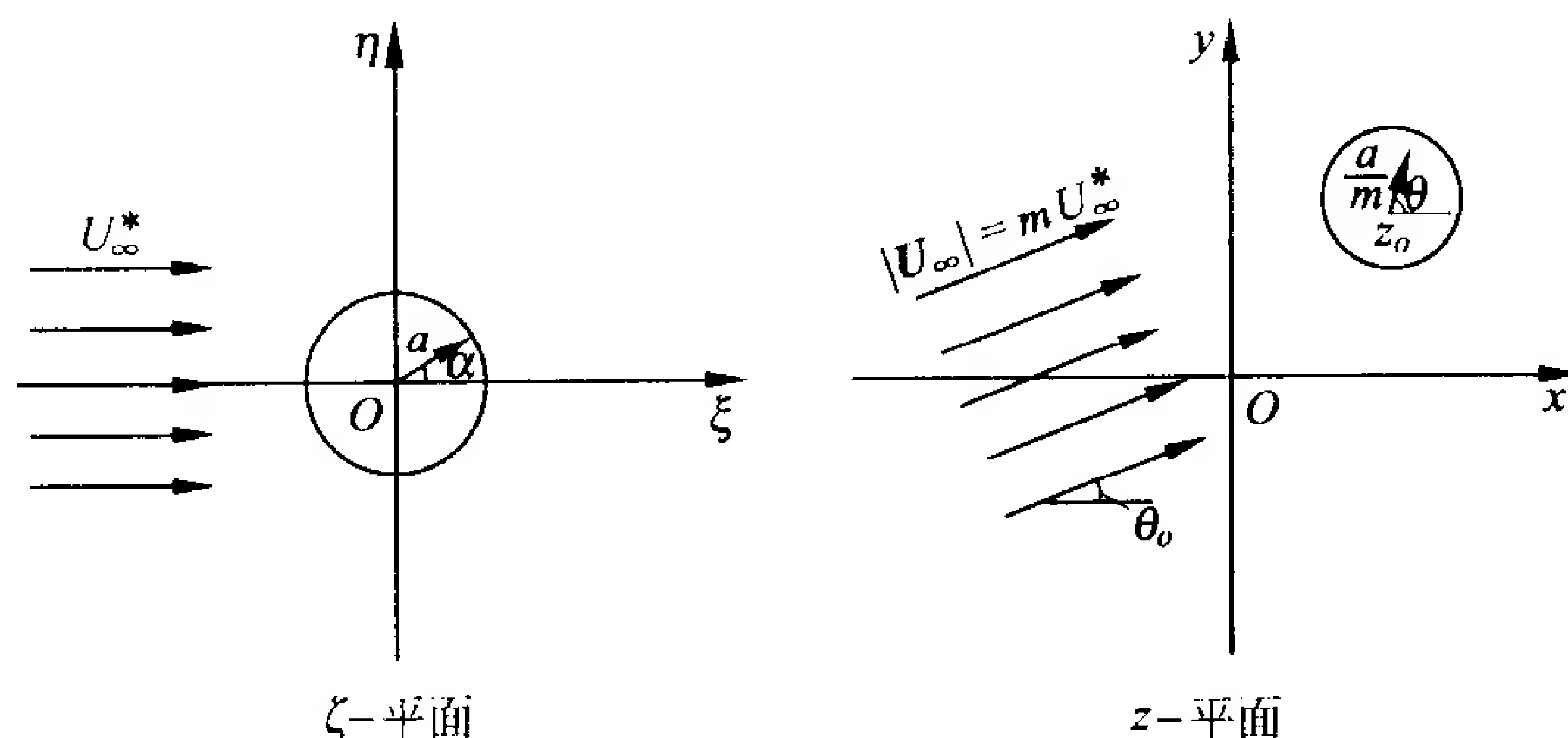


图 7-9　圆柱绕流的线性变换

(2) 幂函数

$$z=b\zeta^n \tag{7-34}$$

式中:b 和 n 都是实数。

z 和 ζ 都沿用以前的表示方法,即

$$z=re^{i\theta} \tag{7-8}$$

$$\zeta=\rho e^{i\alpha} \tag{7-10}$$

通过式(7-34)的变换得

$$\zeta=b^{-\frac{1}{n}}r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right] \tag{7-35}$$

由此可以看出:首先,幂函数 $z=b\zeta^n$ 将 z-平面上的射线 $\theta=C$ 变换到 ζ-平面上为射线 $\alpha=\frac{C}{n}$。当变换中 $n=1$ 时则为线性变换,由于 b 为实数,所以变换中角度并无旋转,只是变换比尺为$\frac{1}{b}$。其次,z-平面上的无限长直线,如 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 变换到 ζ-平面后仍是无限长直线;当$\frac{1}{2}<n<1$ 时,z-平面上的无限长直线$\theta=0$和$\theta=\pi$变换为 ζ-平面上的直线 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\frac{\pi}{n}<2\pi$。$z$-平面$\theta=0$和$\theta=\pi$之间的上半平面区域变换为 ζ-平面 $\alpha=0$ 至 $\alpha=\frac{\pi}{n}<2\pi$ 之间的外角区域;而当 $n>1$ 时,z-平面上 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ 之间的上半平面区域变换为 ζ-平面上 $\alpha=0$ 至 $\alpha=\frac{\pi}{n}$之间的内角区域,如图 7-10 所示。

z-平面上半平面沿 x 方向的均匀流动其复势为

$$f(z)=Uz \tag{6-36}$$

通过幂函数变换到 ζ-平面上就是上图 7-10 中 ζ-平面的绕角流动,其复势为

$$F(\zeta)=bU\zeta^n \tag{7-36}$$

将式(7-36)与式(6-54)比较可知:此时 ζ-平面上的来流流速为 bU,为 z-平面的 b 倍,但方向仍为沿水平轴的方向。

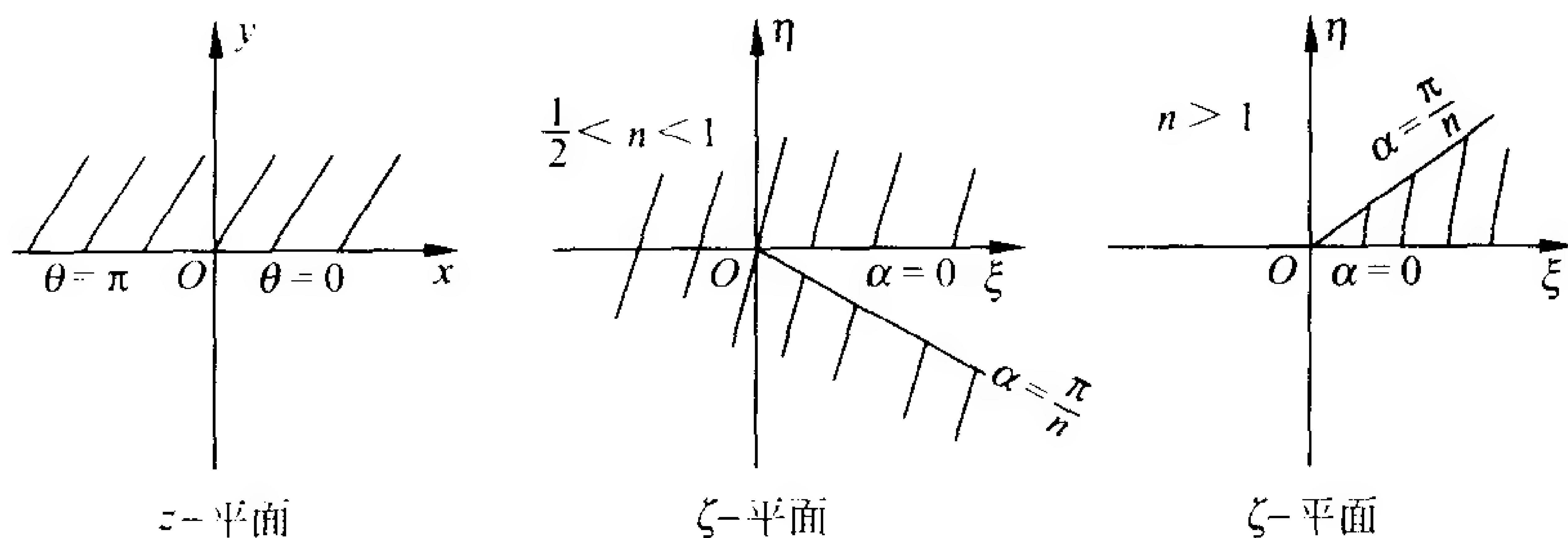


图 7-10　幂函数变换

7.3　儒可夫斯基变换

7.3.1　儒可夫斯基变换式

在研究理想流体平面势流运动中，应用保角变换的方法是一个将复杂流动变为比较典型的流动，从而得到理论解答的重要方法。儒可夫斯基变换(Joukowski transformation)是保角变换中一个十分重要的变换函数，它可以将绕翼型流动，绕椭圆柱的流动等变换为已知的绕圆柱的流动。应用上常常相反地将一个简单的已知流动，例如绕圆柱的流动放在 ζ-平面上，而在 z-平面上与之相应的流动是需要通过变换加以研究的流动，即由 ζ-平面向 z-平面的变换。

儒可夫斯基变换的解析函数具有如下形式：

$$z=\zeta+\frac{C^2}{\zeta} \tag{7-37}$$

式中：常数 C 为实数。

儒可夫斯基变换的一个主要特性是对于 $|\zeta|$ 很大的数值，$z\to\zeta$，也就是说当距离原点很远处儒可夫斯基变换为“同一变换”(identity mapping)。在 ζ 和 z 两个平面中当距离原点甚远处其

复速度是相同的。如果在 z-平面中无穷远来流以某一冲角流向绕流物体，则在 ζ-平面中会有同样大小的无穷远来流以同一冲角流向相对应的绕流物体。

由图 7-11 可以看出 ζ-平面上的两个点为

$$\zeta=\rho e^{i\alpha}$$

$$\frac{C^2}{\zeta}=\frac{C^2}{\rho}e^{-i\alpha}$$

ζ-平面上的这两个点变换到 z-平面上的一个点 $z=\zeta+\dfrac{C^2}{\zeta}$，在图 7-11上的作图方法是：自一点 ζ 画以 C 为半径的圆的切线，切点为 T；自 T 引与 $O\zeta$ 垂直的线段，交 $O\zeta$ 于 Q' 点，Q' 点即为 ζ 对于圆 C 的反演点，即 $\overline{OQ'}=\dfrac{C^2}{\overline{O\zeta}}$；与 Q' 点共轭的点 Q 就代表 $\dfrac{C^2}{\zeta}$；Q 与 ζ 两点之和，即图上 $\overline{O\zeta}$ 与 $\overline{OQ}$ 的向量和为 $\zeta+\dfrac{C^2}{\zeta}$。儒可夫斯基变换式(7-37)的逆变换式为

$$\zeta=\frac{z}{2}\pm\sqrt{\frac{z^2}{4}-C^2} \tag{7-38}$$

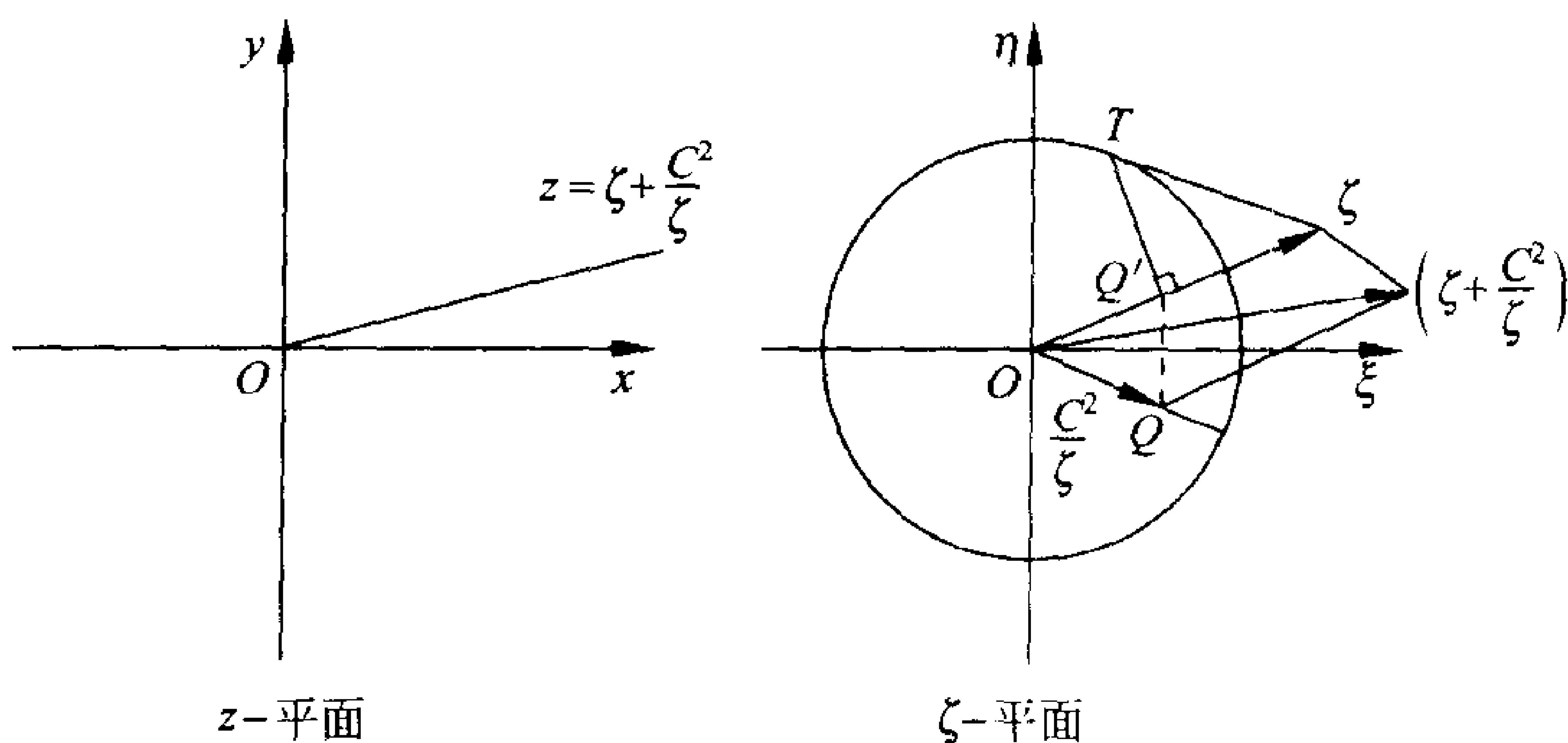


图 7-11　儒可夫斯基变换

显然它是多值函数，z-平面上的一个点对应ζ-平面上的两个点。但是当 $z=\pm 2C$ 时它是单值的，所以 $z=\pm 2C$ 是多值函数的分支点(branch point)(参考复变函数论中有关解析延拓及黎曼曲面部分)。如果只讨论 $z\to\infty$对应于 $\zeta\to\infty$，也就是要求 z-平面上绕流物体周线以外的流动区域对应 ζ-平面上圆周以外的流域，这时单值分支函数是

$$\zeta=\frac{z}{2}+\sqrt{\frac{z^2}{4}-C^2} \tag{7-39}$$

对式(7-37)求导，即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=1-\frac{C^2}{\zeta^2} \tag{7-40}$$

在 $z=\pm 2C$，相对应 $\zeta=\pm C$ 时，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=0$，可见在分支点上变换没有保角性。但是儒可夫斯基变换在两分支点以外的域中处处存在导数，也就是处处为保角变换。

在 $\zeta=0$ 处儒可夫斯基变换有一奇点。但是由于将研究的是在圆周以外区域中的流动，$\zeta=0$ 一般并不在流动区域之内，因此这个奇点并无意义。

7.3.2 均匀流绕椭圆流动

在儒可夫斯基变换中设 C 为正实数。将 ζ-平面上以原点为圆心，a 为半径的圆($a>C$)转换到 z-平面上。即

$$\begin{aligned} z&=\zeta+\frac{C^2}{\zeta}=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\frac{C^2}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\ &=\left(a+\frac{C^2}{a}\right)\cos\alpha+\mathrm{i}\left(a-\frac{C^2}{a}\right)\sin\alpha \end{aligned}$$

由此得出：相应于ζ-平面上以 a 为半径的圆，在 z-平面上的曲线的参数方程式为

$$x=\left(a+\frac{C^2}{a}\right)\cos\alpha$$

$$y=\left(a-\frac{C^2}{a}\right)\sin\alpha$$

利用 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 的关系消去 α 而得

$$\frac{x^2}{\left(a+\frac{C^2}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(a-\frac{C^2}{a}\right)^2}=1 \tag{7-41}$$

由此可见：在 z-平面上是一个椭圆，其长轴位于 x 轴，半轴长度为 $\left(a+\frac{C^2}{a}\right)$，其短轴位于 y 轴，半轴长度为 $\left(a-\frac{C^2}{a}\right)$。

ζ-平面的复速度 $W(\zeta)=\frac{\mathrm{d}F(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}$ 与 z-平面的复速度 $w(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$ 的关系为

$$W(\zeta)=\frac{\mathrm{d}F(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=w(z)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}$$

对儒可夫斯基变换式(7-37)求导，即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=1-\frac{C^2}{\zeta^2}$$

对于无穷远处 $\zeta\to\infty$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\to1$。因此 $W(\zeta)$ 与 $w(z)$ 二者相同。

为了得到无穷远流速为 U 的均匀流以冲角 α_0 流向椭圆体而产生的绕椭圆柱的流动的复势，在辅助平面 ζ-平面中应考虑相同的无穷远来流绕圆柱的流动。由式(6-84)得沿 ξ 轴的来流绕圆柱流动的复势为

$$F(\zeta)=U\left(\zeta+\frac{a^2}{\zeta}\right) \tag{6-84}$$

现在考虑来流与 ξ 轴之间角度为 α_0，其复势为

$$F(\zeta)=U\left(\zeta e^{-i\alpha_0}+\frac{a^2}{\zeta}e^{i\alpha_0}\right) \tag{7-42}$$

将式(7-39)代入上式即可得 z-平面上冲角为 α_0 的来流绕椭圆柱流动的复势

$$f(z)=U\left\{\left[\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-C^2}\right]e^{-i\alpha_0}+\frac{a^2}{\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-C^2}}e^{i\alpha_0}\right\}$$

$$=U\left\{\left[z-\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-C^2}\right]e^{-i\alpha_0}\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{C^2}\left[\frac{z}{2}-\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-C^2}\right]e^{i\alpha_0}\right\}$$

$$=U\left\{ze^{-i\alpha_0}+\left(\frac{a^2}{C^2}e^{i\alpha_0}-e^{-i\alpha_0}\right)\left[\frac{z}{2}-\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-C^2}\right]\right\} \quad (7\text{-}43)$$

这一变换如图 7-12 所示。由式(7-43)可以看出复势中包括一个流速为 U,与水平轴成 α_0 冲角的无穷远均匀来流加上一个在绕流

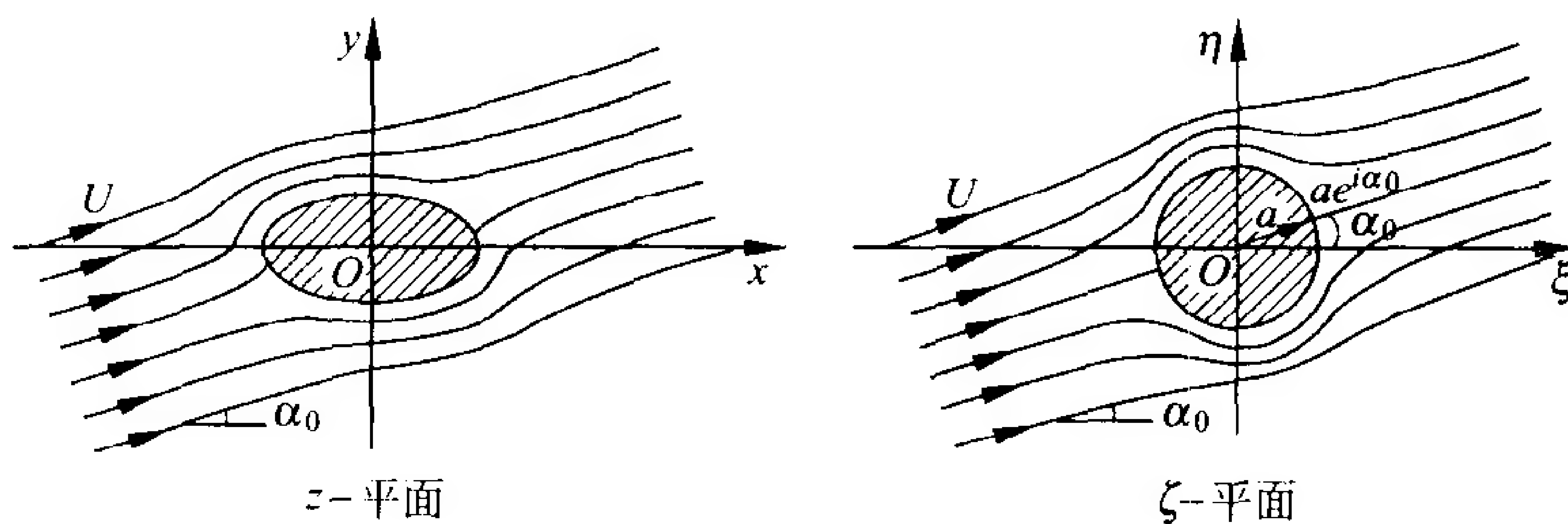


图 7-12　椭圆绕流[11]

物体附近很显著而当 z 值很大时又很微小的扰动。在 ζ-平面上,绕圆柱流动的驻点位于 $\zeta=ae^{i\alpha_0}$ 和 $\zeta=ae^{i(\alpha_0+\pi)}$,也就是$\zeta=\pm ae^{i\alpha_0}$。由式(7-37)可以得出在 z-平面上与此驻点相应的位置为

$$z=\pm ae^{i\alpha_0}\pm\frac{C^2}{a}e^{-i\alpha_0}$$

$$=\pm\left(a+\frac{C^2}{a}\right)\cos\alpha_0\pm i\left(a-\frac{C^2}{a}\right)\sin\alpha_0$$

从而得

$$x=\pm\left(a+\frac{C^2}{a}\right)\cos\alpha_0$$

$$y=\pm\left(a-\frac{C^2}{a}\right)\sin\alpha_0$$

式(7-43)有两种特殊的情况：当 $\alpha_0=0$ 此式表明为一直线的均匀流动绕一水平放置的椭圆体的流动；当 $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$ 则表示为一垂直方向的均匀流动绕水平放置椭圆体的流动。

在这个变换中，如果令 $C=ib$，则式(7-37)变为

$$z=\zeta-\frac{b^2}{\zeta} \tag{7-44}$$

则对应于 ζ-平面上以 a 为半径，原点为圆心的圆 $ae^{i\alpha}$ 有

$$z=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos\alpha+i\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\sin\alpha$$

从而在 z-平面上相应曲线的参数方程为

$$x=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos\alpha$$

$$y=\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\sin\alpha$$

可得 z-平面曲线的方程式为

$$\frac{x^2}{\left(a-\frac{b^2}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(a+\frac{b^2}{a}\right)^2}=1 \tag{7-45}$$

这是一个长轴在 y 轴上，半轴长度为 $\left(a+\frac{b^2}{a}\right)$，而短轴在 x 轴上，半轴长度为 $\left(a-\frac{b^2}{a}\right)$ 的垂直放置的椭圆。水平的均匀来流绕此椭圆的流动的复势仍可以从 ζ-平面上同样水平方向均匀来流绕圆

柱流动的复势变换而得。在 ζ-平面上圆柱绕流的复势为

$$F(\zeta)=U\left(\zeta+\frac{a^2}{\zeta}\right) \tag{5-84}$$

将式(7-39)代入，其中 C 换成 $\mathrm{i}b$，式(7-39)即为 $\zeta=\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+b^2}$，得到 z-平面垂直椭圆绕流的复势为

$$f(z)=U\left\{\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+b^2}+\frac{a^2}{\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+b^2}}\right\}$$

$$=U\left\{z-\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\left[\frac{z}{2}-\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+b^2}\right]\right\} \tag{7-46}$$

图 7-13 表示出这个变换。

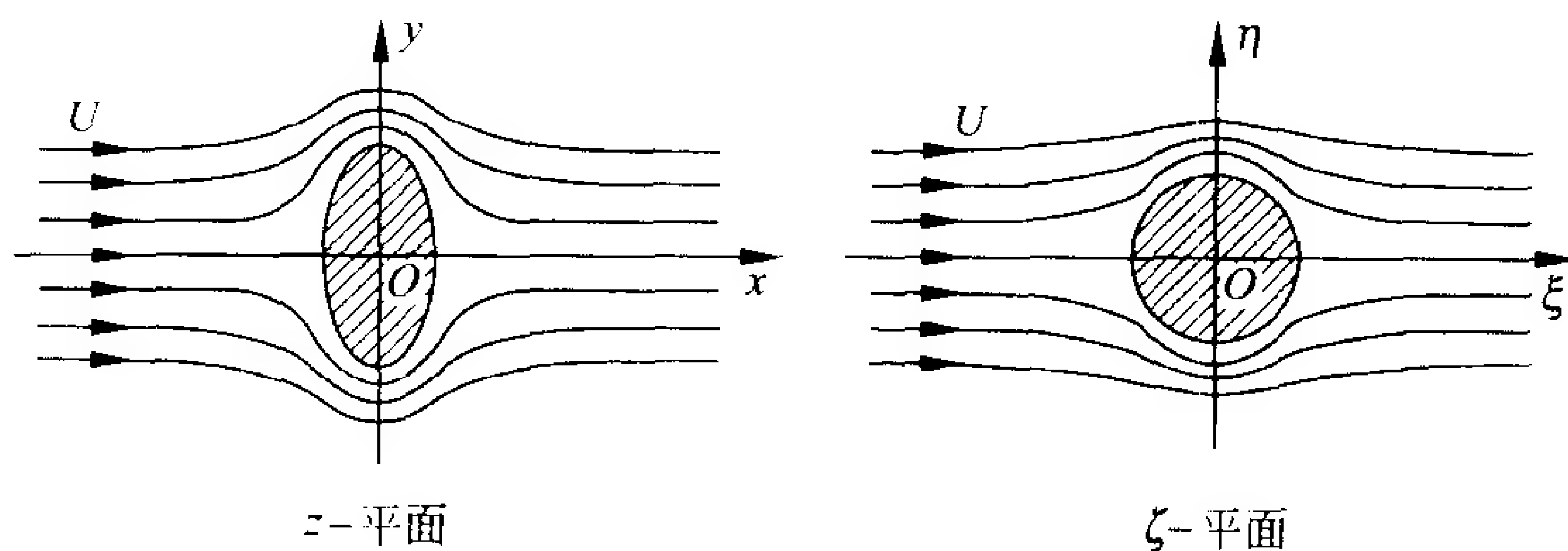


图 7-13 垂直椭圆绕流[11]

7.3.3 均匀流绕平板流动

在儒可夫斯基变换中，当 ζ-平面中圆柱的半径 $a\to C$ 时有

$$z=\left(a+\frac{C^2}{a}\right)\cos\alpha+\mathrm{i}\left(a-\frac{C^2}{a}\right)\sin\alpha$$

$$=2C\cos\alpha$$

z-平面上相应曲线的参数方程为

$$x=2C\cos\alpha$$

$$y=0$$

由于 $y=0$，椭圆退化为厚度为零的水平平板，平板前缘为 $\alpha=\pi$，$x=-2C$，平板后缘为 $\alpha=0$，$x=2C$。平板全长为 $4C$。

与上节中椭圆绕流相似，如果令平板垂直放置，且板长为 $2C$，则儒可夫斯基变换中的 C 以 $\mathrm{i}\dfrac{C}{2}$ 代替之，由式(7-37)得

$$z=\zeta-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta} \tag{7-47}$$

z-平面中长度 $2C$ 垂直放置厚度为零的平板相应 ζ-平面中半径为 $\dfrac{C}{2}$ 的圆周。设来流为水平方向的均匀流，流速为 U，在 ζ-平面中半径为 $\dfrac{C}{2}$ 的圆柱绕流，其复势为

$$F(\zeta)=U\left[\zeta+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta}\right] \tag{7-48}$$

将式(7-39)代入式(7-48)，注意式(7-39)中的 C 应以 $\mathrm{i}\dfrac{C}{2}$ 代替，得

$$\begin{aligned}f(z)&=U\left\{\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{C}{2}\right)^2}+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\left[\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]}\right\}\\&=U\left[2\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]\\&=U\sqrt{z^2+C^2}\\&=U\sqrt{z+\mathrm{i}C}\sqrt{z-\mathrm{i}C}\end{aligned} \tag{7-49}$$

式(7-49)表示为均匀来流绕过垂直平板流动的复势。由 6.5.3 节可知：$U(z-\mathrm{i}C)^{\frac{1}{2}}$为绕过位置于 i$C$ 点处的平板端部(角度为 2π)的流动；而 $U(z+\mathrm{i}C)^{\frac{1}{2}}$ 则为绕过位置于 $-\mathrm{i}C$ 处平板端部的流动。如图 7-14 所示。

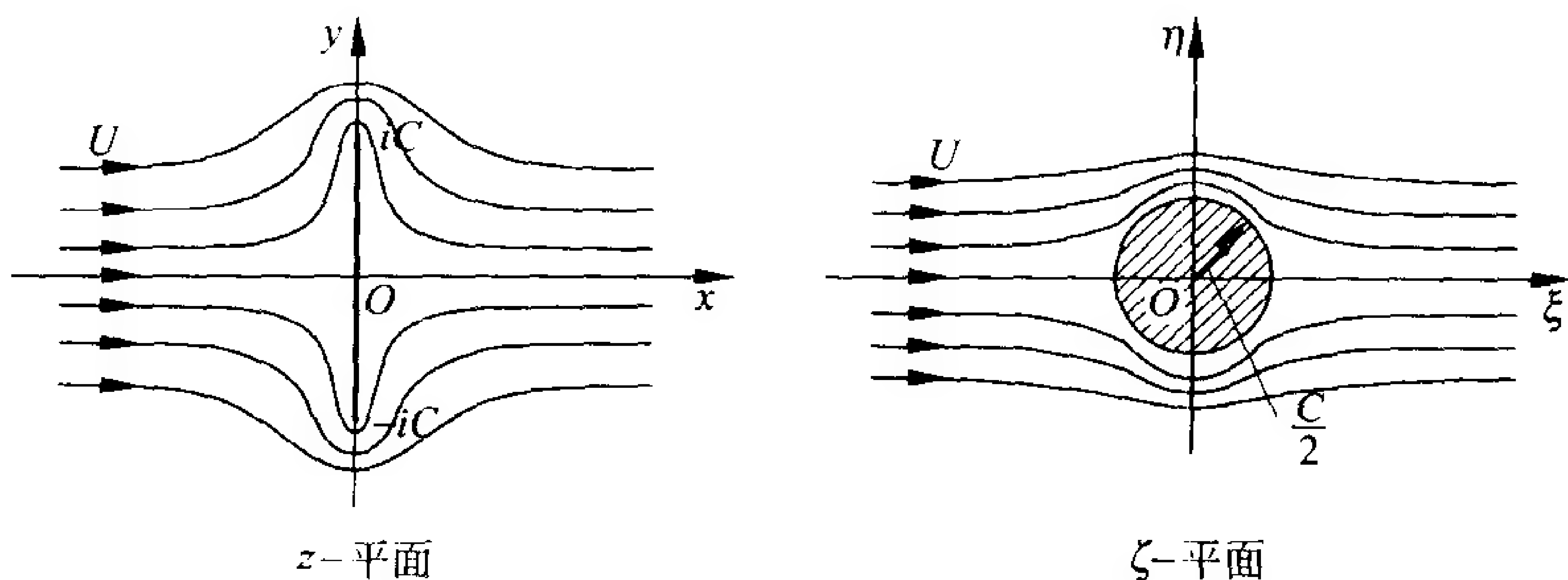


图 7-14　绕垂直平板流动

7.3.4　有冲角均匀流绕过平板的流动

在 z-平面中平板长度为 $2C$，沿 x 轴放置，相应于 ζ-平面中以原点为圆心，$\frac{C}{2}$为半径的圆。这时儒可夫斯基变换式为

$$z=\zeta+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta} \tag{7-50}$$

在 ζ-平面中来流为均匀流，与实轴 ξ 轴成冲角 α_0，则流动的复势为

$$F(\zeta)=U\left[\zeta e^{-\mathrm{i}\alpha_0}+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta e^{-\mathrm{i}\alpha_0}}\right] \tag{7-51}$$

式(7-39)变为

$$\zeta=\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2} \tag{7-52}$$

将式(7-52)代入式(7-51)，得 z-平面绕平板流动的复势为

$$f(z)=U\left\{\left[\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]e^{-i\alpha_0}+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\left[\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]}e^{i\alpha_0}\right\}$$

$$=U\left\{\left[\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]e^{-i\alpha_0}+\left[\frac{z}{2}-\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]e^{i\alpha_0}\right\}$$

$$=U\left\{z\cos\alpha_0-i\sqrt{z^2-C^2}\sin\alpha_0\right\}$$ (7-

对于 ζ-平面中的圆周，$\zeta=\rho e^{i\alpha}=\frac{C}{2}e^{i\alpha}$，代入式(7-51)得

$$F(\zeta)=U\left[\frac{C}{2}e^{i(\alpha-\alpha_0)}+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\frac{C}{2}e^{i(\alpha-\alpha_0)}}\right]$$

$$=U\left(\frac{C}{2}\right)\left[e^{i(\alpha-\alpha_0)}+e^{-i(\alpha-\alpha_0)}\right]$$

$$=UC\cos(\alpha-\alpha_0) \tag{7-54}$$

复速度 $W(\zeta)=\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}$，由式(7-51)得

$$W(\zeta)=U\left[e^{-i\alpha_0}-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta^2e^{-i\alpha_0}}\right] \tag{7-55}$$

在半径为$\frac{C}{2}$的圆周上，$\zeta=\frac{C}{2}e^{i\alpha}$，代入上式得

$$W(\zeta)=U\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}-\frac{\left(\dfrac{C}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{C}{2}\right)^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}}\right]$$

$$=U\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}-\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\alpha-\alpha_0)}}\right]$$

$$=U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\alpha_0)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\alpha_0)}\right]$$

$$=2\mathrm{i}U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\sin(\alpha-\alpha_0) \tag{7-56}$$

当 $\alpha=\alpha_0$，$\alpha=\pi+\alpha_0$，圆周上有两个驻点，驻点处圆周线与成 α_0 角与射线之间夹角为 90°。相对应在 z 平面上驻点的位置可由式(7-50)相应于 $\alpha=\alpha_0$，$\alpha=\pi+\alpha_0$ 得出。而且驻点处平板与相应流线也正交。

$$z=\pm\left[\frac{C}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}+\frac{\left(\dfrac{C}{2}\right)^2}{\dfrac{C}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}\right]$$

$$=\pm\frac{C}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0})$$

$$=\pm C\cos\alpha_0 \tag{7-57}$$

这个变换如图 7-15 所示。

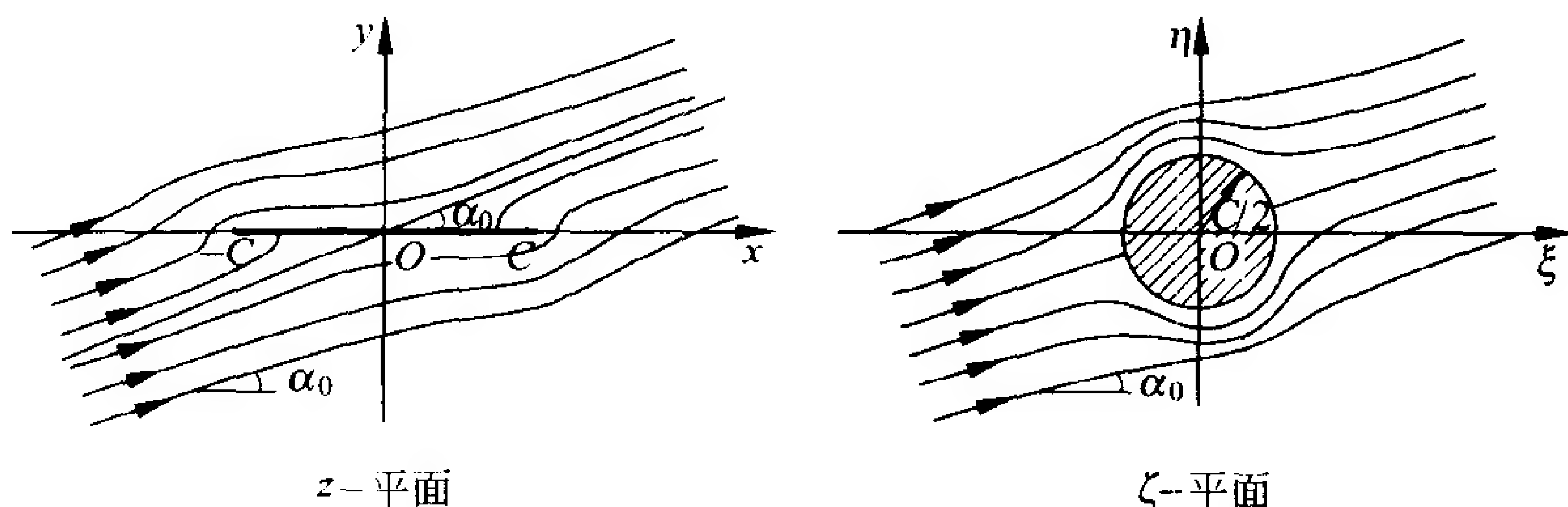


图 7-15　有冲角平板绕流

7.4 库塔-儒可夫斯基条件

在图 7-15 的有冲角平板绕流中，z-平面的平板上有两个驻点。由于冲角 α_0 的存在，两个驻点并不与前缘和后缘重合。上游的驻点在平板的下表面上，距平板前缘的距离为 $C(1-\cos\alpha_0)$。下游的驻点在平板的上表面上，距平板后缘的距离同样为$C(1-\cos\alpha_0)$。在前缘和后缘处的流动都将类似图 6-13 所表示的绕锐缘的流动，在尖锐的缘端流速会变为无穷大，在实际流动里这当然是不可能的。从物理上看这种流动可能有两种结果：一是在锐缘附近流动发生分离，由固体壁面脱开，所形成的自由流线在锐缘处曲率半径不是零而是有限值，从而流速亦为有限值。二是可能在锐缘处为一驻点。绕某一有限物体的流动总是有驻点存在，设法将驻点移至锐缘处是可能的，这就是要满足本节中将讨论的库塔-儒可夫斯基条件(Kutta-Joukowski condition)。

图 7-15 表示有冲角的平板绕流流动，由图可见有两个驻点，并且驻点并不在锐缘处。对于平板的前缘而言，在实际流动中，平板多为翼型，而实用翼型前缘多具有一定厚度而曲率半径为有限值。但实用翼型的后缘则往往相当尖锐，从而后缘出现无穷大的流速。要使后缘的速度为有限值，只有将翼型尾部的驻点移至翼型的后缘。为达到此目的，只需在翼型(或平板)上加一有限值的环量，环量的大小恰好使驻点位于后缘上。这一条件称为库塔-儒可夫斯基条件。

图 7-16 表示在有冲角的平板绕流中增加环量使平板尾部的驻点与后缘重合。

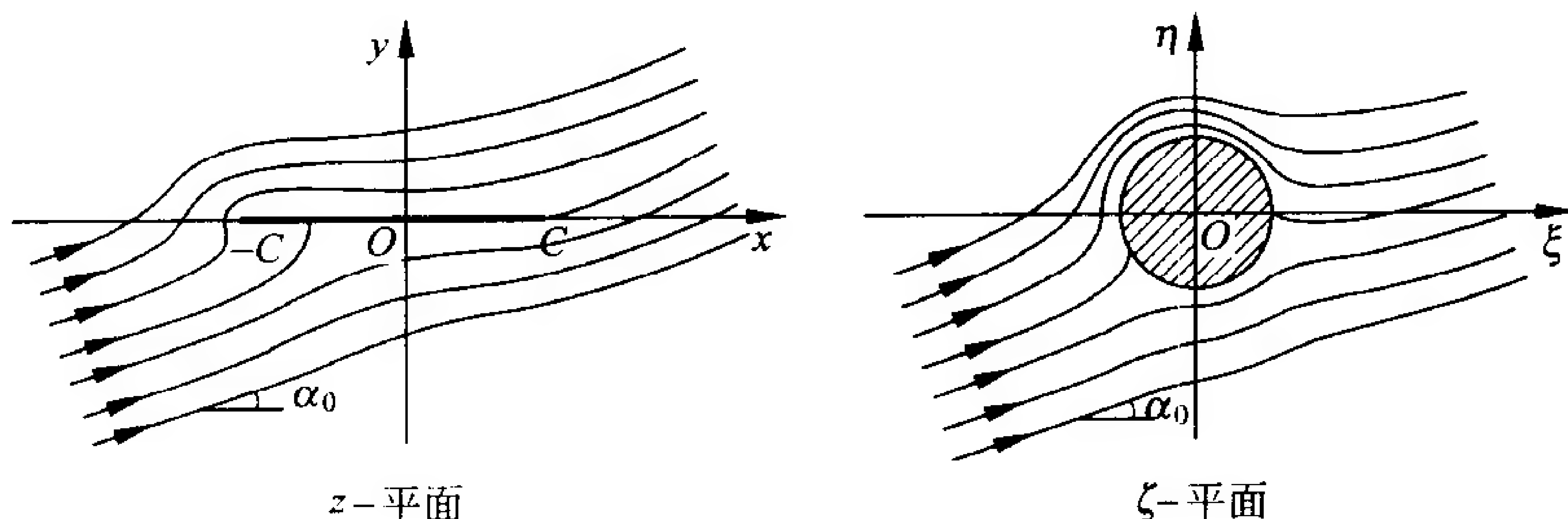


图 7-16　库塔-儒可夫斯基条件[11]

由 6.6.2 节有环量圆柱绕流的复势(式(6-89))得

$$F(\zeta)=U\left[\zeta e^{-i\alpha_0}+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta e^{-i\alpha_0}}\right]+\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{\zeta}{\left(\frac{C}{2}\right)} \tag{7-58}$$

复速度为

$$W(\zeta)=U\left[e^{-i\alpha_0}-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta^2 e^{-i\alpha_0}}\right]+\frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \tag{7-59}$$

在以原点为圆心,半径为$\frac{C}{2}$的圆周 $\zeta=\frac{C}{2}e^{i\alpha}$上复速度为

$$W(\zeta)=2iUe^{-i\alpha}\sin(\alpha-\alpha_0)+\frac{i\Gamma}{\pi C}e^{-i\alpha} \tag{7-60}$$

库塔-儒可夫斯基条件要求后缘为一驻点,即该点处流速为零。即当 $\alpha=0$ 时,$W\left(\frac{C}{2}\right)=0$ 代入式(7-60)得

$$0=2iU(-\sin\alpha_0)+\frac{i\Gamma}{\pi C} \tag{7-61}$$

由此:为使后缘处符合库塔-儒可夫斯基条件的流动,需要增加的环量 Γ 应为

$$\Gamma = 2\pi C U \sin\alpha_0 \tag{7-62}$$

或者为了更有普遍意义，使圆周半径为 a，此式写为

$$\Gamma = 4\pi a U \sin\alpha_0 \tag{7-62$'$}$$

为了计算 ζ-平面上绕流圆柱的受力情况，引用布拉休斯定律，由式(6-96)得

$$F_\xi - \mathrm{i}F_\eta = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint_S \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}\right)^2 \mathrm{d}\zeta = \mathrm{i}\,\frac{\rho}{2}\oint_S W^2(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

式中：ρ 为流体密度；S 为圆柱周线。由式(7-59)得

$$W^2(\zeta) = U^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha_0} + \frac{U^2\left(\frac{C}{2}\right)^4 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha_0}}{\zeta^4} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2\zeta^2} - \frac{2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta^2} + \frac{\mathrm{i}U\Gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi\zeta} - \frac{\mathrm{i}U\Gamma\left(\frac{C}{2}\right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi\zeta^3} \tag{7-63}$$

由留数定理式(6-98)可得

$$F_\xi - \mathrm{i}F_\eta = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2\right]$$

由式(7-63)得

$$\mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 = \mathrm{res}W^2(\zeta) = \frac{\mathrm{i}U\Gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi}$$

所以可得

$$F_\xi - \mathrm{i}F_\eta = -\mathrm{i}\rho U\Gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}$$

$$\left.\begin{aligned} F_\xi &= -\rho U\Gamma\sin\alpha_0 \\ F_\eta &= \rho U\Gamma\cos\alpha_0 \end{aligned}\right\} \tag{7-64}$$

如图 7-17 所示，F_η 为垂向力；F_ξ 为水平力，是由于前缘处流速增加、压强减小而产生的吸力；F_ξ 与 F_η 的合力 $L=\sqrt{F_\xi^2+F_\eta^2}=\rho U\Gamma$ 为库塔-儒可夫斯基升力；在均匀流方向的阻力 D 为零，这是由于没有考虑流体粘性的结果，实际流动中由于流体的粘性必存在阻力。

由式(6-99)知作用于绕流圆柱的力矩 M 为

$$M=-\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}\zeta\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2\right]$$

由式(7-63)得 $\mathrm{res}\zeta\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2=-2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2$，因此

$$M=0 \qquad (7\text{-}65)$$

说明没有力矩作用。

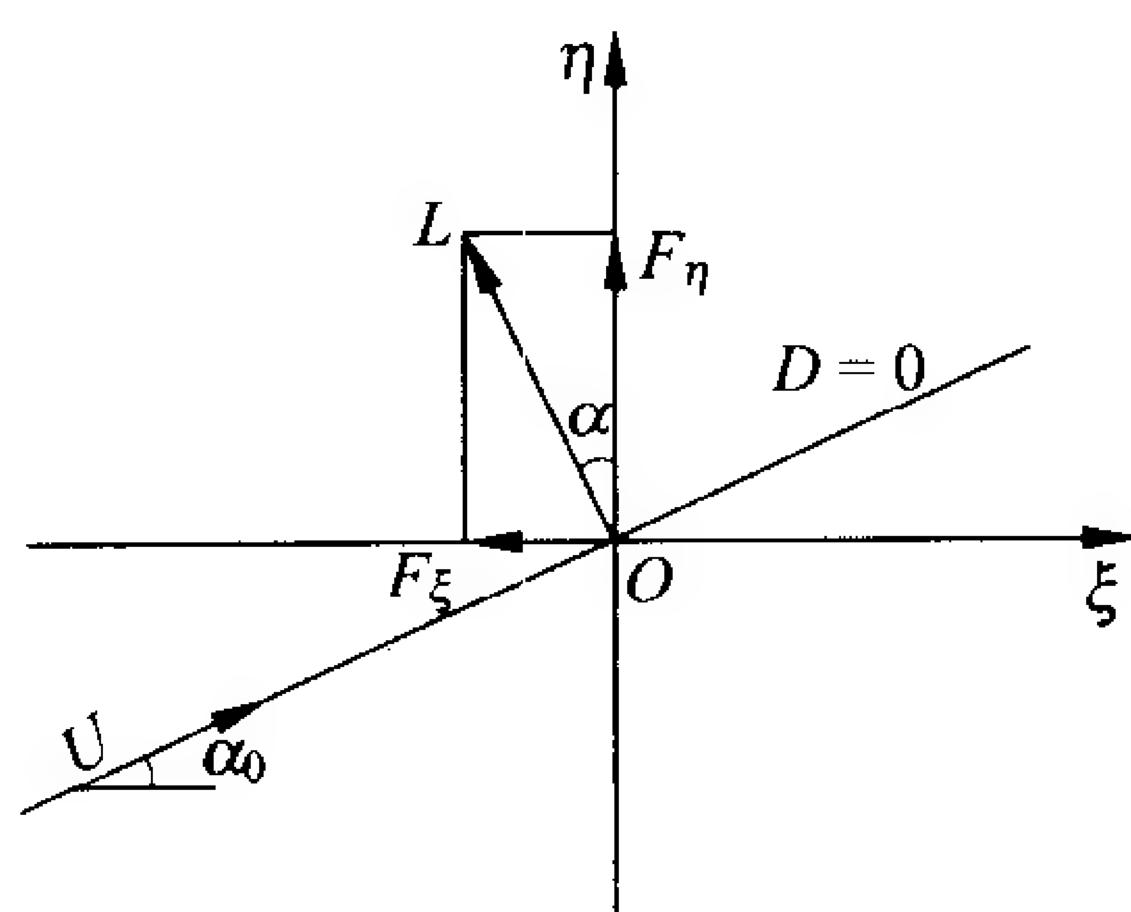


图 7-17 圆柱绕流作用力

在 z-平面流体作用于平板上的力为

$$\overline{X}-\mathrm{i}\overline{Y}=\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint\left(\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}\zeta$$

由式(7-50)可得

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}=\frac{\zeta^2}{\zeta^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}$$

由式(7-63)已知 $W^2(\zeta)$ 的表达式，又 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}=W(\zeta)$，所以

$$\overline{X}-\mathrm{i}\overline{Y}=\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint\left[U^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha_0}+\frac{U^2\left(\frac{C}{2}\right)^4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha_0}}{\zeta^4}-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2\zeta^2}-\frac{2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{i}U\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi\zeta}-\frac{\mathrm{i}U\Gamma\left(\frac{C}{2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi\zeta^3}\right]\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]\mathrm{d}\zeta$$

此式表明在 $\zeta=0,\zeta=\dfrac{C}{2},\zeta=-\dfrac{C}{2}$处有奇点。求作用力时应将这 3 个奇点处的留数相加，见附录Ⅲ.9 节。被积函数可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}W^2(\zeta)=\left[U^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha_0}\zeta^2+\frac{\mathrm{i}U\Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi}\zeta-\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}+2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{i}U\Gamma\left(\frac{C}{2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi\zeta}+\frac{U^2\left(\frac{C}{2}\right)^4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha_0}}{\zeta^2}\right]\left[\frac{1}{\left(\zeta+\frac{C}{2}\right)\left(\zeta-\frac{C}{2}\right)}\right]$$

由此可见：在 $\zeta=0$ 时，其留数应等于$\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$项的系数，并代入式(7-62) $\Gamma=2\pi CU\sin\alpha_0$ 即

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}W^2(0)&=\left[-\frac{\mathrm{i}U\Gamma\left(\frac{C}{2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi}\right]\left[\frac{1}{\left(\zeta+\frac{C}{2}\right)\left(\zeta-\frac{C}{2}\right)}\right]\\
&=\left[-\frac{\mathrm{i}U\Gamma\left(\frac{C}{2}\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi}\right]\left[-\frac{1}{\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]\\
&=\frac{\mathrm{i}U\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi}\\
&=\frac{\mathrm{i}U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{\pi}\cdot 2\pi CU\sin\alpha_0\\
&=2\mathrm{i}U^2C\sin\alpha_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0} \qquad \text{(a)}
\end{aligned}$$

在 $\zeta=\dfrac{C}{2}$时，其留数为

$$\operatorname{res}\frac{d\zeta}{dz}W^2\left(\frac{C}{2}\right)=\left[U^2e^{-2i\alpha_0}\left(\frac{C}{2}\right)^2+\frac{iU\Gamma e^{-i\alpha_0}}{\pi}\frac{C}{2}-\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}+2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.-\frac{iU\Gamma\left(\frac{C}{2}\right)^2e^{i\alpha_0}}{\pi\left(\frac{C}{2}\right)}+\frac{U^2\left(\frac{C}{2}\right)^4e^{2i\alpha_0}}{\left(\frac{C}{2}\right)^2}\right]\frac{1}{C}$$

$$=\left[2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2(\cos2\alpha_0-1)+\frac{2U\Gamma\frac{C}{2}}{\pi}\sin\alpha_0-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right]\frac{1}{C}$$

由三角公式 $(\cos2\alpha_0-1)=-2\sin^2\alpha_0$，且由式（7-62）$\Gamma=2\pi CU\sin\alpha_0$ 代入上式得

$$\operatorname{res}\frac{d\zeta}{dz}W^2\left(\frac{C}{2}\right)=0 \tag{b}$$

在 $\zeta=-\frac{C}{2}$ 时，其留数为

$$\operatorname{res}\frac{d\zeta}{dz}W^2\left(-\frac{C}{2}\right)=\left[U^2\left(-\frac{C}{2}\right)^2e^{-2i\alpha_0}+\frac{iU\Gamma e^{-i\alpha_0}}{\pi}\left(-\frac{C}{2}\right)\right.$$

$$-\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}+2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2\right)+\frac{iU\Gamma\left(\frac{C}{2}\right)e^{i\alpha_0}}{\pi}$$

$$\left.+U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2e^{2i\alpha_0}\right]\left(-\frac{1}{C}\right)$$

$$=\left[2U^2\left(\frac{C}{2}\right)^2(-2\sin^2\alpha_0)-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right.$$

$$\left.-\frac{CU\Gamma\sin\alpha_0}{\pi}\right]\left(-\frac{1}{C}\right)$$

将 $\Gamma=2\pi CU\sin\alpha_0$ 代入，得

$$\operatorname{res}\frac{d\zeta}{dz}W^2\left(-\frac{C}{2}\right)=4CU^2\sin^2\alpha_0 \tag{c}$$

三个奇点留数之和为式(a)+式(b)+式(c)$=2iU^2C\sin\alpha_0 e^{i\alpha_0}+4CU^2\sin^2\alpha_0$，从而计算流体的作用力为

$$
\begin{aligned}
X-iY &= \frac{i\rho}{2}\left[2\pi i(2iU^2C\ \sin\alpha_0 e^{i\alpha_0}+4CU^2\sin^2\alpha_0)\right] \\
&= -\pi\rho\left[2CU^2\sin^2\alpha_0+i2CU^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\right] \\
&= -\rho U\Gamma\ \sin\alpha_0-i\rho U\Gamma\cos\alpha_0
\end{aligned}
$$

因此可得

$$
\left.\begin{aligned}
X &= -\rho U\Gamma\ \sin\alpha_0 \\
Y &= \rho U\Gamma\ \cos\alpha_0
\end{aligned}\right\} \tag{7-66}
$$

升力 L 为

$$L=\sqrt{X^2+Y^2}=\rho U\Gamma \tag{7-67}$$

升力系数为

$$C_L=\frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2\cdot 2C}=\frac{\rho U\Gamma}{\rho U^2C}=2\pi\sin\alpha_0 \tag{7-68}$$

由于未考虑粘性，阻力 $D=0$。由式(7-68)可以看出升力系数与冲角 α_0 有密切关系。当冲角很小时，$\alpha=\sin\alpha_0$，C_L 与冲角 α_0 成正比。由式(7-67)知绕流物体的升力主要决定于环量，对于有尖锐后缘的绕流物体，环量的大小又必须使后缘处符合库塔-儒可夫斯基条件，因此升力的核心问题就是这个环量是如何产生的，又是如何确定其数值的。

设在一个原来处于静止的流场中，机翼起飞时开始加速并最终稳定在速度为 U_0 的飞行。在起飞时刻流体原系静止，流场无涡。根据开尔文定理，流动将始终无涡。机翼突然起动，绕翼型流动将是无环量绕流，这时尾部驻点在翼型上表面 B 处，如图 7-18 所示。翼型后缘 A 处由于流动绕过锐缘，流速很大而压强降低。翼型下面的流体绕过 A 点流向 B 点时，流动是由低压区流向高压区，因此流动将与物面分离。从而产生图 7-18 所示的逆时针方向

的正旋涡，随着流体向下游运动带动旋涡由翼型尾部剥落，流向下游。这个产生于翼型后缘并流向下游的旋涡称为起动涡(starting vortex)。

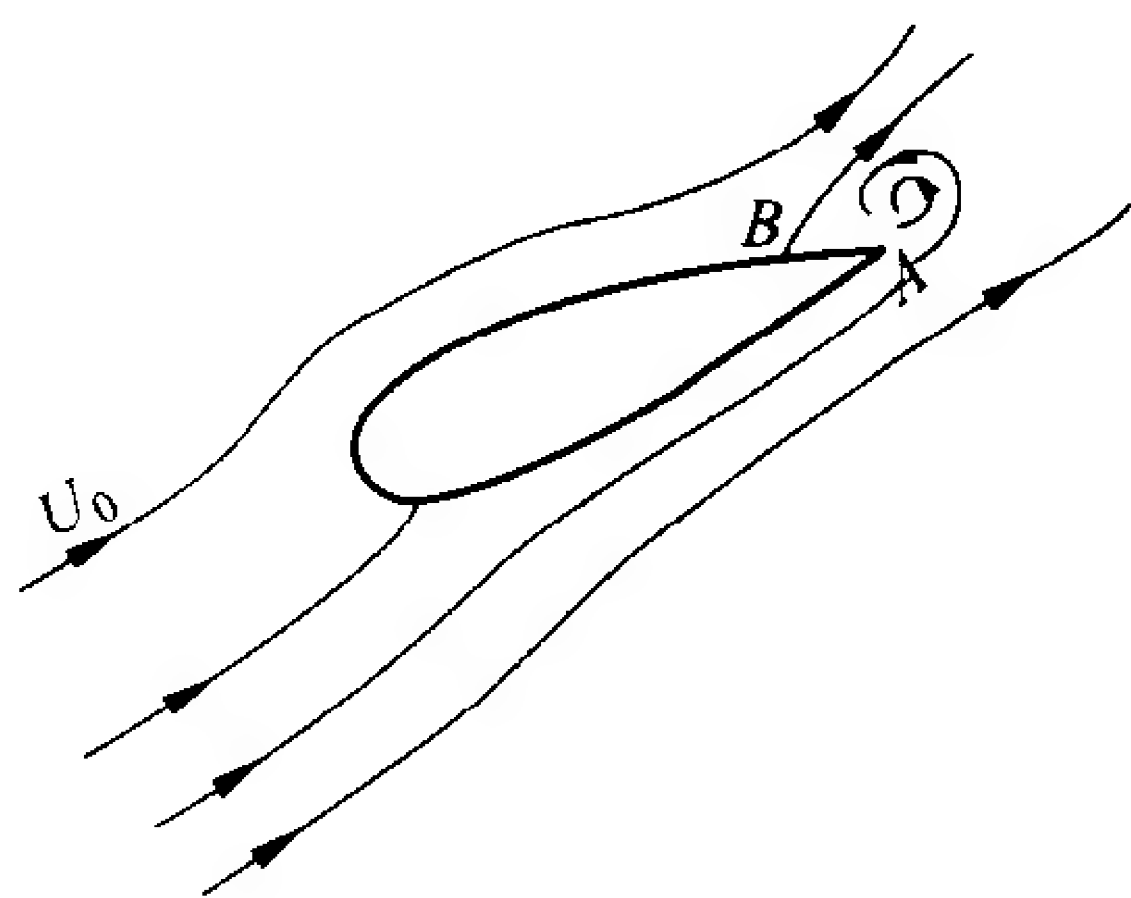


图 7-18　机翼起飞时尾部流动

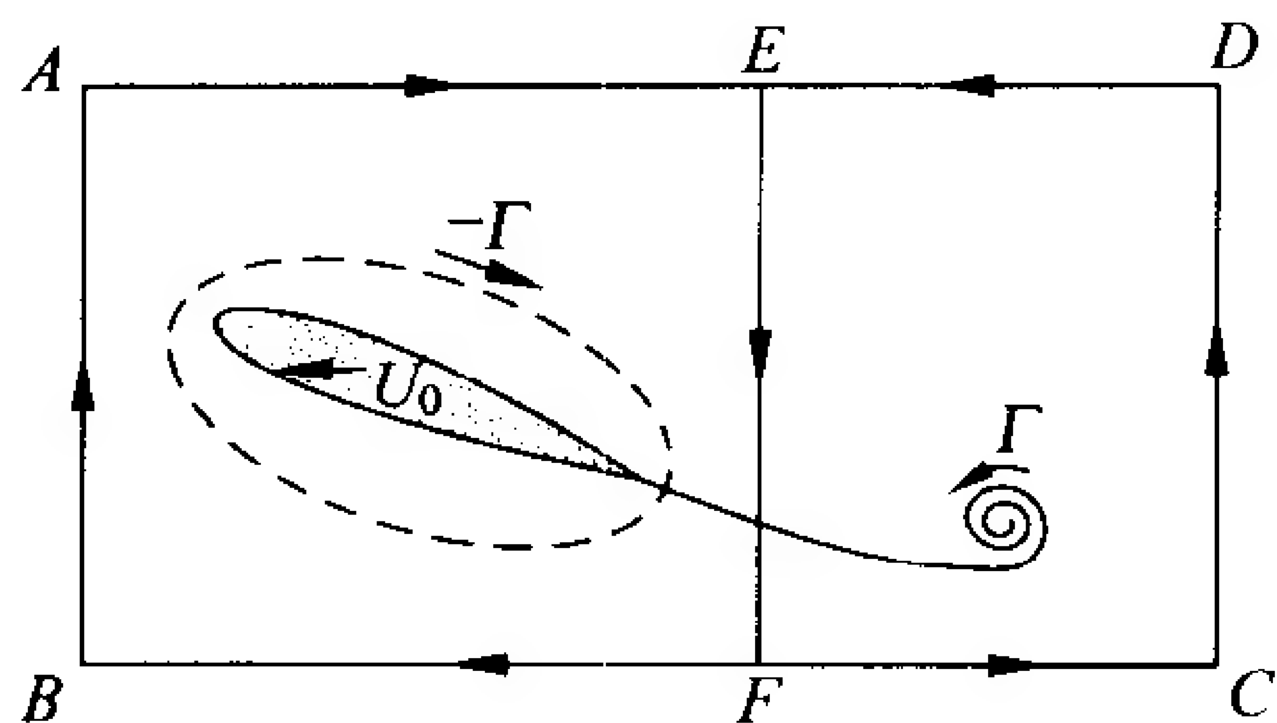


图 7-19　绕翼型环量的产生

在流场中如果画一边界线 $ABCD$，如图 7-19 所示，包含了翼型和起动涡。沿这条周线翼型起飞前和以后环量始终为零。当起动涡产生并流向下游后，为保证在 $ABCD$ 的流域内涡量为零，则

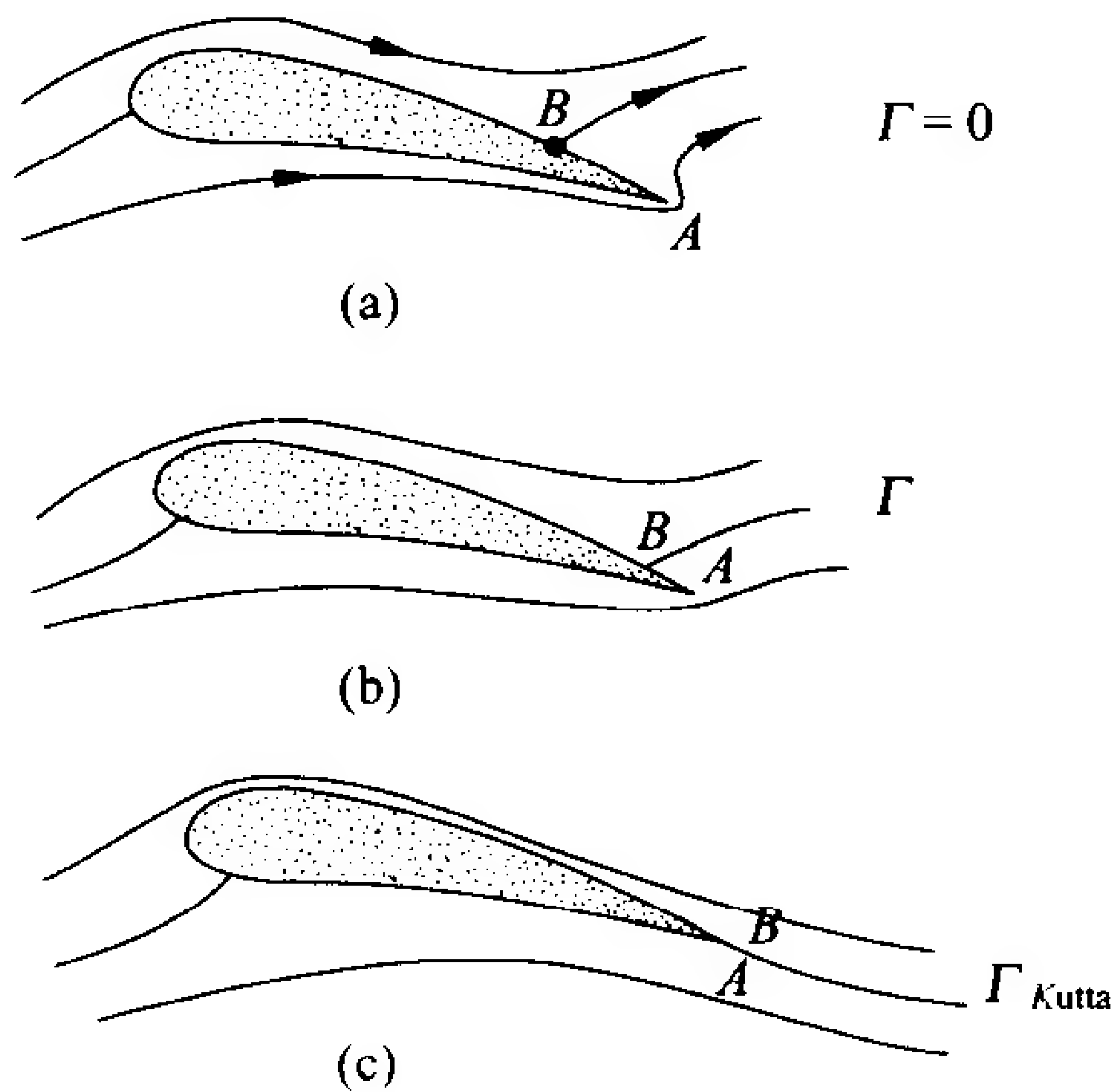
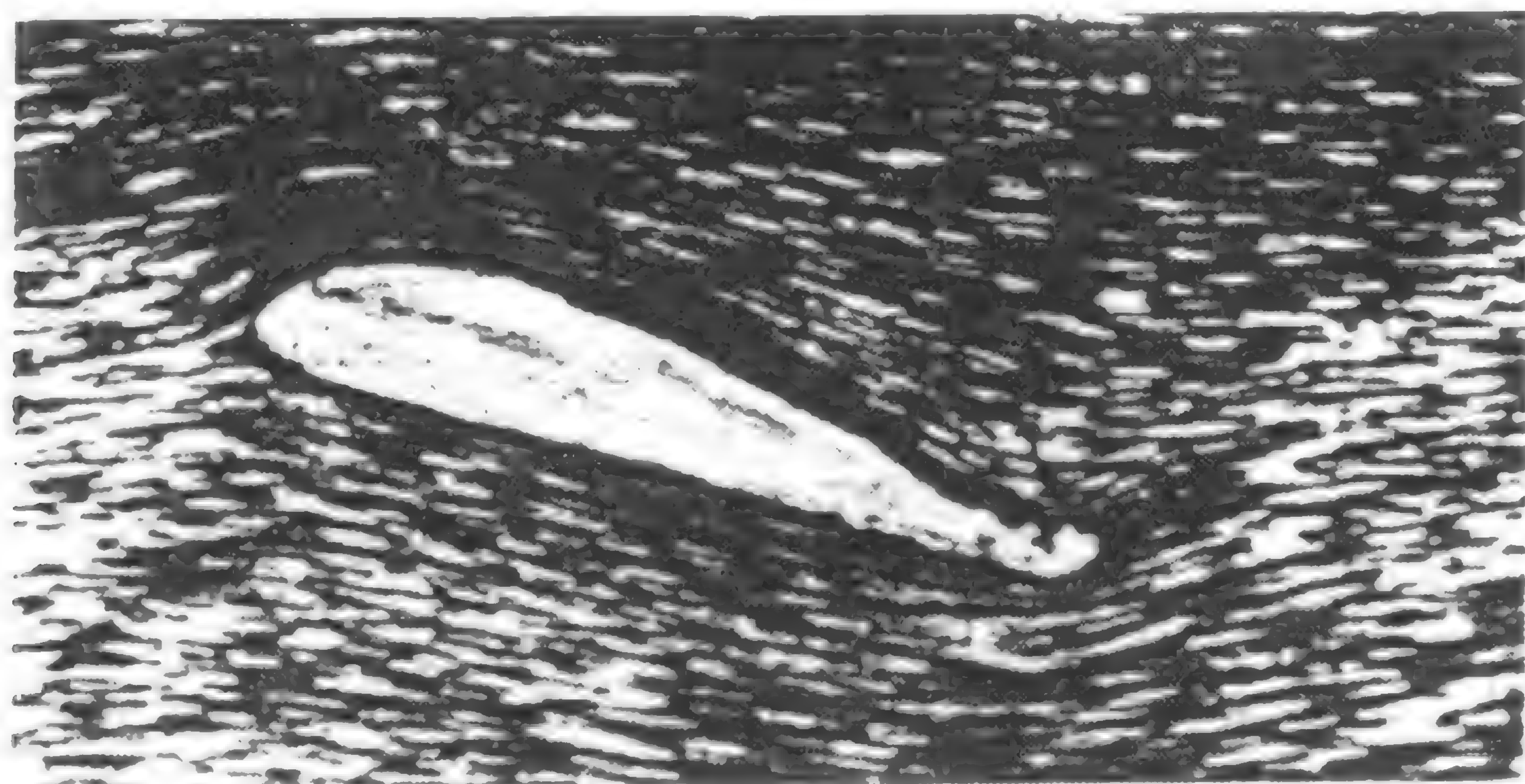


图 7-20　翼型起飞过程中环量的形成[14]

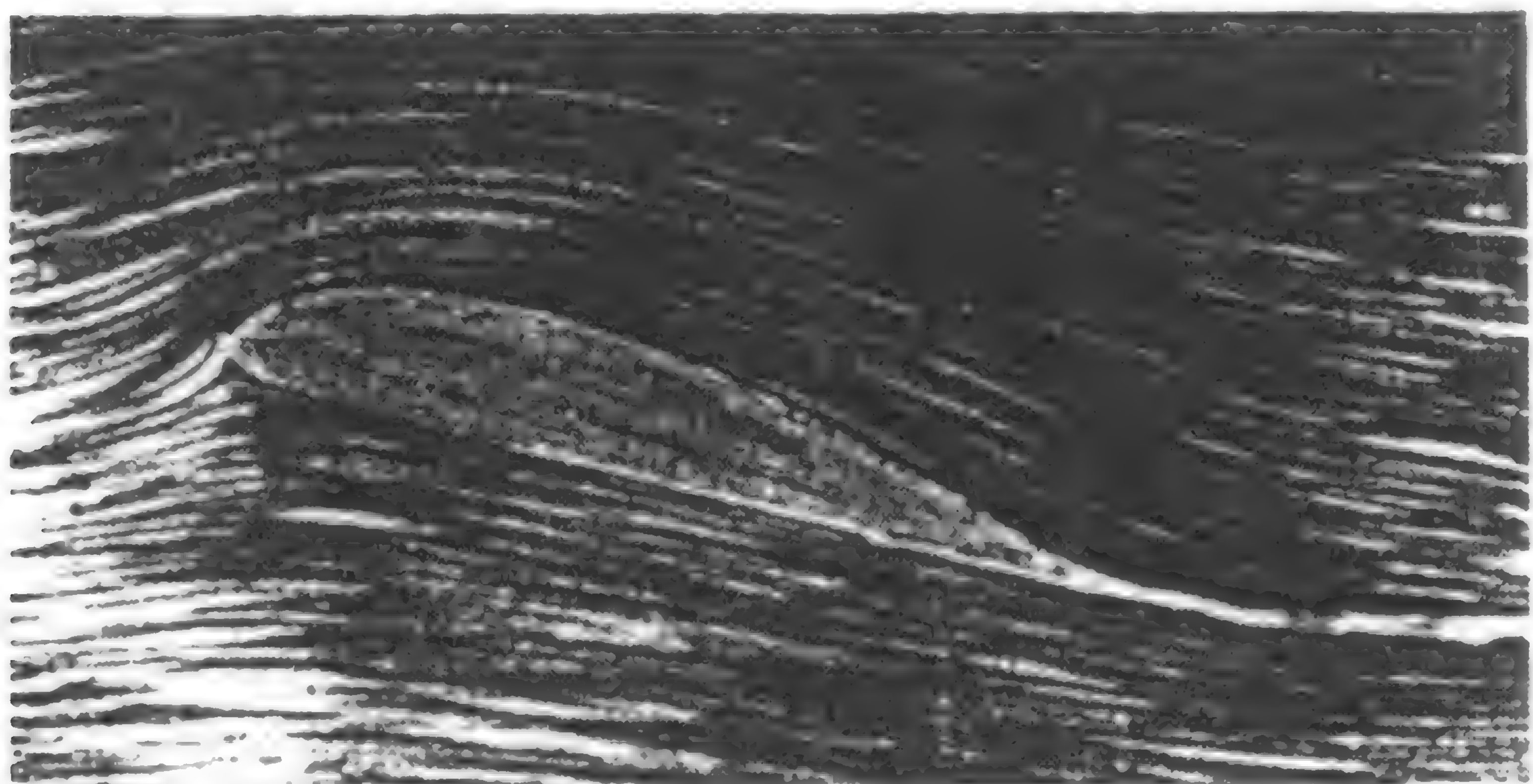
在翼型上必将产生一个与起动涡大小相同而方向相反的旋涡，这个涡称为附着涡(bound vortex)。附着涡的涡量就是环绕翼型的环量。在 *ABCD* 所划出的区域内如果用 *EF* 线将区域分割为两



(a) 飞机刚刚起飞的瞬间，起动涡开始形式



(b) 中间过程，起动涡脱落翼型向下游离开



(c) 绕翼型形成稳定的流动，由附着涡形成绕翼型环量达到一个稳定的数值

图 7-21 翼型起飞过程中环量的形成

(Prandtl and Tietjens，1934)

部分，则起动涡使 $CDEF$ 周线上有一正环量而 $ABFE$ 周线上或者说翼型周线上有一负环量。这时由于绕翼型流动的这一附着涡而产生的环量使尾部驻点向后缘移动。尽管由于图 7-18 上的 B 点向 A 点靠近而使产生的起动涡逐渐减小，但它仍是被流动带向下游，使 $CDEF$ 区域内的涡量逐渐增加，同时也使绕翼型的环量逐渐增加，而绕翼型的环量的增加又使 B 点继续向后缘移动，这是一个渐进的过程如图 7-20 所示，直至翼型的速度达到一个稳定的飞行速度 U_0，从翼型上看相当于有无穷远均匀来流绕过翼型流动。这时尾部驻点移至后缘 A 处，翼型上下两面流过的流线在尾部平顺光滑，后缘处流速为有限值，也就是说在尾部流动符合库塔-儒可夫斯基条件。这时尾部不再会发生旋涡，绕翼型流动的环量达到一个稳定的数值。如果机翼上的速度发生变化则将产生加速涡或减速涡，涡的脱离使绕翼型的环量又将发生变化。

图 7-21 的照片是用试验的方法拍摄的翼型起飞和起动涡形成的过程。

7.5 对称儒可夫斯基翼型

通过儒可夫斯基变换可将 ζ-平面上一族圆心由原点移动一个小的距离的圆周变换为 z-平面上的一族翼型，这些翼型称为儒可夫斯基翼型族(Joukowski family of airfoils)。首先考虑圆心在实轴上进行移动的情况。由上节已知在 ζ-平面上当圆半径为 $\frac{C}{2}$ 时，相当 $\zeta=\pm\frac{C}{2}$ 的点在 z-平面上为锐缘点，$z=\pm C$。如果 z-平面上为一翼型，其前缘为具有一定曲率半径的曲线形状，在流场中沿前缘曲线周线应无奇点，因此 $\zeta=-\frac{C}{2}$ 的点在 ζ-平面内应该在圆

周线以内；相反地，翼型的后缘相应在 ζ-平面上 $\zeta=\frac{C}{2}$ 的点是一个锐缘点，它应该在 ζ-平面的圆周线上。这样就需要圆心取在 $\zeta=-m$ 点，m 为实数而半径应为 $\frac{C}{2}+m$。如图 7-22(a)所示。设圆周半径为 a，则

$$a=\frac{C}{2}+m=\frac{C}{2}(1+\varepsilon) \tag{7-69}$$

式中：$\varepsilon=\frac{m}{\frac{C}{2}}$ 应为小于 1 的数。

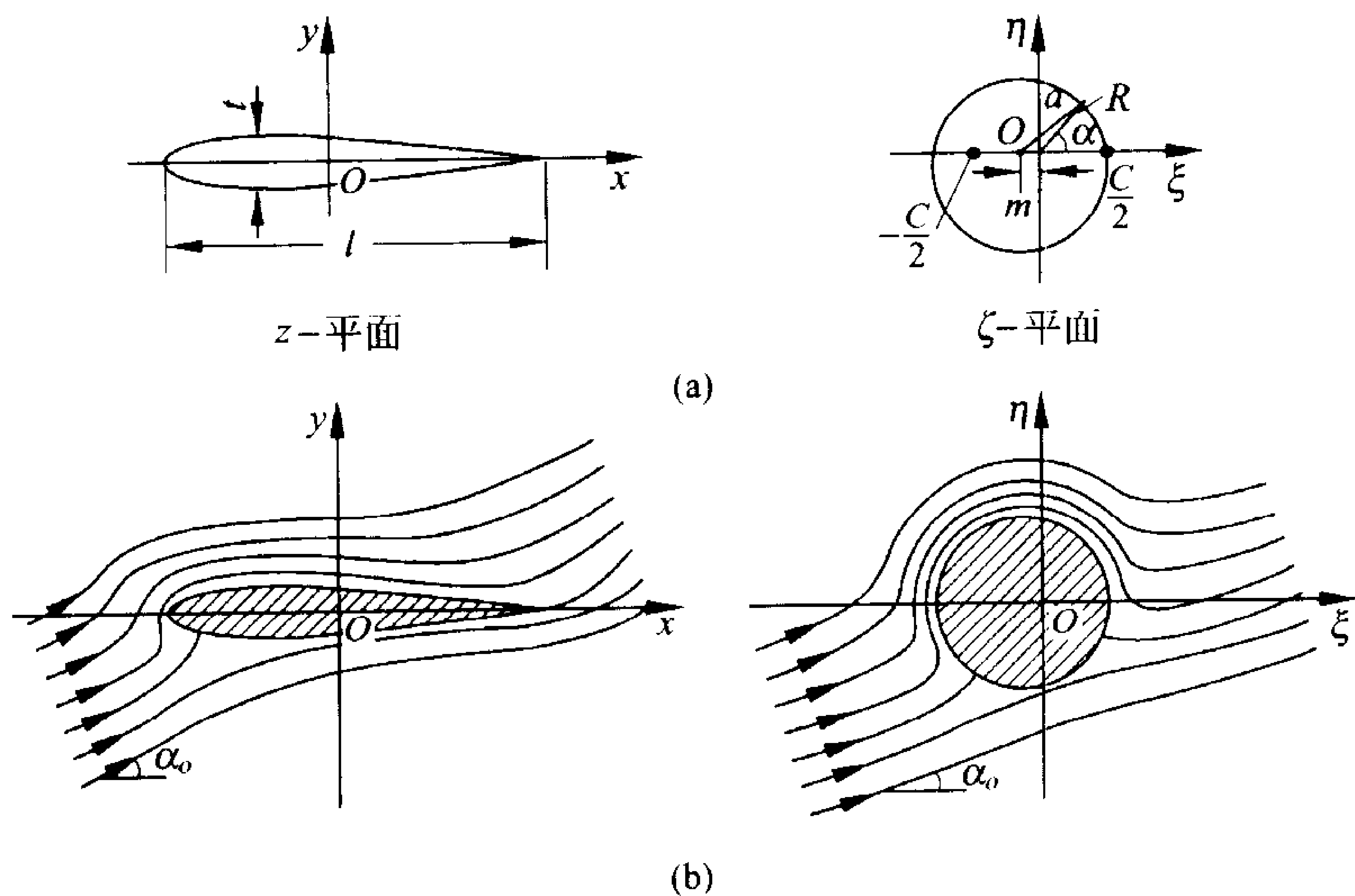


图 7-22 对称儒可夫斯基翼型[11]

如果 $\varepsilon=0$ 则在 z-平面上为一平板。可以想像当 $\varepsilon\ll1$ 时 z-平面应为一薄的翼型，翼弦的前缘和后缘相对应在 ζ-平面上为 $\zeta=-\left(\frac{C}{2}+2m\right)$ 和 $\zeta=\frac{C}{2}$ 两个点。应用儒可夫斯基

变换式(7-37)，$\zeta=\frac{C}{2}$ 的点相对应在 z-平面上为 $z=C$ 而 $\zeta=-\left(\frac{C}{2}+2m\right)=-\frac{C}{2}(1+2\varepsilon)$的点相对应在 z-平面上为

$$\begin{aligned} z &= -\frac{C}{2}(1+2\varepsilon)-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)}{(1+2\varepsilon)} \\ &= -\frac{C}{2}(1+2\varepsilon)-\frac{C}{2}\left[1-2\varepsilon+o(\varepsilon^2)\right] \\ &= -C+o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

如果 ε 是小量，忽略二阶小量可以得到 $z=-C$。因此弦长 $l=2C$。这表明当只考虑一阶小量 ε 时由于ζ-平面圆心的移动并未影响 z-平面翼型的弦长。

现在来计算翼型的最大厚度 t。由图 7-22(a)所示的 ζ-平面圆周 $\zeta=Re^{i\alpha}$，通过其三角关系可得

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2+m^2-2Rm\cos(\pi-\alpha) \\ &= R^2+m^2+2Rm\cos\alpha \end{aligned}$$

又 $a=\frac{C}{2}+m$，所以

$$\left(\frac{C}{2}+m\right)^2=R^2\left(1+\frac{m^2}{R^2}+2\frac{m}{R}\cos\alpha\right)$$

沿圆周 $R\geqslant\frac{C}{2}$，因此$\frac{m}{R}\leqslant\frac{m}{\frac{C}{2}}$，如果考虑 ε 的一阶量，则$\frac{m^2}{R^2}$项可忽略，于是

$$\begin{aligned} \frac{C}{2}+m &= R\left(1+2\frac{m}{R}\cos\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= R\left[1+\frac{m}{R}\cos\alpha+o(\varepsilon^2)\right] \end{aligned}$$

从而，在只取 ε 的一阶量时

$$\frac{C}{2}(1+\varepsilon)=R+m\cos\alpha$$

得
$$R=\frac{C}{2}[1+\varepsilon(1-\cos\alpha)]$$

此式表明在 ζ-平面的圆周上的点，其向径随 α 角变化的关系：当 $\alpha=0$时，$R=\frac{C}{2}$；随之当 α 增加，R 也增加；最大值在 $\alpha=\pi$ 时，此时 $R=\frac{C}{2}(1+2\varepsilon)$。在 ζ-平面上圆周可由下式表示：

$$\zeta=Re^{i\alpha}=\frac{C}{2}[1+\varepsilon(1-\cos\alpha)]e^{i\alpha} \tag{7-70}$$

通过儒可夫斯基变换转换到 z-平面，得

$$\begin{aligned}z&=\zeta+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{\zeta}=\frac{C}{2}[1+\varepsilon(1-\cos\alpha)]\ e^{i\alpha}+\frac{\frac{C}{2}e^{-i\alpha}}{[1+\varepsilon(1-\cos\alpha)]}\\&=\frac{C}{2}[1+\varepsilon(1-\cos\alpha)]e^{i\alpha}+\frac{C}{2}[1-\varepsilon(1-\cos\alpha)+o(\varepsilon^2)]e^{-i\alpha}\\&=\frac{C}{2}[2\cos\alpha+i2\varepsilon(1-\cos\alpha)\sin\alpha+o(\varepsilon^2)]\end{aligned}$$

忽略二阶以上小量，可得到 z-平面翼型的参数方程式为

$$\left.\begin{aligned}x&=C\cos\alpha\\y&=C\,\varepsilon(1-\cos\alpha)\sin\alpha\end{aligned}\right\} \tag{7-71}$$

消去参数 α，得翼型方程式为

$$y=C\,\varepsilon\left(1-\frac{x}{C}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{C}\right)^2} \tag{7-72}$$

对式(7-71)中 y 的表示式微分，当$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}=0$时，可得到翼型的最大厚度 t。对式(7-71)的 y 微分得

$$\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)\cos\alpha=0$$

从而得到

$$\cos2\alpha=\cos\alpha$$

即 $\alpha=0,\alpha=\frac{2\pi}{3},\alpha=\frac{4\pi}{3}$。$\alpha=0$ 相当翼型的后缘，是最小厚度点，最大厚度点位于 $\alpha=\frac{2\pi}{3},\alpha=\frac{4\pi}{3}$两点，此时两点的位置为

$$x=-\frac{C}{2}$$

$$y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{C}{2}\varepsilon$$

最大厚度 t 应等于这个 y 值的两倍，即

$$\frac{t}{l}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\varepsilon \tag{7-73}$$

由此式可见翼型最大厚度与 ε 成正比，也就是说与$\frac{m}{\frac{C}{2}}$成正比，m 为ζ-平面中圆心移离原点的距离，m 越大，t 也越大。由式(7-73)得

$$\varepsilon=\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{t}{l}=0.77\frac{t}{l} \tag{7-74}$$

式(7-72)可改写为

$$\frac{y}{t}=\pm0.385\left(1-2\frac{x}{l}\right)\sqrt{1-\left(2\frac{x}{l}\right)^2} \tag{7-75}$$

$\frac{y}{t}$的最大值应为 0.5 而其最小值为−0.5 均出现在 $x=-\frac{C}{2}$处。

后缘符合库塔-儒可夫斯基条件时的环量 Γ 应符合式

(7-62′)，即

$$\Gamma=4\pi aU\sin\alpha_0 \tag{7-62′}$$

这时圆半径已不是$\frac{C}{2}$而是$a=\frac{C}{2}+m$，$m=\varepsilon\frac{C}{2}=0.77\frac{t}{l}\frac{C}{2}$，因此环量为

$$\begin{aligned}\Gamma&=4\pi aU\sin\alpha_0\\&=\pi Ul\left(1+0.77\frac{t}{l}\right)\sin\alpha_0\end{aligned} \tag{7-76}$$

由此式可见要求的环量与来流流速，翼型弦长，最大厚度和冲角有关。作用于翼型的升力由式(7-67)可得

$$L=\rho U\Gamma=\pi\rho U^2 l\left(1+0.77\frac{t}{l}\right)\sin\alpha_0 \tag{7-77}$$

升力系数为

$$C_L=2\pi\left(1+0.77\frac{t}{l}\right)\sin\alpha_0 \tag{7-78}$$

当$t=0$，翼型退化为平板，$C_L=2\pi\sin\alpha_0$，与式(7-68)一致。可见翼型厚度的作用是使升力系数增加。但是厚度增大后流动在钝头物体上发生脱离的可能性较之流线型(streamline)物体增加，由于这些现象主要是粘性的作用，本书中不加详细讨论。

由于在ζ-平面中圆心由原点$\zeta=0$移至$\zeta=-m$点，这时流动的复势可由式(7-58)中用$(\zeta+m)$代替ζ，用a代替$\frac{C}{2}$即得

$$F(\zeta)=U\left[(\zeta+m)e^{-i\alpha_0}+\frac{a^2}{\zeta+m}e^{i\alpha_0}\right]+\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{\zeta+m}{a}\right) \tag{7-79}$$

式中：

$$a=\frac{l}{4}+0.77\frac{t}{l}\frac{C}{2}$$

$$m=0.77\frac{t}{l}\frac{C}{2}$$

$$\Gamma=\pi Ul\left(1+0.77\frac{t}{l}\right)\sin\alpha_0$$

流动情况如图 7-22(b)所示。改变 m 即可得到一族不同厚度的翼型。

7.6 圆弧翼型

上节中把 ζ-平面圆周的圆心在实轴上移动一个小的距离 m 并使半径略大于$\frac{C}{2}$得到一个对于 x 轴对称的薄的儒可夫斯基翼型。本节中将这一半径略大于$\frac{C}{2}$的圆周的圆心在虚轴上移动一个小的距离 n，由 O 点移至 O' 点，这样就可以通过儒可夫斯基变换在 z-平面上得到一个圆弧翼型，它没有厚度，但是却具有弯度，如图 7-23 所示。

图 7-23 中圆心在 η 轴上由原点 O 移 n 的距离。由于翼型后缘应为锐缘，因此 ζ-平面上的圆周须经过 $\zeta=\frac{C}{2}$点，而且$\zeta=-\frac{C}{2}$相应为另一锐缘点。z-平面的圆弧翼型可通过儒可夫斯基变换得到。与上节同样地在 ζ-平面中圆周上的点以 $\zeta=Re^{i\alpha}$表示，R 为 α 的函数。代入式(7-50)得

$$z=Re^{i\alpha}+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}e^{-i\alpha}$$

$$=\left[R+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}\right]\cos\alpha+i\left[R-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}\right]\sin\alpha$$

从而得到以 α 为参数的 z-平面翼弦的参数方程式为

$$\left.\begin{aligned} x &= \left[R+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}\right]\cos\alpha \\ y &= \left[R-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}\right]\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7-80}$$

消去 R,得

$$\begin{aligned} x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha &= \left[R+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}\right]^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &\quad - \left[R-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}\right]^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &= C^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \end{aligned} \tag{7-81}$$

为了消去参数 α,在图 7-23(a)中,由三边 a,R,n 组成的三角形中的三角关系为

$$a^2 = R^2 + n^2 - 2Rn\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

由于 $a^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2+n^2$,代入上式得

$$\left(\frac{C}{2}\right)^2+n^2=R^2+n^2-2Rn\sin\alpha$$

因此

$$\sin\alpha=\frac{R^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2Rn}$$

又由式(7-80)得

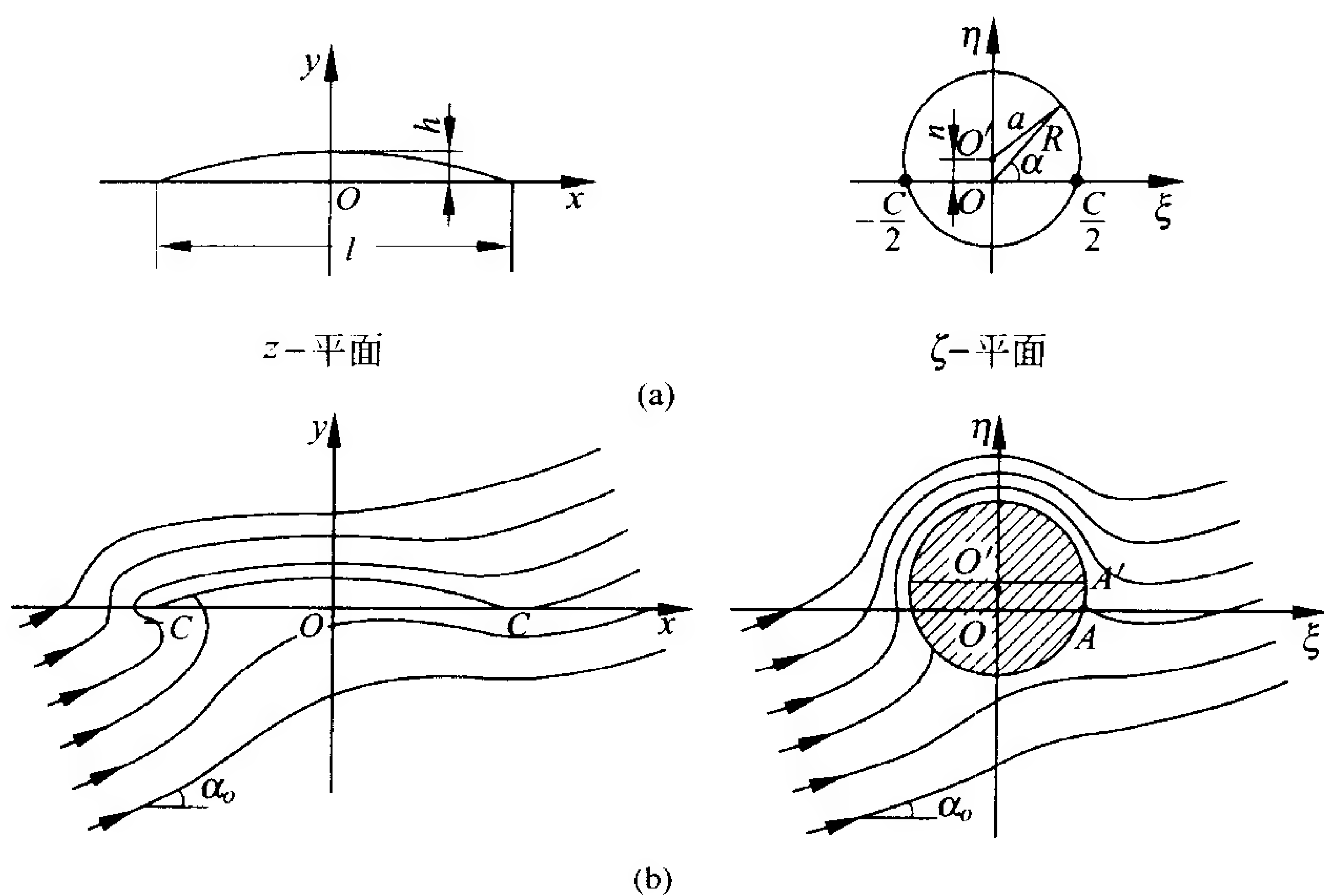


图 7-23　圆弧翼型[11]

$$y=\frac{R^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2}{R}\sin\alpha$$

代入上式得

$$\sin\alpha=\frac{y}{2n\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{y}{2n}$$

从而得到

$$\cos^2\alpha=1-\frac{y}{2n}$$

代入式(7-81)得翼型方程式为

$$x^2\,\frac{y}{2n}-y^2\left(1-\frac{y}{2n}\right)=4\left(\frac{C}{2}\right)^2\,\frac{y}{2n}\left(1-\frac{y}{2n}\right)$$

化简为

$$x^2+y^2+2\left[\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{n}-n\right]y=4\left(\frac{C}{2}\right)^2$$

或写为

$$x^2+\left\{y+\frac{C}{2}\left[\frac{\frac{C}{2}}{n}-\frac{n}{\frac{C}{2}}\right]\right\}^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2\left\{4+\left[\frac{\frac{C}{2}}{n}-\frac{n}{\frac{C}{2}}\right]^2\right\}$$

(7-82)

这是一个圆的方程式。由 $y=2n\sin^2\alpha$ 可知 y 必须是大于零，也就是说在这个圆中，只有 $y\geqslant 0$ 的圆弧部分才是对应 ξ-平面圆周的图形。至今为止并没有做任何近似的假定。如果像上节一样，引入 $\varepsilon=\frac{n}{\frac{C}{2}}$，并假设 $0\leqslant\varepsilon\ll 1$，则式(7-82)简化为

$$x^2+\left[y+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{n}\right]^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2\left[4+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{n^2}\right] \qquad (7\text{-}83)$$

由此可见在 z-平面，圆心在 y 轴上 $y=-\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{n}$ 处，而圆的半径为 $\frac{C}{2}\sqrt{4+\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{n^2}}$。下面可以求出弦长 l 和最大弯度 h。首先在 z-平面上翼弦的前缘和后缘点均位于 x 轴上，也就是 $y=0$ 处。由式(7-83)可求出弦长，这时 $x=\pm C$。因此弦长 l 为

$$l=2C \qquad (7\text{-}84)$$

由图 7-23 可以看出当 $x=0$ 时 y 有最大值，可从式(7-80)得到

$x=0$时 $\alpha=\frac{\pi}{2}$而 $y=2n\sin^2\alpha=2n$。这就是最大弯度值。即

$$h=2n \tag{7-85}$$

如果用 z-平面的参数 l,h 代替 ζ-平面的参数$\frac{C}{2},n$，则 z-平面的翼型方程式由式(7-83)可得

$$x^2+\left(y+\frac{l^2}{8h}\right)^2=\frac{l^2}{4}\left(1+\frac{l^2}{16h^2}\right) \tag{7-86}$$

为使圆弧翼型后缘符合库塔-儒可夫斯基条件，ζ-平面圆周边界上的后驻点位置应该在 A 点$\left(\xi=\frac{C}{2}\right)$处。也就是不仅要使角度与无穷远来流方向反转 α_0 角度而且还要增加由 A'至 A 所需旋转的角度，这个小角度可由下式计算：

$$\arctan\frac{n}{\frac{C}{2}}=\arctan\varepsilon=\varepsilon+o(\varepsilon^2)$$

因此为了保证 z-平面后驻点与后缘重合，加在绕流物体上的环量应该是

$$\Gamma=4\pi Ua\sin(\alpha_0+\varepsilon) \tag{7-87}$$

当只考虑 ε 的一阶量时，由 $a=\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2+n^2}$可得 $a=\frac{C}{2}$。所以

$$\Gamma=4\pi U\frac{C}{2}\sin\left(\alpha_0+\frac{n}{\frac{C}{2}}\right) \tag{7-88}$$

升力为

$$L=\rho U\Gamma=4\pi\rho U^2\frac{C}{2}\sin\left(\alpha_0+\frac{n}{\frac{C}{2}}\right) \tag{7-89}$$

相应的升力系数 C_L 为

$$C_L=8\pi\frac{\frac{C}{2}}{l}\sin\left(\alpha_0+\frac{n}{\frac{C}{2}}\right) \tag{7-90}$$

将 $l=2C, h=2n$ 代入，得

$$C_L=2\pi\sin\left(\alpha_0+\frac{2h}{l}\right) \tag{7-91}$$

与式(7-68)绕流平板的升力系数相比较，可知正的弯度使升力系数有所增加，而且由于这个增加使得在冲角为零时升力系数并不为零。

由于在 ζ-平面中圆心的位置不在原点而是移到 $\zeta=\mathrm{i}n$ 处，因此 ζ-平面绕该圆周的流动其复势为

$$F(\zeta)=U\left[(\zeta-\mathrm{i}n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}+\frac{a^2}{\zeta-\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}\right]+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{\zeta-\mathrm{i}n}{a}\right) \tag{7-92}$$

式中：$a=\frac{C}{2}=\frac{l}{4}$，$n=\frac{h}{2}$，$\Gamma=\pi Ul\sin\left(\alpha_0+\frac{2h}{l}\right)$。

式(7-92)是完全以翼型几何参数表示的复势方程式。图 7-23(b)表示在 ζ-平面和 z-平面中流动的图形。像平板绕流一样，前缘为一奇点，流速趋于无穷大。但当前缘为具有一定曲率的头部或即使前缘为锐缘，流动会发生分离，使流速具有一定数值，从而奇点不再存在。

7.7 儒可夫斯基翼型

由前两节已知：当 ζ-平面上圆周的圆心在实轴上移动一个小的距离 m 就会使 z-平面相应的翼型具有一定的厚度；而圆心在虚轴上移动一个小的距离 n 就会使 z-平面的翼型具有一定的弯度。因此可以设想如果圆心位于第二象限内，如图 7-24(a)所示，与原点有一个小的距离 p，则 z-平面上相应的翼型就会既有一定的弯

度也有一定的厚度。为了保持后缘为锐缘仍使 ζ-平面的圆周通过 $\zeta=\frac{C}{2}$ 点。z-平面翼型的几何参数有弦长 l，最大厚度 t 和最大弯度 h。这种翼型称为儒可夫斯基翼型(Joukowski airfoil)。显然翼型的厚度与圆心离虚轴(η 轴)的距离有关而翼型的弯度与圆心离实轴(ξ 轴)的距离有关。弦长则主要决定于 ζ-平面上圆周的半径 $\frac{C}{2}$。

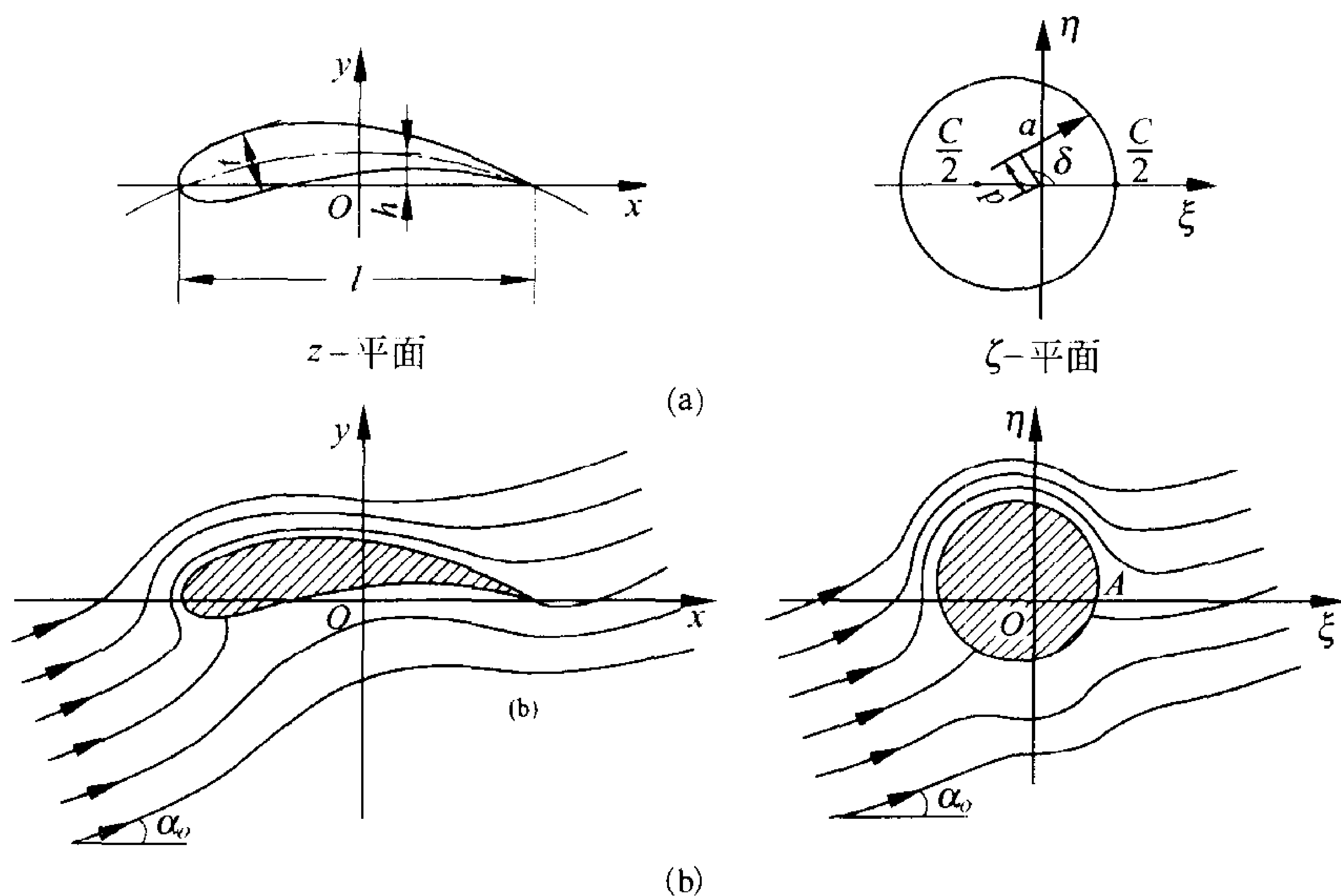


图 7-24　儒可夫斯基翼型[11]

由上节圆弧翼型已知：当取 ε 的一阶量时，z-平面的翼型方程式为式(7-86)，这就是儒可夫斯基翼型的翼型中线。翼型的上表面和下表面对称于这条中线，因此儒可夫斯基翼型方程式就是在式(7-86)的基础上再加上式(7-75)中的 y 值，即

$$y=\sqrt{\frac{l^2}{4}\left(1+\frac{l^2}{16h^2}\right)-x^2}-\frac{l^2}{8h} \tag{7-93}$$
$$\pm 0.385t\left(1-2\frac{x}{l}\right)\sqrt{1-\left(2\frac{x}{l}\right)^2}$$

式中的"+"号表示上表面,"−"号表示下表面。

由式(7-78)已知由于翼型厚度 t 的影响,升力系数提高了 $0.77\frac{t}{l}$,又由式(7-91)知由于翼型的弯度 h 使计算翼型升力系数时,在原有冲角 α_0 的基础上再增加一个角度 $\frac{2h}{l}$,所以对于儒可夫斯基翼型,升力系数 C_L 为

$$C_L=2\pi\left(1+0.77\frac{t}{l}\right)\sin\left(\alpha_0+\frac{2h}{l}\right) \tag{7-94}$$

在 ζ-平面,无穷远来流为 U 的均匀流动绕过圆周的流动其复势为

$$F(\zeta)=U\left[(\zeta-p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}+\frac{a^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0}}{(\zeta-p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})}\right]+\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{\zeta-p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{a}\right) \tag{7-95}$$

式中:$p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$为圆心所在点的位置;$\alpha_0$ 为攻角;a 为圆周半径。由式(7-79)圆心与 η 轴之间的水平距离为 $p\cos\delta=-0.77\frac{t}{l}\frac{C}{2}$,圆周半径 $a=\frac{l}{4}+0.77\frac{t}{l}\frac{C}{2}$。由式(7-85)知圆心与 ξ 轴的垂直距离为 $p\sin\delta=\frac{h}{2}$。为保证后缘处符合库塔-儒可夫斯基条件而需要的环量,并考虑到厚度和弯度的影响后为

$$\Gamma=\pi Ul\left(1+0.77\frac{t}{l}\right)\sin\left(\alpha_0+\frac{2h}{l}\right) \tag{7-96}$$

图 7-24(b)给出了 ζ-平面和 z-平面上流动的图形。需要特别注意的是:本节中考虑 ε 为小量,从而厚度和弯度都是比较小的情况,

因为如果厚度增加或弯度加大，流动情况将会发生很大变化，将不再是本节中所讨论的流线型的翼型，甚至可能产生失速现象。

7.8 施瓦兹-克里斯托弗变换

7.8.1 简单封闭多边形

凡边界由直线组成，且符合：

(1) 沿边界可从边界上一个点走到边界上另一个点，也就是说边界是连通的，没有互不连接的独立边界。

(2) 边界把平面划分为内外两个区域，内区的点称为内点，任何两个内点都可用一条不与边界相交的线连接。同样，外区的点称为外点，任何两个外点都可用一条不与边界相交的线连接。由内区移到外区则不可能不通过边界。由此可见内点，外点和边界分别构成连通系统。

符合以上两个条件的图形称为简单封闭多边形。在流体力学中多边形的边界可延伸到无穷远。内区的定义为沿边界逆时针移动时的左侧区域。

利用保角变换的方法，可使 z-平面上任何简单封闭多边形的边界变换为 ζ-平面上的实轴，这时多边形的内区变换为 ζ-平面的上半平面。多边形内部的流动相应地变为 ζ-平面上半平面的流动。

7.8.2 施瓦兹-克里斯托弗变换

设 $a,b,c,\cdots$ 是 ζ-平面实轴上的 n 个点，并且 $a<b<c<\cdots$。$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 是 z-平面有 n 个顶点 $A,B,C,\cdots$ 的简单封闭多边形的内角，如图 7-25 所示，并且

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots=(n-2)\pi$$

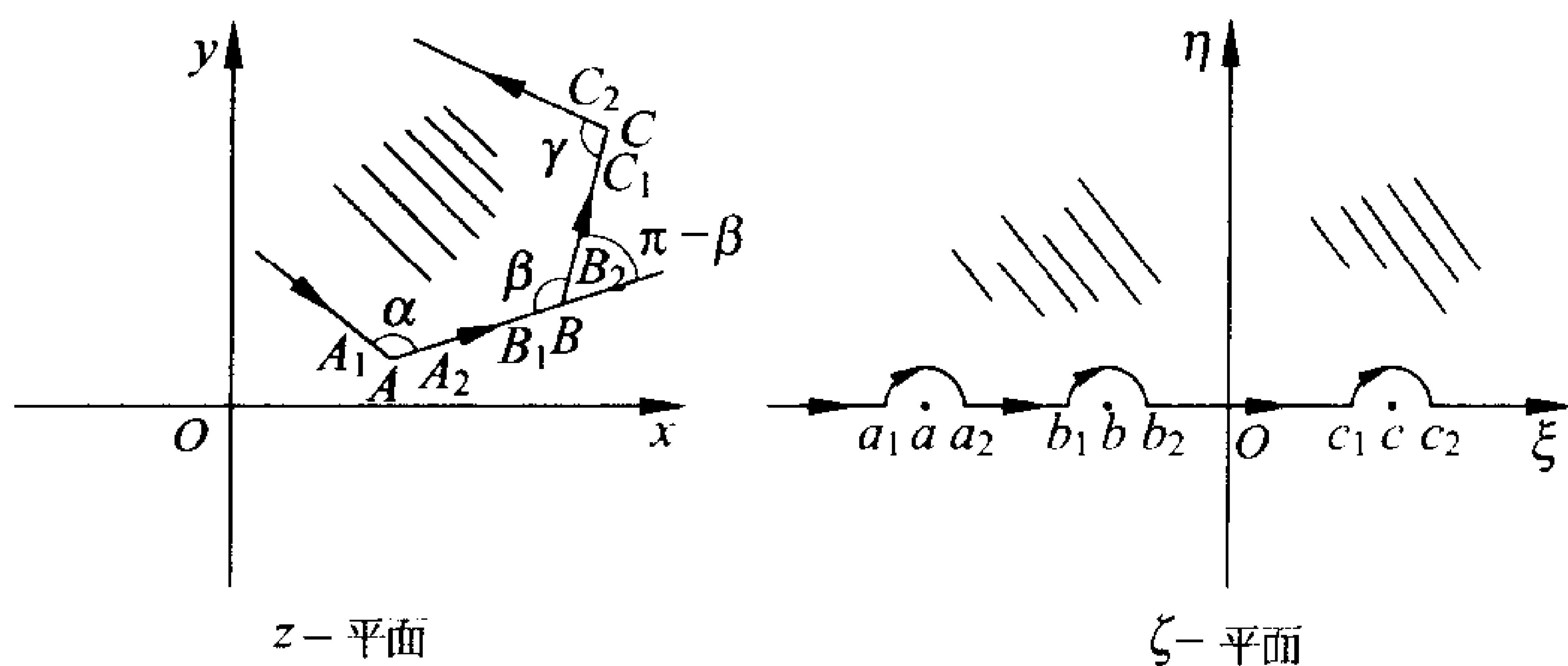


图 7-25 S-C 变换

则为施瓦兹-克里斯托弗变换(Schwarz-Christoffel transformation)简称 S-C 变换，其变换式为

$$\frac{dz}{d\zeta}=k(\zeta-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\zeta-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\zeta-C)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\cdots \tag{7-97}$$

这一变换可以把 z-平面上的封闭多边形变为 ζ-平面上的实轴，多边形的顶点 $A,B,C,\cdots$对应 ζ-平面的 $a,b,c,\cdots$点。当多边形为简单多边形时，多边形的内部变换为 ζ-平面实轴以上的上半平面。式(7-97)中的 k 为常量，可以是复数 $k=\sigma e^{i\lambda}$，σ 和 λ 为实数。当 $\zeta\to a$，则$\frac{dz}{d\zeta}$不是等于零就是趋于无穷大，视$\frac{\alpha}{\pi}$的数值而定，$\alpha>\pi$，$\frac{dz}{d\zeta}=0$而 $\alpha<\pi$，$\frac{dz}{d\zeta}\to\infty$。在上半平面以 $a,b,c,\cdots$为中心，半径为 ε 作半圆从而把 $a,b,c,\cdots$等点从实轴上避开，如图 7-25 所示。中心在 a 的小半圆周与实轴相交于 a_1,a_2 两点，当 ξ 沿实轴增加时不经过 a 点而沿 a_1，经过小半圆周，a_2 进行，从而避开 a 点。同样处理 b,c 等点。对应于 ζ-平面上的 $a_1,a_2,b_1,b_2,\cdots$在 z-平面上有 $A_1,A_2,B_1,B_2,\cdots$等。

现在来证明以下三点：

(1) 当 ζ 增加时，例如由 a_2 增加到 b_1 时，在 z-平面上为一直

线，由 A_2 到 B_1。

(2) 当 ζ 再增加时，由 b_1 到 b_2，越过 b 点时，在 z-平面上的直线折转$(\pi-\beta)$ 角度。

(3) ζ-平面的上半平面对应于 z-平面多边形的内区。

首先取式(7-97)S-C 变换式两侧的幅角，即得

$$\arg(\mathrm{d}z)-\arg(\mathrm{d}\zeta)=\lambda+\left(\frac{\alpha}{\pi}-1\right)\arg(\zeta-a)$$
$$+\left(\frac{\beta}{\pi}-1\right)\arg(\zeta-b)$$
$$+\left(\frac{\gamma}{\pi}-1\right)\arg(\zeta-C)+\cdots \tag{a}$$

当 ζ 由 a_2 向 b_1 移动时，$\mathrm{d}\zeta$ 的幅角保持为零，即 $\arg(\mathrm{d}\zeta)=0$。$(\zeta-a)$应有实的正值，因此 $\arg(\zeta-a)=0$。而所有$(\zeta-b)$，$(\zeta-c)$等均为实的负值，因此 $\arg(\zeta-b)=\arg(\zeta-c)=\cdots=\pi$。于是在 a_2b_1 这一段实轴上式(a)为

$$\arg(\mathrm{d}z)=\lambda+(\beta-\pi)+(\gamma-\pi)+\cdots$$
$$=\mathrm{const} \tag{b}$$

说明 A_2B_1 为 z-平面上的一条直线，其幅角为常数。同样地如果 ζ 从 b_2 向 C_1 移动可得

$$\arg(\mathrm{d}z)=\lambda+(\gamma-\pi)+\cdots$$
$$=\mathrm{const} \tag{c}$$

说明 z-平面上 B_2C_1 为一条直线。

B_2C_1 直线与 A_2B_1 直线之间的夹角应由式(c)减式(b)得到，即为$-(\beta-\pi)=\pi-\beta$，这就证明了当 ζ 由 b_1 移动到 b_2，z-平面的直线折转了$(\pi-\beta)$角度。

由 b_1 至 b_2，在 ζ-平面上是经过小的半圆，如图 7-26 所示。令

$$\zeta-b=\varepsilon e^{i\theta} \tag{d}$$

则

$$\mathrm{d}\zeta=\varepsilon e^{i\theta}i\mathrm{d}\theta$$

当 $\zeta\to b,\varepsilon\to 0$，由式(7-97)得

$$\frac{dz}{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}=\sigma e^{i\lambda}(b-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}\varepsilon^{\frac{\beta}{\pi}-1}e^{i\theta(\frac{\beta}{\pi}-1)}(b-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\cdots$$

$$\begin{aligned}dz&=i\sigma e^{i(\lambda+\theta)}\varepsilon^{\frac{\beta}{\pi}}e^{i\theta(\frac{\beta}{\pi}-1)}(b-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(b-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\cdots d\theta\\&=i\varepsilon^{\frac{\beta}{\pi}}e^{i\lambda}e^{i\theta\frac{\beta}{\pi}}Ed\theta\end{aligned}\tag{e}$$

式中：$E=\sigma(b-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(b-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\cdots$。

对式(e)积分得

$$z=\frac{\pi}{\beta}\varepsilon^{\frac{\beta}{\pi}}e^{i(\theta\frac{\beta}{\pi}+\lambda)}E+z_1\tag{f}$$

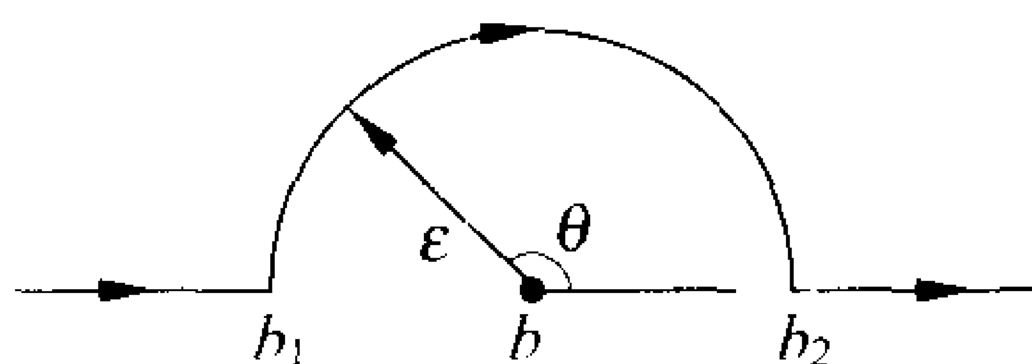


图 7-26　变换到 ζ-平面的多边形顶点

z_1 为积分常数。此外，因为 β 角为正，当 $\varepsilon\to 0$，$z\to z_1$。即 z_1 点对应于直线 A_2B_1 与 B_2C_1 的交点 B。由此可见 S-C 变换使 ζ-平面实轴上的 $a,b,c,\cdots$ 点对应于 z-平面多边形的顶点 $A,B,C,\cdots$ 等点，多边形的内角为 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 等。由(f)式得

$$\arg(z-z_1)=\lambda+\theta\frac{\beta}{\pi}+\arg E$$

在 ζ-平面当沿半圆周移动，例如由 b_1 至 b_2，则 θ 由 π 减到 0，$\arg(z-z_1)$的值则减小了 β。由于 z-平面上是简单多边形，z 点由 B_1 沿内角 β 移至 B_2，$\arg(z-z_1)$减小了 β 角，证明 ζ-平面的上半平面对应多边形的内区。

对式(7-97)积分，可得 S-C 变换式的如下形式：

$$z=kg(\zeta)+z_0\tag{7-98}$$

$$k=\sigma e^{i\lambda}$$

z_0 是一个复数，它可以确定 z-平面上坐标的原点，换句话说，通过适当选取 z-平面的坐标原点也可以消去 z_0。σ 为一实常数，它可以改变多边形的比尺而 λ 的变化会引起多边形方位的变化。由此得到，对应于给定值 $a,b,c,\cdots,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 的所有多边形是彼此相似的。$a,b,c\cdots$ 等 n 个常数中有三个是可以任意选取的，一般选

为$-1,0,1$而其余的实常数则决定于多边形的形状。

当多边形的一个顶点对应于ζ-平面实轴上无穷远点的情形，例如a点趋于$-\infty$，当$k=\sigma e^{i\lambda}(-a)^{-\frac{\alpha}{\pi}+1}$时，由式(7-97)得

$$\frac{dz}{d\zeta}=\sigma e^{i\lambda}(-a)^{-\frac{\alpha}{\pi}+1}(\zeta-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\zeta-b)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}\cdots$$

当$a\to-\infty$，$(-a)^{-\frac{\alpha}{\pi}+1}(\zeta-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}=\left(\frac{\zeta-a}{-a}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}\to+1$时，方程式(7-97)变换为

$$\frac{dz}{d\zeta}=\sigma e^{i\lambda}(\zeta-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\zeta-C)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}\cdots \tag{7-99}$$

由此可见：对应于$a=-\infty$的因子$(\zeta-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}$在变换式中消失，并且在变换方程式中不出现$\alpha$角。

7.8.3 施瓦兹-克里斯托弗变换举例

S-C 变换是一个很重要的保角变换，有很多用途。这里用一个简单的例子说明 S-C 变换的应用。如图 7-27 所示的是无穷远均匀来流绕垂直放置的平板的流动。这个问题于 7.3.3 节中已利用儒可夫斯基变换解决，可与本节用 S-C 变换的结果互相校核。平板长为$2C$，由于流动以实轴分开的上下两部分对称，因此只研究上部流动。沿x轴由$-\infty$至A再沿平板AB，BC，然后由C至$+\infty$是一条零流线。A，B，C三点在ζ-平面上可任选为位于$\zeta=-1,0,1$的a，b，c三点与之对应。S-C 变换方程式为

$$\frac{dz}{d\zeta}=k(\zeta+1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-0)^{1}(\zeta-1)^{-\frac{1}{2}}$$

如图 7-27 所示，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=2\pi$，$\gamma=\frac{\pi}{2}$，化简得

$$\frac{dz}{d\zeta}=k\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \tag{a}$$

或积分之，得

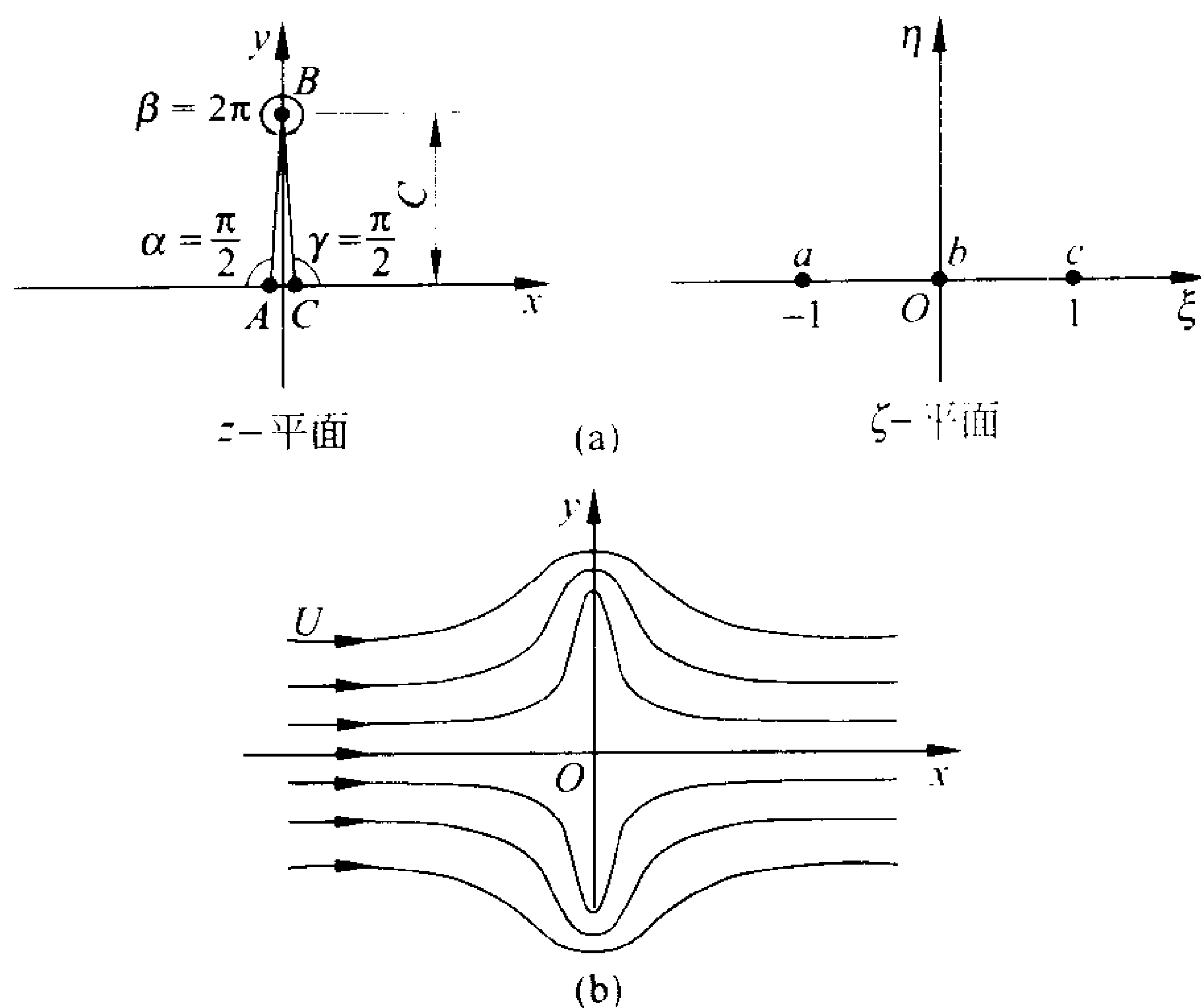


图 7-27 S-C 变换应用——绕垂直平板流动[11]

$$z=k\sqrt{\zeta^2-1}+z_0 \tag{b}$$

式中：z_0 为积分常数，是一复数。

由 A,B,C 与 a,b,c 的对应关系可求 k 与 z_0。它们是当$\zeta=1$，$z=0$ 时 $z_0=0$；当 $\zeta=-1$，$z=0$ 时 $z_0=0$；当 $\zeta=0$，$z=\mathrm{i}C$，从而得到 $z_0=0$，$k=C$。于是变换式为

$$z=C\sqrt{\zeta^2-1} \tag{c}$$

在 ζ-平面中流动为均匀直线流动。当 $\zeta\to\infty$ 时 $z\to C\zeta$，因此 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=C$，所以在无穷远处 $W(\zeta)=Cw(z)$。在 z-平面上流速 U 相应于在 ζ-平面上流速为 CU。ζ-平面均匀流的复势为

$$F(\zeta)=CU\zeta \tag{d}$$

由式(c)可得

$$\zeta=\pm\sqrt{\left(\frac{z}{C}\right)^2+1} \tag{e}$$

由于要使 $\zeta\to\infty$，$z\to\infty$，因此必须取"+"号，即

$$\zeta=\sqrt{\left(\frac{z}{C}\right)^2+1} \tag{f}$$

代入式(d)可得 z-平面的复势为

$$f(z)=CU\frac{1}{C}\sqrt{z^2+C^2}=U\sqrt{z^2+C^2} \tag{g}$$

式(g)与式(7-49)完全相同。流动的图形如图 7-27(b)所示。在 $z=\pm iC$两点流速将趋于∞，因此流动在这两点处将发生脱离，从而使实际流动与式(g)表示的流动并不相同。

参考书目

[1] 刘光宗．流体力学原理与分析方法．北京：高等教育出版社，1992

[2] Anderson John DJR. Fundamentals of Aerodynamics 2nd ed. McGraw-Hill, Inc., 1991

[3] Bertin John J, Smith Michael L. Aerodynamics for Engineers. Prentice-Hall Inc., 1998

第8章

空间势流

本章将讨论空间势流问题。空间势流也称三维势流，是发生在三维空间中的势流运动。从物理现象来说三维空间势流运动与二维平面势流并没有重大的区别，都是不可压缩理想流体的无涡流动。但是由于三维性，平面势流理论中强有力的工具，复变函数方法不再适用。必须设法去解基本的偏微分方程式。对势流而言流速势满足的拉普拉斯方程仍是基本方程。通过流速势得到流速场后可利用伯努利方程求得压强场。

本章中将主要研究轴对称的三维势流，对于轴对称的三维势流仍有流函数，称为斯托克斯流函数(Stokes stream function)，而二维平面势流中的流函数由于是拉格朗日在1781年引入的因而称为拉格朗日流函数(Lagrange stream function)。斯托克斯流函数对于分析和理解空间轴对称势流很有意义。

由于流速势所满足的仍为线性的拉普拉斯方程，因此势流叠加的方法仍适用。

8.1 轴对称空间势流的流速势与流函数

在空间势流中，流动无涡，因此存在流速势函数，仍以 ϕ 表示。对于轴对称流动(axisymmetric flow)斯托克斯流函数仍以 ψ 表

示。本节将讨论在圆柱坐标和球坐标中空间势流的轴对称流动的基本方程式。

8.1.1 圆柱坐标表示的空间势流

选择如附录Ⅱ.5节中图Ⅱ-3所示的圆柱坐标(r,θ,z)，由式(Ⅱ-17)所表示的不可压缩流体的连续方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{8-1}$$

对于轴对称流动，$\frac{\partial}{\partial\theta}=0$，式(8-1)改写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial}{\partial z}(ru_z)\right]=0 \tag{8-2}$$

由式(Ⅱ-20)可知空间势流流速势ϕ所满足的拉普拉斯方程为

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{8-3}$$

对于轴对称势流$\frac{\partial}{\partial\theta}=0$，式(8-3)改写为

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{8-4}$$

流速分量应分别是流速势梯度在该坐标轴方向的分量，由式(Ⅱ-19)表示，在圆柱坐标中为

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta},\quad u_z=\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{8-5}$$

而轴对称流动中只有u_r与u_z。

在二维流动中曾经定义一个流函数ψ，使连续方程可以自动满足。三维流动中一般说来并不存在这样一个标量函数。但是对于轴对称流动，则存在这样一个函数：从连续方程式(8-2)可以看出，如果定义

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad u_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{8-6}$$

则连续方程自动满足，这样定义的 ψ 则称为斯托克斯流函数，简称流函数。流线方程为

$$\frac{\mathrm{d}r}{u_r}=\frac{\mathrm{d}z}{u_z},\ \text{即}\ u_z\mathrm{d}r-u_r\mathrm{d}z=0 \tag{8-7}$$

将式(8-6)中的 u_r，u_z 代入，得

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathrm{d}z=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=-\frac{1}{r}\mathrm{d}\psi=0$$

由此可知 $\psi=\text{const}$ 说明在同一流线上流函数 ψ 为一常数，等流函数线即为流线。流函数 ψ 与流量的关系可从图 8-1 看出，当选择如图的圆柱坐标系，z 轴水平向右为正。设沿正 r 方向流出回转面的流量为正，则流经回转曲面 AB 的流量有

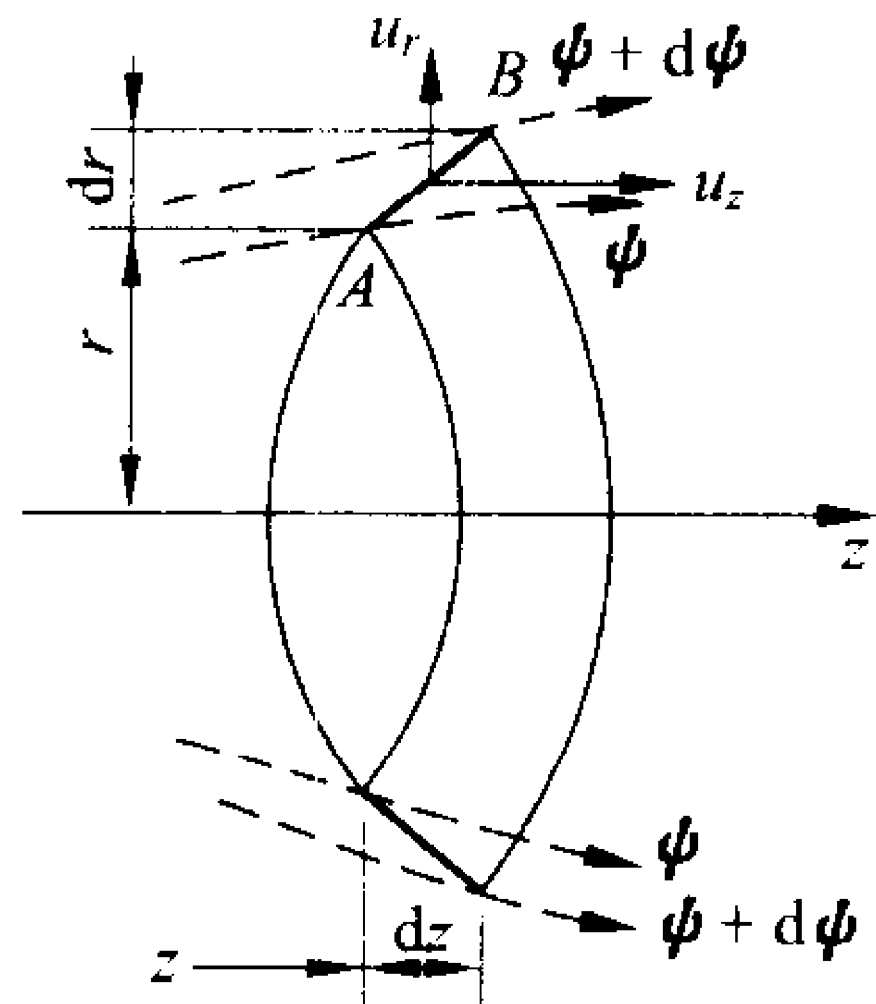


图 8-1 圆柱坐标中 ψ 与 Q 的关系

(1) 径向 $\mathrm{d}Q_r=u_r2\pi r\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}2\pi r\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

(2) 轴向 $\mathrm{d}Q_z=-u_z2\pi r\mathrm{d}r$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r$$

由于轴对称流动切向流量为零 $\mathrm{d}Q_\theta=0$，因此

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}Q_r+\mathrm{d}Q_z=2\pi\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r\right)=2\pi\mathrm{d}\psi \tag{8-8}$$

由此可见：流过以 z 为中心轴的回转曲面 AB 的流量为 2π 乘以流经 AB 两点两流线的流函数的差值。与平面势流情况相比只是相差 2π。

对于势流，$\nabla\times\boldsymbol{u}=0$，由附录式(Ⅱ-18)知在圆柱坐标中得

$$\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}=0$$

将式(8-6)代入，得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \tag{8-9}$$

这就是轴对称三维势流中流函数应满足的方程式，但这个方程式本身不是拉普拉斯方程，而平面势流中流函数满足拉普拉斯方程，这就是三维势流与平面势流中流函数的差别。

8.1.2 球坐标表示的空间势流

选择如附录Ⅱ.6节中图Ⅱ-4所示的球坐标(r,θ,β)系，在球坐标系中不可压缩流体的连续方程可由式(Ⅱ-22)表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}=0 \tag{8-10}$$

对于轴对称流动$\frac{\partial}{\partial\beta}=0$，式(8-10)改写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)$$
$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta u_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta u_\theta)\right]=0 \tag{8-11}$$

由式(Ⅱ-24)可知在三维势流中使用球坐标可得流速分量与流速势函数ϕ的关系为

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta},\quad u_\beta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\beta} \tag{8-12}$$

轴对称流动中只有u_r，u_θ。空间势流流速势函数所需满足的拉普拉斯方程为式(Ⅱ-25)，即

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\beta^2}=0 \quad (\text{Ⅱ-25})$$

对于轴对称势流，式(Ⅱ-25)可写为

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0 \quad (8\text{-}13)$$

设定义的流函数 ψ 与流速分量具有下列关系：

$$u_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad u_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (8\text{-}14)$$

将式(8-14)代入式(8-11)中可知连续方程自动满足。

从如下的流线方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{u_r}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{u_\theta} \quad (8\text{-}15)$$

可以通过把式(8-14)代入式(8-15)得下式来证明同一流线上 ψ 为常数。

$$\begin{aligned}ru_r\mathrm{d}\theta-u_\theta\mathrm{d}r&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r\right)\\&=\frac{1}{r\sin\theta}\mathrm{d}\psi=0\end{aligned}$$

由此式可知在一条流线上 $\psi=\text{const}$。

关于 ψ 与 Q 的关系可从图8-2看出：设对称轴 $O\text{-}z$ 为水平放置，流场中两点 A,B 各有流线通过，AB 环绕 z 轴形成一条回转曲面，设仍以沿 r 正方向流出回转曲面的流量为正，则

$$\begin{aligned}Q=\int_A^B\mathrm{d}Q&=\int_A^B[u_r2\pi r\sin\theta r\mathrm{d}\theta-u_\theta2\pi r\sin\theta\mathrm{d}r]\\&=2\pi\int_A^B\left[\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)r\sin\theta r\mathrm{d}\theta-\left(-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)r\sin\theta\mathrm{d}r\right]\end{aligned}$$

$$= 2\pi\int_A^B\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r\right]$$

$$= 2\pi\int_A^B \mathrm{d}\psi$$

$$= 2\pi(\psi_B-\psi_A) \tag{8-16}$$

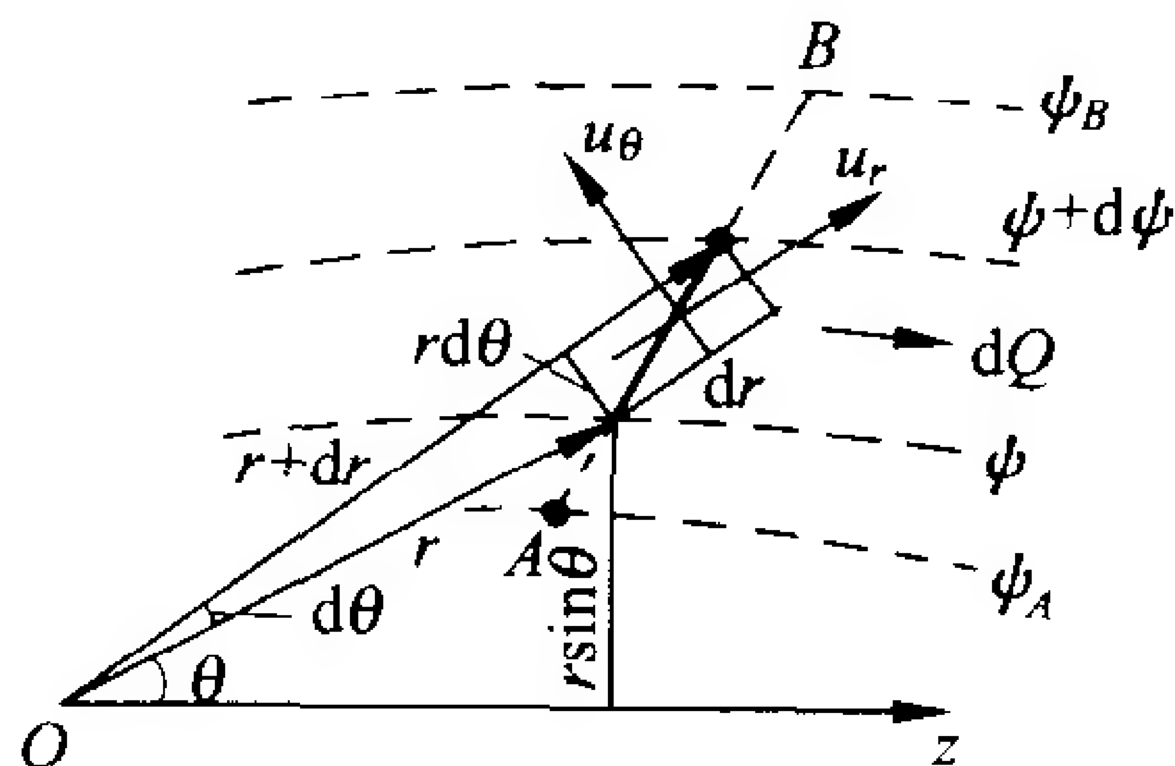


图 8-2　球面坐标中 ψ 与 Q 的关系

与圆柱坐标中所得结果相同。通过两点的两流线流函数的差值乘以 2π 即为该两条流线之间通过的流量。

对于势流 $\nabla\times\boldsymbol{u}=0$，由附录Ⅱ.6 中式(Ⅱ-23)知在球坐标中得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}=0$$

将式(8-14)中的 u_r，u_θ 代入，得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=0$$

化简得

$$r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=0 \tag{8-17}$$

式(8-17)为轴对称空间势流流动的斯托克斯流函数在球坐标中应该满足的微分方程式。与式(8-13)相比较可知它不是拉普拉斯方程，但仍是线性方程，因而可以使用叠加基本势流流函数求得某些复杂流动流函数的方法。

8.2 流速势函数方程式的解

三维轴对称势流中流速势函数在圆柱坐标和球坐标系中的拉普拉斯方程正如式(8-4)和式(8-13)所示。解这些方程式的边值问题(boundary value problem)是解决轴对称势流的主要方式。本节给出球坐标系中用分离变量法(separation of variables)解流速势方程的一般形式。

对于轴对称势流，流速势只是 r 和 θ 两个坐标的函数，所以令

$$\Phi(r,\theta)=R(r)T(\theta) \tag{a}$$

代入流速势方程式(8-13)中，得

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$
$$=\frac{T}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\right)=0 \tag{b}$$

各项乘以$\frac{r^2}{RT}$后得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{T\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\right) \tag{c}$$

由式(c)可见等号左侧部分只是 r 的函数而右侧部分只是 θ 的函数。因此，惟一可能是两侧均等于同一常数项，这里假定这一常数项为 $l(l+1)$。于是

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=l(l+1) \tag{d}$$

$$-\frac{1}{T\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\right)=l(l+1) \tag{e}$$

常数项的选择主要考虑求 $T(\theta)$解常微分方程式(e)的方便。由式(d)得 $R(r)$的方程式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R=0 \tag{f}$$

这个常微分方程式的解具有以下形式：

$$R(r)=Kr^{\alpha} \tag{g}$$

将式(g)代入式(f)，得

$$\alpha(\alpha+1)Kr^{\alpha}-l(l+1)Kr^{\alpha}=0 \tag{h}$$

解出 $\alpha=l$，$\alpha=-(l+1)$。$R(r)$的一般解为这两个解的线性组合，即

$$R_l(r)=A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}} \tag{i}$$

这个解中 l 可以为任意整数，一旦 l 确定，即可确定与之相应的 A_l，B_l 两个系数。

对于 $T(\theta)$，由(e)式可得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)T=0 \tag{j}$$

式(j)为勒让德方程式(Legendre's equation)，令 $x=\cos\theta$ 可将此方程式变为勒让德方程的标准式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)T=0 \tag{k}$$

这个方程的解为第一类勒让德函数(Legendre's function) $P_l(x)$ 和第二类勒让德函数 $Q_l(x)$ 之和，因此方程(k)的一般解为

$$T_l(\theta)=C_l P_l(\cos\theta)+D_l Q_l(\cos\theta) \tag{l}$$

但是 $Q_l(\cos\theta)$ 对于所有的 l 值在 $\cos\theta=\pm1$ 时均发散，因此系数 D_l 必须为零，因为在流场中不应存在奇点。同时，除非 l 是整数，$P_l(\cos\theta)$ 对于 $\cos\theta=\pm1$ 也是发散的。因此 l 必须选为整数。将 $R_l(r)$ 与 $T_l(\theta)$ 结合而得流速势函数的解为

$$\phi_l(r,\theta)=\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l\cos\theta \tag{m}$$

注意：此处任意常数 C_l 已被吸收到 A_l 和 B_l 中去。式(m)的解对于任意整数 l 都是适用的。由于所解的偏微分方程拉普拉斯方程是线性方程，因此可用叠加的办法得到更为通用的形式的解，即

$\phi(r,\theta)$可以考虑为所有可能的解 $\phi_l(r,\theta)$的和，即

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l\cos\theta \tag{8-18}$$

式(8-18)中的第一类勒让德函数为

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \tag{8-19}$$

式(8-19)常被称为 l 阶勒让德多项式(Legendre's polynomial of order l)。勒让德多项式的前几项有如下形式：

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

式(8-18)包含了一些基本的空间势流解，利用它们可以叠加为某些更为复杂的空间势流流动。

8.3 基本空间势流

以下给出一些基本的空间势流的解，它们的叠加可以解决一些实用的流动问题。

8.3.1 均匀流动

在式(8-18)中，如令

$$B_l=0 \qquad \text{对于所有的 } l \text{ 值}$$

$$A_l=\begin{cases}0 & \text{对于 } l\neq 1\\ U & \text{对于 } l=1\end{cases}$$

又当 $x=\cos\theta$ 时，则 $P_1(x)=P_1(\cos\theta)=\cos\theta$，于是得到

$$\phi(r,\theta)=Ur\cos\theta \tag{8-20}$$

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = U\cos\theta \\ u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{8-21}$$

由此说明式(8-20)表示的是空间势流中的均匀流动，流速为 U，方向为沿 z 轴方向，见图 8-3 所示。如果用直角坐标表示式(8-20)，由于 $z=r\cos\theta$，所以与平面势流中的结果一致。

$$\phi = Uz \tag{8-22}$$

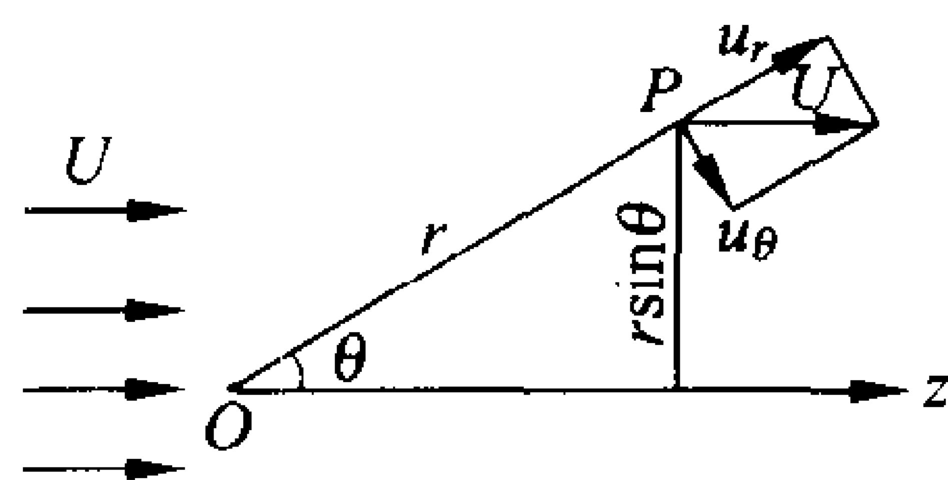


图 8-3　空间均匀势流

均匀流的流函数可由式(8-20)的流速势函数求出。由式(8-14)与式(8-21)可得

$$u_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U\cos\theta \tag{8-23}$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U\sin\theta \tag{8-24}$$

由式(8-23)积分可得

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta + f(r)$$

式中的 $f(r)$ 是 r 的任意函数。假定 $\theta=0$ 时 $\psi=0$，可知 $f(r)=0$。所以最后得到空间均匀流的流函数 ψ 为

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta \tag{8-25}$$

由式(8-22)知等势面为 $z=\text{const}$ 的面，即垂直于 z 轴的平面；而由式(8-25)知等流函数面(即流面)为 $r\sin\theta=\text{const}$ 的面，即以 z 轴为中心轴的圆柱面。两族曲面互相正交。两个流面 A，B 之间的流量 $Q=2\pi(\psi_A-\psi_B)$。

另外可从流函数的定义出发确定它的数值，如图 8-3 所示，流场中有任一点 $P(r,\theta)$，均匀流流过 OP 所形成的旋转面的流量

$Q=2\pi\psi$,这里假定沿 Oz 流线的流函数为 0。OP 旋转而在与 z 轴垂直方向的投影面积为 $\pi(r\sin\theta)^2$,所以沿 z 轴方向的均匀流穿过 OP 旋转面的流量为 $U\pi(r\sin\theta)^2$。二者相等,得

$$2\pi\psi=U\pi(r\sin\theta)^2$$

$$\psi=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta$$

与式(8-25)完全相同。

8.3.2 原点的源(或汇)

三维空间中的源与汇的势函数可由式(8-18)得到,令

$$A_l=0 \qquad \text{对于所有的 } l \text{ 值}$$

$$B_l=\begin{cases}0 & \text{对于 } l\neq 0\\ B_0\neq 0 & \text{对于 } l=0\end{cases}$$

而 $P_0(\cos\theta)=1$,从而式(8-18)可写为

$$\phi(r,\theta)=\frac{B_0}{r} \tag{8-26}$$

流速分量可由流速势通过式(8-12)得到

$$\left.\begin{aligned}u_r&=\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{B_0}{r^2}\\ u_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0\end{aligned}\right\} \tag{8-27}$$

流动完全是径向的,流速在原点处趋于∞,因此原点是一奇点,源位于原点处。对于位于原点的汇,则 $u_r=\frac{B_0}{r^2}$,径向流速与源相反。B_0 可通过流量确定。设以原点为球心的一个球面,半径为 r,通过球面的流量为 Q,则

$$Q=\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

式中:S 为球面面积;$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=u_r=-\frac{B_0}{r^2}$,因流速为径向流速;

$dS=r^2\sin\theta\ d\theta\ d\beta$。

$$Q=\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{\pi}\left(\frac{-B_0}{r^2}\right)r^2\sin\theta\ d\theta$$
$$=-4\pi B_0$$

由此得到 $B_0=-\dfrac{Q}{4\pi}$。代入式(8-26)得位于 $r=0$,强度为 $Q(Q>0)$的源的流速势函数 $\phi(r,\theta)$为

$$\phi(r,\theta)=-\frac{Q}{4\pi r} \tag{8-28}$$

而式(8-27)变为

$$\left.\begin{aligned}u_r&=\frac{Q}{4\pi r^2}\\ u_\theta&=0\end{aligned}\right\} \tag{8-29}$$

由式(8-14)可得流函数与流速分量的关系为

$$u_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{Q}{4\pi r^2},\ u_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$$

流函数为

$$\psi=\int d\psi=\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ d\theta+\frac{\partial\psi}{\partial r}\ dr\right)=\int\frac{Q}{4\pi}\ \sin\theta d\theta$$

$$\psi=-\frac{Q}{4\pi}\ \cos\theta+C$$

将 $\theta=0,\psi=0$ 代入上式后得积分常数 $C=\dfrac{Q}{4\pi}$,所以流函数为

$$\psi=\frac{Q}{4\pi}(1-\cos\theta) \tag{8-30}$$

对于位于原点的汇,则

$$\phi=\frac{Q}{4\pi r} \tag{8-31}$$

$$\psi=-\frac{Q}{4\pi}(1-\cos\theta) \tag{8-32}$$

8.3.3 偶极子

强度相同的源和汇当它们在空间的距离趋近无穷小时组成一个偶极子。如图 8-4 所示，一强度为 $-Q$ 的汇位于原点 O 处而一强度相同为 Q 的源位于参考轴 z 上与原点相距 Δz 的位置上．流场中的任意点 $P(r,\theta)$ 距汇点的距离为 r 而距源点的距离为 $r-\Delta r$。

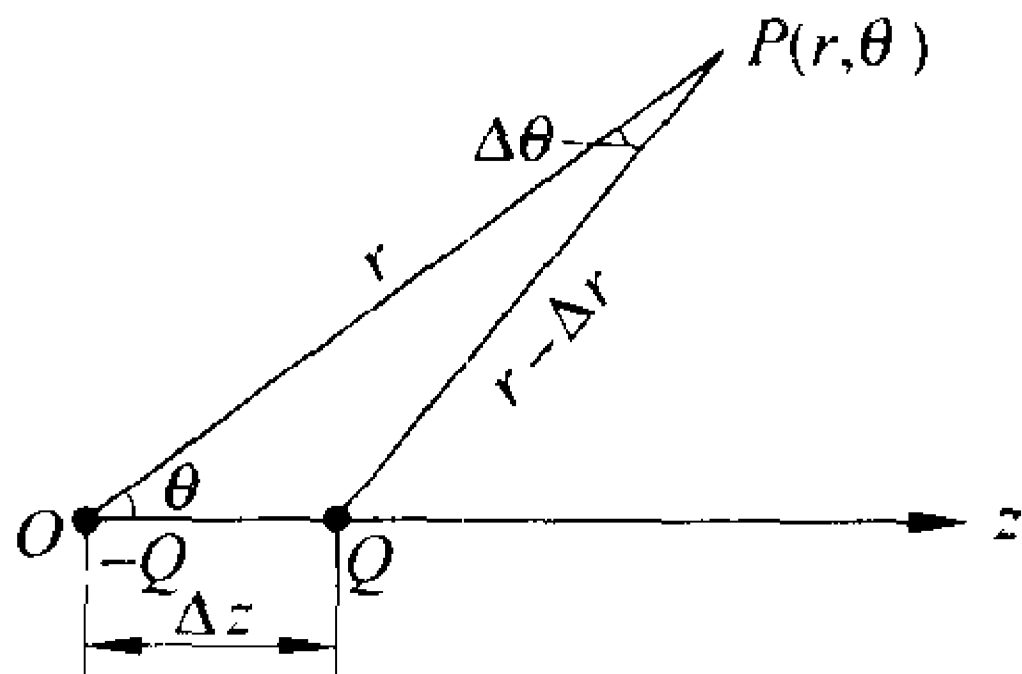


图 8-4　偶极子

由式(8-31)与式(8-28)得偶极子的流速势函数为

$$\phi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi r}-\frac{Q}{4\pi(r-\Delta r)}$$

$$=\frac{Q}{4\pi r}\left(1-\frac{1}{1-\dfrac{\Delta r}{r}}\right)$$

当源与汇趋近，$\Delta z\to 0$，则$\dfrac{\Delta r}{r}\to 0$。$\dfrac{1}{1-\dfrac{\Delta r}{r}}$可展开为级数，即

$$\phi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi r}\left\{1-\left[1+\frac{\Delta r}{r}+o\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2\right]\right\}$$

$$=-\frac{Q}{4\pi r}\left[\frac{\Delta r}{r}+o\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2\right]$$

由于三角关系

$$(r-\Delta r)^2=r^2+(\Delta z)^2-2r\Delta z\cos\theta$$

由此式可解出

$$\cos\theta=\frac{r^2+(\Delta z)^2-(r-\Delta r)^2}{2r\Delta z}$$

$$=\frac{\Delta r}{\Delta z}-\frac{\Delta r}{2r}\frac{\Delta r}{\Delta z}+\frac{\Delta z}{2r}$$

$$=\frac{\Delta r}{\Delta z}\left[1+o\left(\frac{\Delta r}{r}\right)\right]$$

忽略$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$级小量，可得

$$\Delta r=\Delta z\cos\theta$$

所以 $\phi(r,\theta)=-\frac{Q}{4\pi r}\left(\frac{\Delta z}{r}\cos\theta\right)$

当 $\Delta z\to o, Q\to\infty$时使 $Q\Delta z\to\mu$，则

$$\phi(r,\theta)=-\frac{\mu}{4\pi r^2}\cos\theta \tag{8-33}$$

式中：μ 为偶极的强度或称偶极矩。

可以通过流速分量求解流函数 ψ。由式(8-12)及式(8-14)可得

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{\mu}{2\pi r^3}\cos\theta=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta\cos\theta$$

积分之，得

$$\psi(r,\theta)=\frac{\mu}{4\pi r}\sin^2\theta+C$$

代入边界条件，当 $\theta=0,\psi=0$，积分常数 $C=0$，则

$$\psi(r,\theta)=\frac{\mu}{4\pi r}\sin^2\theta \tag{8-34}$$

式(8-34)为偶极子的流函数。这个偶极子在原点以左的负方向有流量流入而在正方向有流量流出，在 z 轴上形成沿 z 的正方向的流速。

8.4 三维半体绕流

把原点的源和均匀流叠加就得到一个三维半体(half body)的绕流运动。半体就是一个具有钝形头部的长柱状物体，见图 8-5。

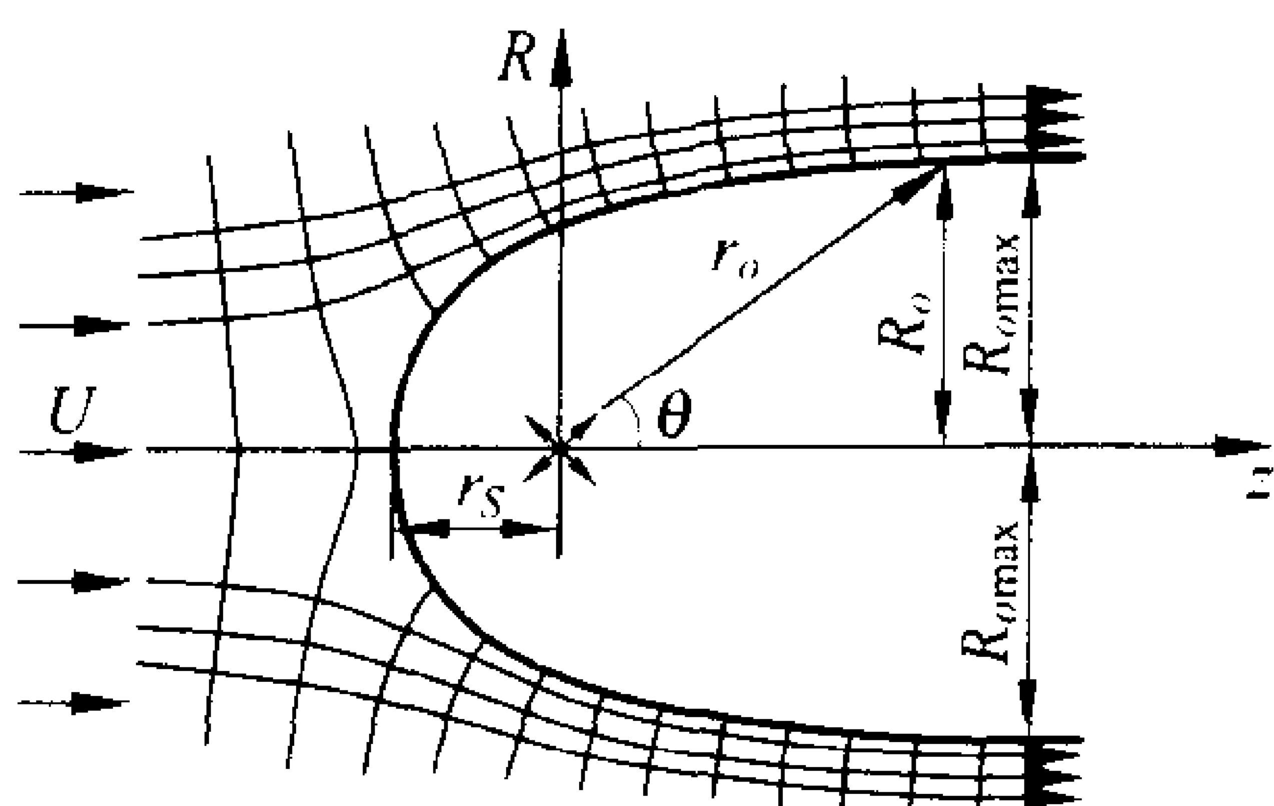


图 8-5 半体绕流[7]

由式(8-25)和式(8-30)叠加后得到的流函数 $\psi(r,\theta)$ 为

$$\psi=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta+\frac{Q}{4\pi}(1-\cos\theta)-\frac{Q}{2\pi}$$

式中增加了一常数项 $-\frac{Q}{2\pi}$，以保证在绕流半体的物面上流函数 $\psi=0$，化简上式得

$$\psi=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta-\frac{Q}{4\pi}(1+\cos\theta) \tag{8-35}$$

由 $\psi=0$ 可求出半体的形状 $r=r_0(\theta)$，令式(8-35)中 $\psi=0$，可得

$$r_0^2=\frac{Q(1+\cos\theta)}{2\pi U\sin^2\theta}$$

所以

$$r_0=\sqrt{\frac{Q}{\pi U}}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\sqrt{\frac{Q}{4\pi U}}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{8-36}$$

对于半体表面，以 z 为回转轴的回转半径 R_0 为

$$R_0=r_0\sin\theta=\sqrt{\frac{Q}{\pi U}}\cos\frac{\theta}{2} \tag{8-37}$$

当 $z\rightarrow\infty$ 时得半体的最大回转半径，这时 $\theta\rightarrow0$

$$R_{0_{\max}}=\sqrt{\frac{Q}{\pi U}} \tag{8-38}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$r_0=\sqrt{\frac{Q}{2\pi U}}$。当 $\theta=\pi$，$r_0=\sqrt{\frac{Q}{4\pi U}}=r_S$ 为驻点距原点的距离。

半体绕流的势函数 ϕ 可由均匀流与源的流速势叠加而得

$$\phi=Ur\cos\theta-\frac{Q}{4\pi r} \tag{8-39}$$

由流速势可得到速度场，再由伯努利方程得到压强场。

8.5 圆球绕流

均匀流动绕过圆球的流动可由均匀流和位于原点的偶极子叠加而得到。由式(8-25)及式(8-34)相加得圆球绕流的流函数为

$$\psi=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta+\frac{\mu}{4\pi r}\sin^2\theta \tag{8-40}$$

半径为 a 的圆球面上 $\psi=0$，所以

$$0=\frac{1}{2}Ua^2\sin^2\theta+\frac{\mu}{4\pi a}\sin^2\theta$$

由此得出偶极子的强度 μ 为

$$\mu=-2\pi Ua^3 \tag{8-41}$$

式(8-41)说明偶极子为负的方向。也就是偶极子的流速与均匀流相反，如果均匀流沿 z 的正方向，则偶极子的源在左，汇在右，为负偶极子。将此代入式(8-40)可知绕球流动的流函数为

$$\psi=\frac{1}{2}U\left(r^2-\frac{a^3}{r}\right)\sin^2\theta=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right) \tag{8-42}$$

同样方法可以得到绕球流动的流速势函数 $\phi(r,\theta)$，仍取 $\mu=-2\pi Ua^3$，则

$$\phi=U\left(r+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \tag{8-43}$$

在圆球表面上 $r=a$，其流速由式(8-12)求出，得

$$
\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\
u_\theta &= \frac{1}{r}\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} U \sin\theta
\end{aligned}\right\} \tag{8-44}
$$

式中的"—"号表示流速为顺时针方向。驻点在 $\theta=0$ 和 π 处，而最大流速出现在 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$处。在 $\theta=\frac{\pi}{2}$处 $u_{\theta\max}=-\frac{3}{2}U$ 为顺时针方向，而在 $\theta=-\frac{\pi}{2}$处 $u_\theta=\frac{3}{2}U$，为逆时针方向。圆球表面的压强分布可由伯努利方程式(2-98)计算，设无穷远来流压强为 p_0，流速已知为 U，而当地压强为 p，流速为

$$
V^2 = u_r^2 + u_\theta^2 = \frac{9}{4} U^2 \sin^2\theta
$$

根据式(2-98)可得

$$
p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \tag{2-98}
$$

$$
\frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = C_p = 1 - \frac{V^2}{U^2} = 1 - \frac{9}{4}\ \sin^2\theta \tag{8-45}
$$

式(8-45)即为压强系数 C_p 在球表面上的分布。圆球绕流的流动图形如图 8-6 所示。

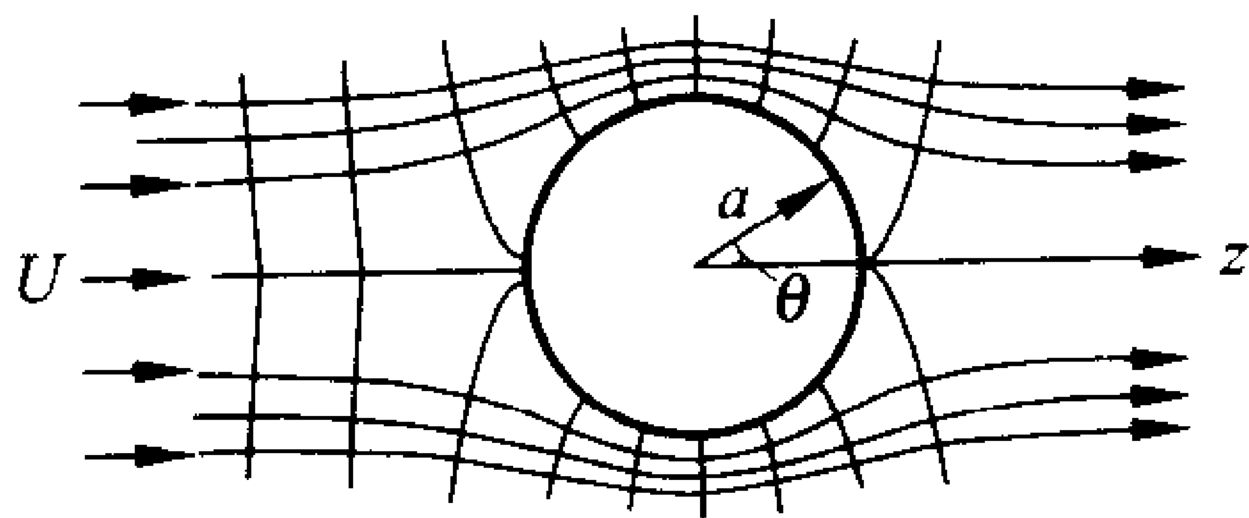


图 8-6　圆球绕流

球面所承受的合力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$
\boldsymbol{F} = -\iint_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A
$$

式中球面上一点压强 p 为

$$p=p_0+\frac{1}{2}\rho U^2-\frac{1}{2}\rho V^2$$
$$=p_0+\frac{1}{2}\rho U^2\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)$$

由于球面对球心对称，求合力时可以不考虑常数部分 $p_0+\frac{1}{2}\rho U^2$。

球面一点的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n}=\sin\theta\cos\beta\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

球面上微元面积 $\mathrm{d}S=a\,\mathrm{d}\theta\times a\sin\theta\,\mathrm{d}\beta=a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\theta$，将 p 和 $\boldsymbol{n}$ 及 $\mathrm{d}S$ 值代入合力 $\boldsymbol{F}$ 式中，得

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\rho U^2\,\frac{9}{4}a^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta(\sin\theta\cos\beta\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\beta\,\boldsymbol{j}$$
$$+\cos\theta\,\boldsymbol{k})\sin\theta\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\theta=0$$

所以在无界不可压缩理想流体的均匀来流圆球绕流中，如流动为恒定，圆球所承受的合力为零。此即为达朗贝尔疑题，将在 8.10 节中详加讨论。

8.6 兰金体绕流

将源、汇和均匀流叠加可得匀匀流动绕兰金体(Rankine body)的流动。如图 8-7 所示，设源位于 z 轴上的 $-C$ 处，汇位于 z 轴上的 C 处。

首先流速势 ϕ 可由叠加得出

$$\phi=Ur\cos\theta-\frac{Q}{4\pi r_1}+\frac{Q}{4\pi r_2} \tag{8-46}$$

式中的 r_1 和 r_2 可由几何关系得到

$$r_1=\sqrt{r^2\sin^2\theta+(r\cos\theta+C)^2}$$
$$r_2=\sqrt{r^2\sin^2\theta+(r\cos\theta-C)^2}$$

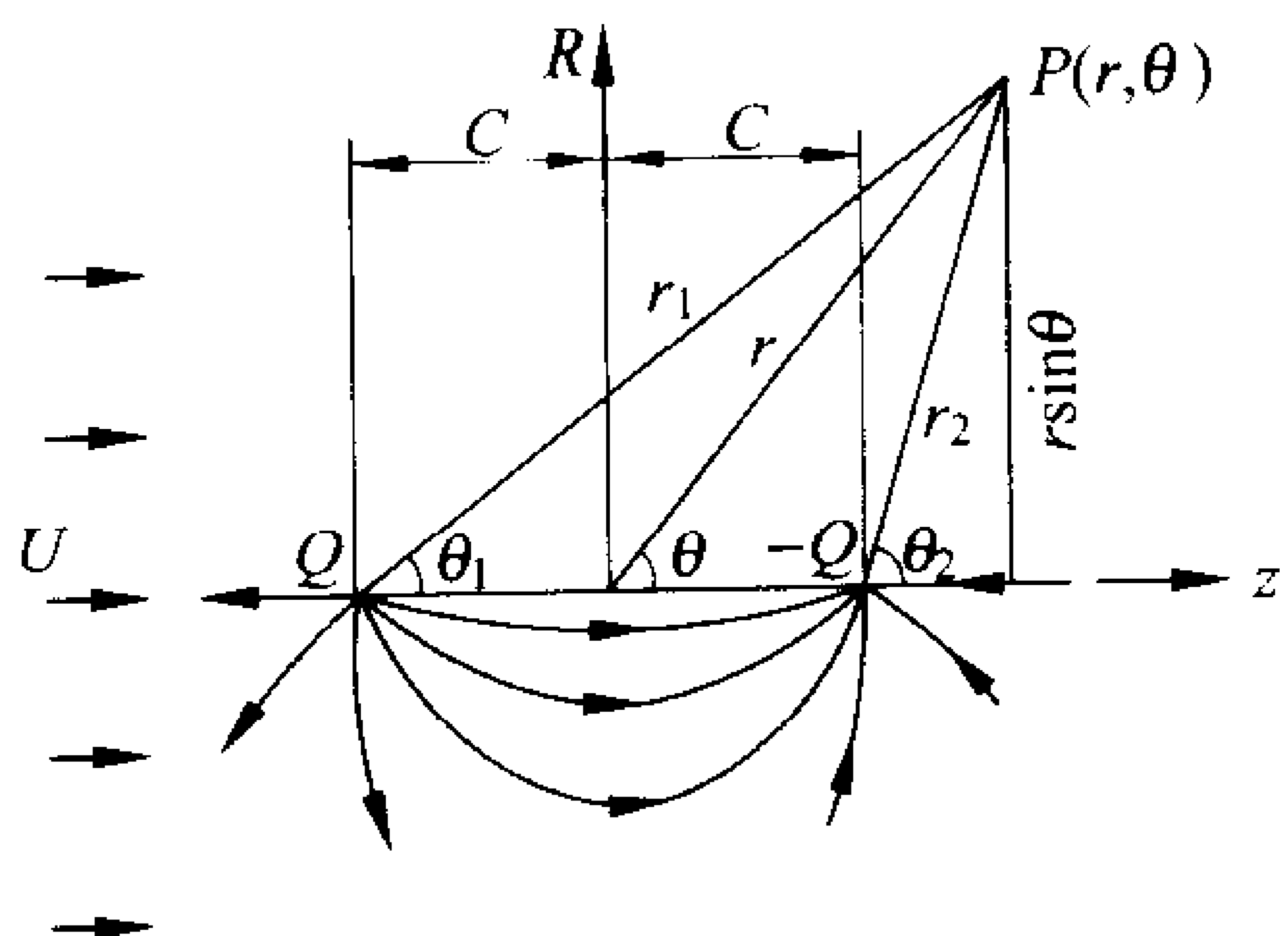


图 8-7　源、汇与均匀流叠加[7]

兰金体绕流的流函数 ψ 为

$$\psi=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta-\frac{Q}{4\pi}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{8-47}$$

在兰金体物体表面上，设 $r=r_0(\theta)$，$R=R_0(\theta)=r_0\sin\theta$，$\psi=0$，由式(8-47)得

$$\frac{1}{2}Ur_0^2\sin^2\theta-\frac{Q}{4\pi}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=0$$

或写为

$$R_0^2=\frac{Q}{2\pi U}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{8-48}$$

如将 $\cos\theta_1=\dfrac{z+C}{\sqrt{R_0^2+(z+C)^2}}$，$\cos\theta_2=\dfrac{z-C}{\sqrt{R_0^2+(z-C)^2}}$ 代入式(8-48)，可以得到 R_0 与 z 的关系式为

$$\left(\frac{R_0}{C}\right)^2=\frac{Q}{2\pi UC^2}\left(\frac{z+C}{\sqrt{R_0^2+(z+C)^2}}-\frac{z-C}{\sqrt{R_0^2+(z-C)^2}}\right) \tag{8-49}$$

由式(8-48)的零流函数线得到的兰金体形状如图 8-8 所示。当 $\theta_1=\theta_2=0$，$R_0=0$；当 $\theta_1=\theta_2=\pi$，$R_0=0$ 为两个驻点，如图中的 S 点。为了计算驻点位置 z_S，如下游的驻点($\theta=0$)，可以认为这里的流速为均匀流流速与由源和汇导致的流速即三个流速之和为

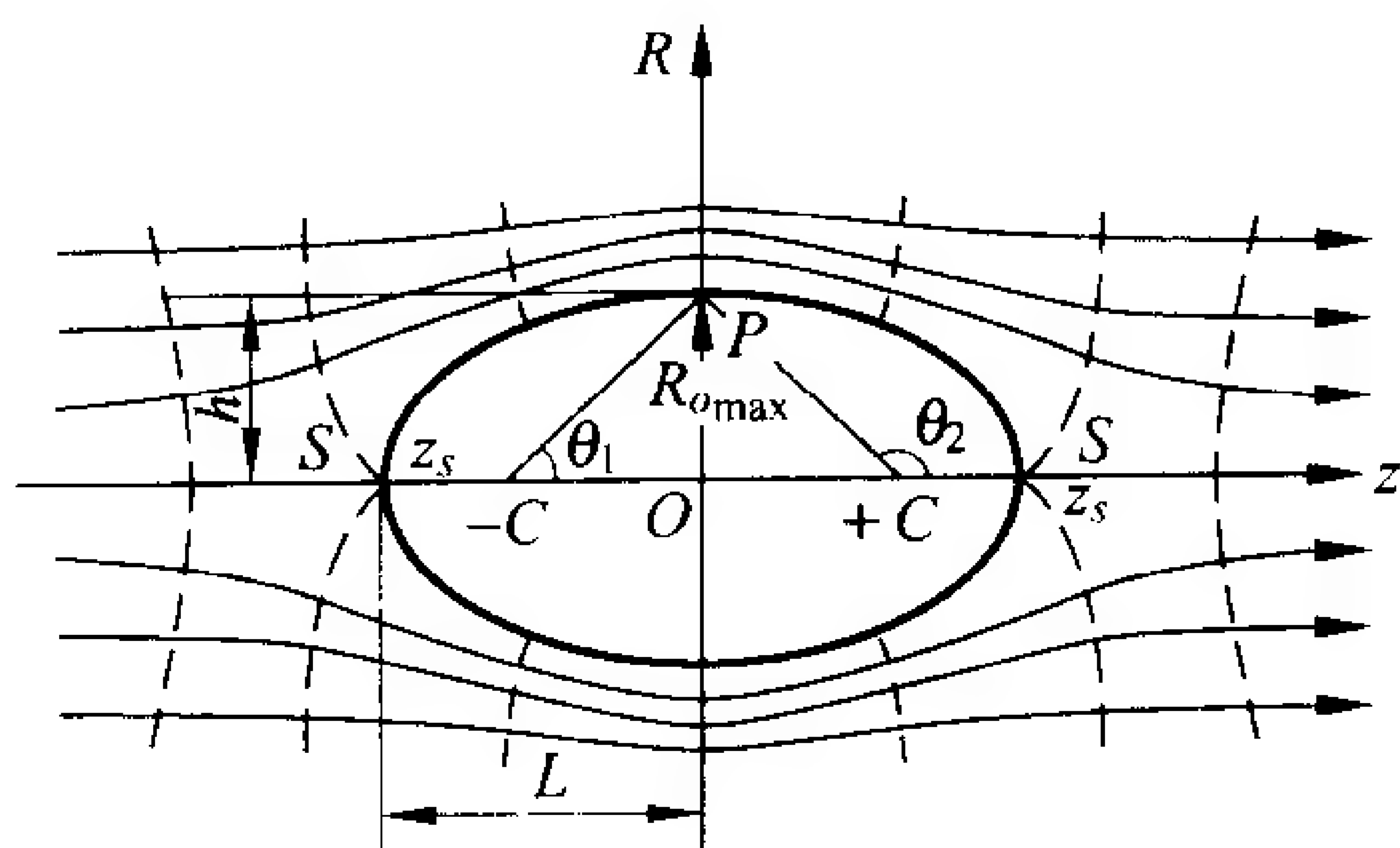


图 8-8 兰金体绕流[7]

零。设 z_S 点距原点距离为 L，则

$$U+\frac{Q}{4\pi(L+C)^2}-\frac{Q}{4\pi(L-C)^2}=0$$

化简后得

$$(L^2-C^2)^2-\frac{QC}{\pi U}L=0 \tag{8-50}$$

此式中的 C,Q,U 均为已知，可通过试算方法求出兰金体长轴的长度 L。兰金体短轴的长度即 $R_{0_{max}}$，R_0 的最大值发生在 $\cos\theta_1=-\cos\theta_2$ 时，这时 $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$。设 $R_{0_{max}}=h$，则得 $\tan\theta_1=\frac{h}{C}$。当 $z=0,R_0=h$，代入式(8-48)，即得

$$h^2=\frac{Q}{2\pi U}\left(\frac{C}{\sqrt{h^2+C^2}}+\frac{C}{\sqrt{h^2+C^2}}\right)$$

化简后得

$$h^2\sqrt{h^2+C^2}-\frac{QC}{\pi U}=0 \tag{8-51}$$

可解算兰金体短轴 h。由式(8-50)和式(8-51)消去 $\frac{Q}{\pi U}$，可得到一个关于 C 的方程式为

$$(L^2-C^2)-Lh^2\sqrt{h^2+C^2}=0 \tag{8-52}$$

当已知兰金体的长轴 L 和短轴 h 后，可以通过式(8-52)得到源和汇的位置，即 $\pm C$ 值。由式(8-52)可以看出当 $C\to 0$，$L=h$，成为绕圆球流动，源与汇变成偶极子。

8.7 线　　源

点源均匀分布在一条有限长的直线上称为线源。它也可作为基本势流流动与其他势流叠加以解决某些流动问题。单位长度线源流出的流量 q 可以看作线源的强度。图 8-9 为一由原点沿 z 轴分布长度为 L 的线源。线源中任意 $\mathrm{d}l$ 长度产生的流场在任一点 P 处的流函数为

$$\mathrm{d}\psi=\frac{q\mathrm{d}l}{4\pi}(1-\cos\alpha)$$

式中：α 为线源段 $\mathrm{d}l$ 到 P 点联线与 z 轴所成的夹角。

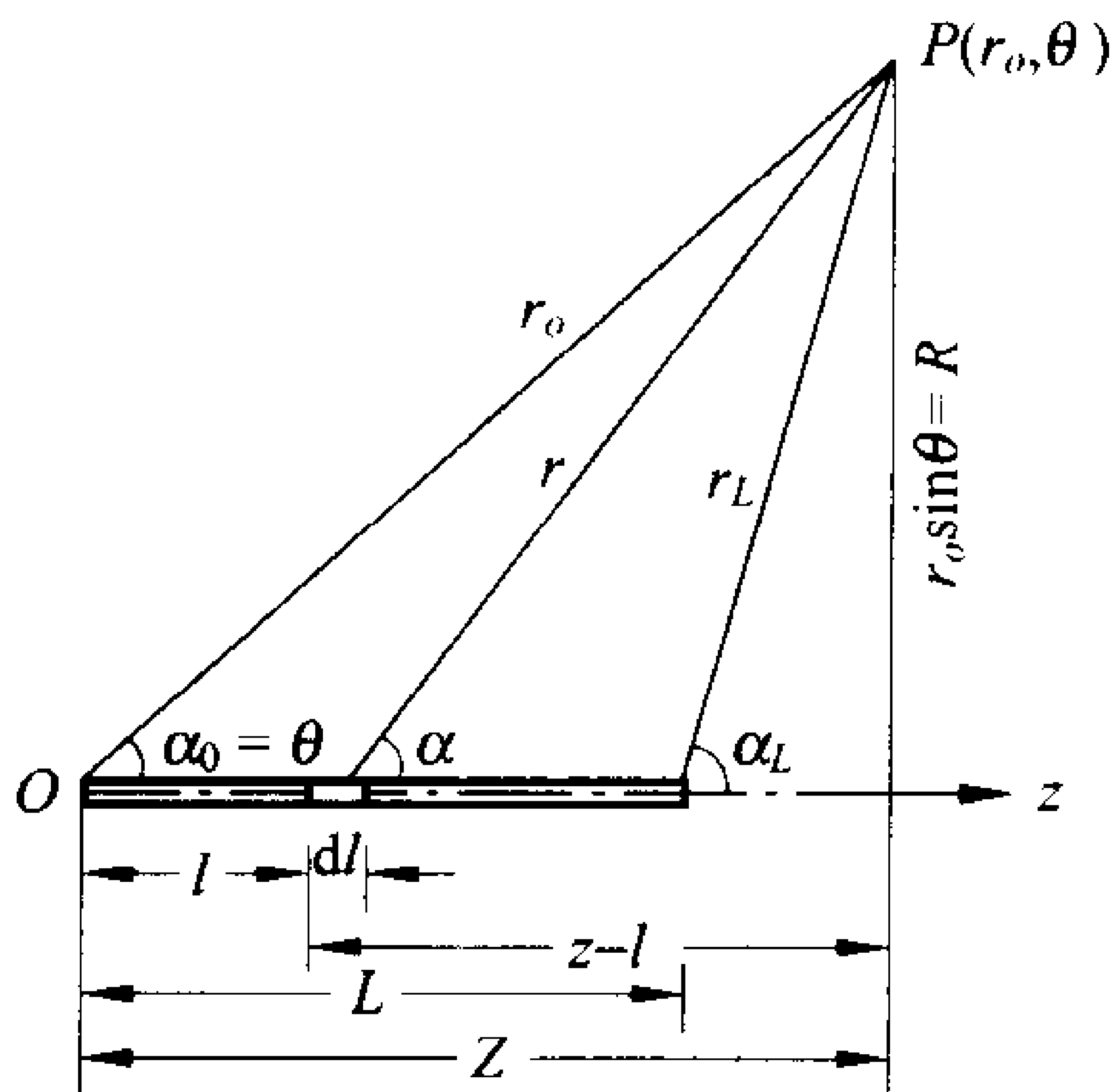


图 8-9　线源[7]

由三角关系

$$\cos\alpha=\frac{z-l}{r}=\frac{z-l}{\sqrt{R^2+(z-l)^2}}$$

由 $z=0$ 到 $z=L$ 积分 $\mathrm{d}\psi$,可得整段线源导致 P 点的流函数为

$$\begin{aligned}\psi &= \int_0^L \mathrm{d}\psi=\int_0^L \frac{q}{4\pi}(1-\cos\alpha)\mathrm{d}l \\ &=\frac{qL}{4\pi}-\frac{q}{4\pi}\int_0^L \frac{(z-l)\mathrm{d}l}{\sqrt{R^2+(z-l)^2}} \\ &=\frac{qL}{4\pi}+\frac{q}{8\pi}\int_0^L \frac{\mathrm{d}(z-l)^2}{\sqrt{R^2+(z-l)^2}} \\ &=\frac{qL}{4\pi}+\frac{q}{4\pi}\sqrt{R^2+(z-l)^2}\Big|_0^L \\ &=\frac{q}{4\pi}(L+r_L-r_0) \end{aligned} \tag{8-53}$$

例 流线型体(streamlined body)绕流为位于原点的源和从原点开始沿 z 轴布置的线汇与均匀流叠加而得。叠加后的流函数为

$$\psi=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta+\frac{Q}{4\pi}(1-\cos\theta)-\frac{q}{4\pi}(L+r_1-r)$$

当由源流出的流量 Q 与线汇吸入的流量 qL 相等时可得流线型的闭合流线如图 8-10 所示的流线型体。不同的源、汇组合可得不同的绕流物体形状。

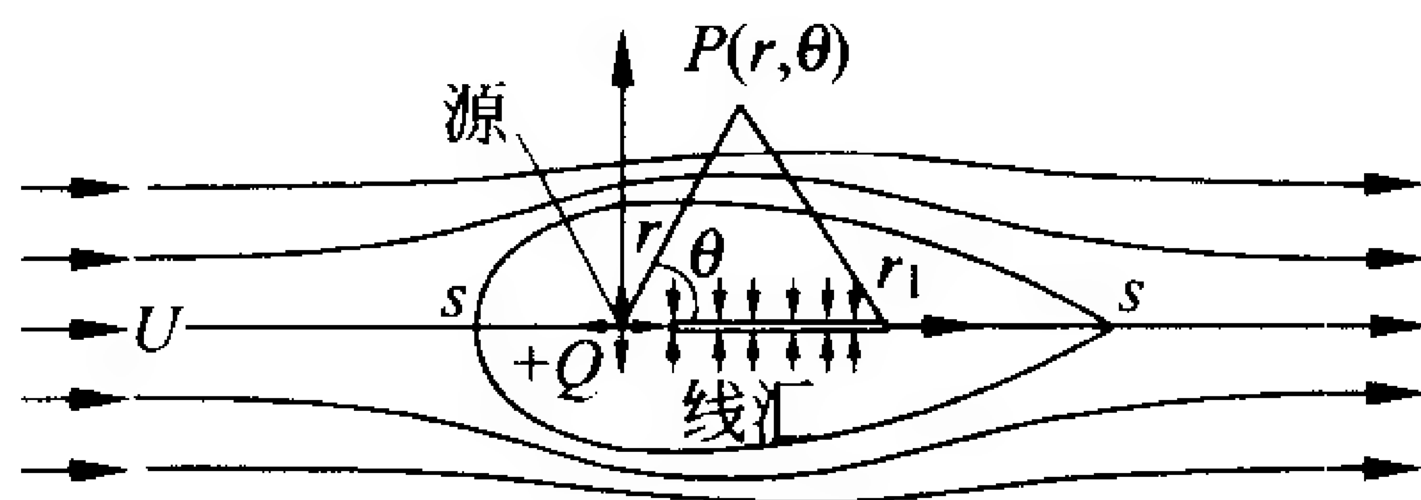


图 8-10 流线型体绕流[7]

8.8 巴特勒球定理

与平面势流运动中的圆定理类似，在三维轴对称势流运动中有巴特勒球定理(Butler's sphere theorem)。

巴特勒球定理 设在无界的不可压缩理想流体中有一轴对称势流流动，流函数为 $\psi_0(r,\theta)$，在 $r\leqslant a$ 的区域没有奇点，并且在原点处 $\psi_0(0,\theta)=o(r^2)$。如将一半径为 a 的球体放在此流动中，则球外流域中流函数为：

$$\psi(r,\theta)=\psi_0(r,\theta)+\psi_0^*(r,\theta) \tag{8-54}$$

$$\psi_0^*(r,\theta)=-\frac{r}{a}\psi_0\left(\frac{a^2}{r},\theta\right) \tag{8-55}$$

证明 ψ 必须满足的条件如下：

(1) 由 ψ 给出的流动应为有势流动。

(2) 当 $r=a$ 时，即在球面上，$\psi=\text{const}$。

(3) 当 $r\to\infty$，与 ψ_0^* 相应的速度必须趋于零，而且 ψ_0^* 不应产生通过无穷远点的球面的净流量。

(4) 在球的外部，$r>a$，ψ_0^* 没有奇点。

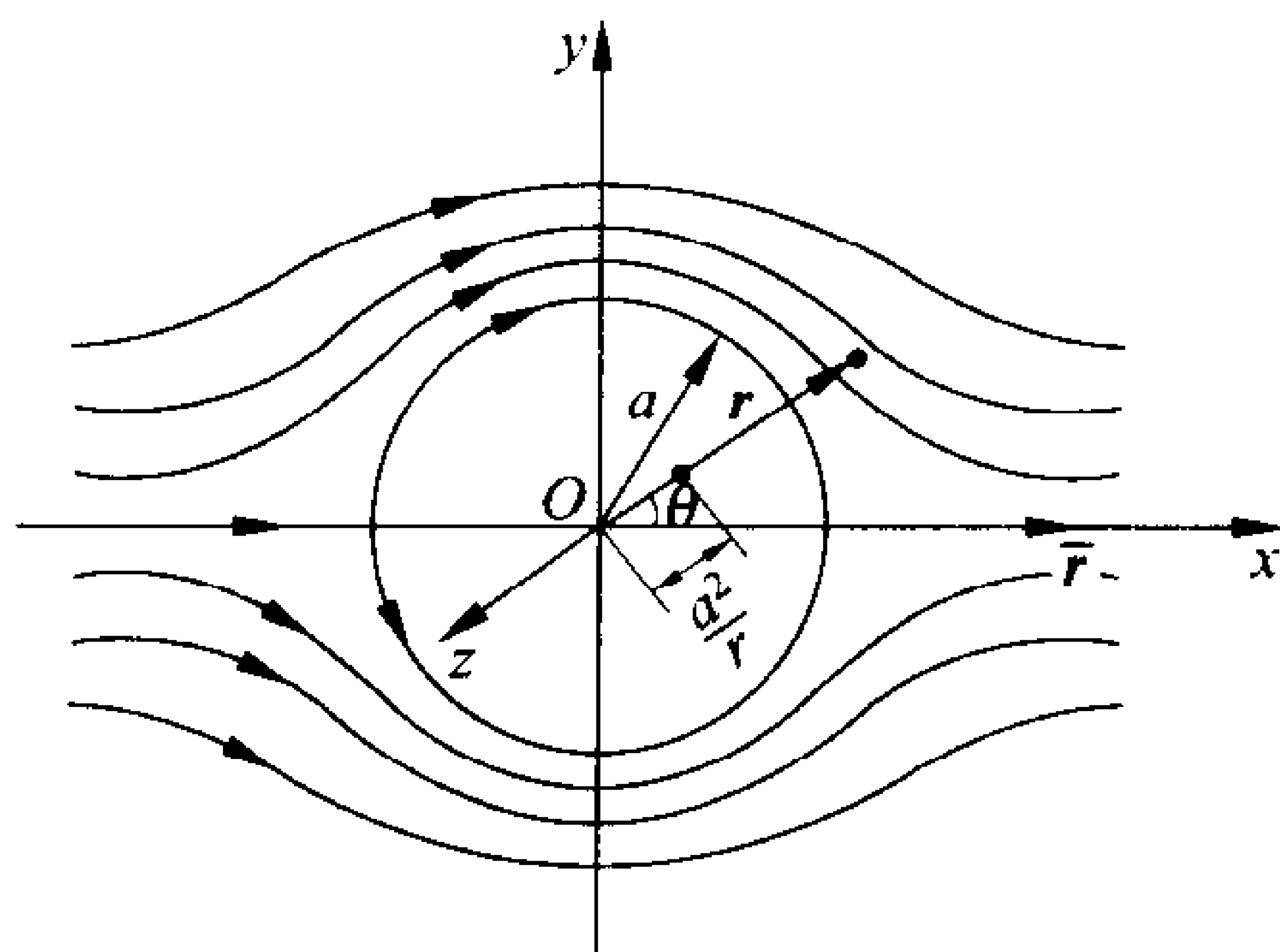


图 8-11 巴特勒球定理

首先要证明式(8-54)的 ψ 所给出的流动为有势流动，则 ψ 须满足式(8-17)，即

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}+\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=0 \tag{8-17}$$

式(8-54)的 ψ 中的第一部分 $\psi_0(r,\theta)$ 已知为有势流动，满足(8-17)式；ψ 中的第二部分 $\psi_0^*(r,\theta)$ 则需要证明。为此，令 $\rho=\frac{a^2}{r}$，则由式(8-55)知

$$\psi_0^*(r,\theta)=-\frac{r}{a}\psi_0(\rho,\theta)$$

代入式(8-17)，得

$$\begin{aligned}
&r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{1}{a}\psi_0-\frac{r}{a} \frac{\partial\psi_0}{\partial\rho} \frac{\partial\rho}{\partial r}\right]-\frac{r}{a} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\right)\\
&=r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{1}{a}\psi_0+\frac{a}{r} \frac{\partial\psi_0}{\partial\rho}\right]-\frac{r}{a} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\right)\\
&=-\frac{r^2}{a}\left(-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial\rho}+r^2\left(-\frac{a}{r^2}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial\rho}+ar\left(-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\rho^2}\\
&\quad-\frac{r}{a} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\right)\\
&=-\frac{r}{a}\left[\rho^2 \frac{\partial^2\psi_0}{\partial\rho^2}+\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\right)\right]\\
&=0
\end{aligned}$$

由此可见 ψ 中第二部分 $\psi_0^*(r,\theta)$ 同样满足势流函数所需满足的偏微分方程式(8-17)，所以 $\psi_0^*(r,\theta)$ 也代表一种势流流动。这样证明了该流动满足条件(1)。

当 $r=a$ 时，由式(8-54)和式(8-55)得

$$\psi(a,\theta)=\psi_0(a,\theta)-\psi_0(a,\theta)=0$$

说明球面上流函数为零，球面是一流面，该流动满足了条件(2)。

由给定条件，当 $r\to 0$ 时 $\psi_0(o,\theta)=o(r^2)$。当 $r\to\infty$ 时，如令

$\rho=\frac{a^2}{r}$，则 $\frac{a^2}{r}=\rho\to o$，这时 $\psi_0\left(\frac{a^2}{r},\theta\right)=\psi_0(\rho,\theta)\to\psi_0(0,\theta)$，同样有 $\psi_0(0,\theta)=o(\rho^2)=o\left(\frac{a^4}{r^2}\right)$；又 $\psi_0^*=-\frac{r}{a}\psi_0$，所以当 $\psi_0\to o\left(\frac{1}{r^2}\right)$时 $\psi_0^*\to o\left(\frac{1}{r}\right)$，而由 ψ_0^* 产生的径向流速 $u_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi_0^*}{\partial\theta}\to 0\left(\frac{1}{r^3}\right)$。通过无穷远点的球面的流量为$\int_S u_r\mathrm{d}S$，由于$\int_S\mathrm{d}S=S$为无穷远处球面面积，为 r^2 的量级，所以$\int_S u_r\mathrm{d}S\to o\left(\frac{1}{r}\right)$，即当 $r\to\infty$时此流量为零。条件(3)由此得到证明。说明 ψ_0^* 对无穷远处的流动没有影响。

因为 r 和$\frac{a^2}{r}$是对于球面 $r=a$ 的反演点，所以如果其中一点是在球外，则另一点必在球内。ψ_0 相应所有奇点均在球外，所以 ψ_0^* 相应奇点均在球内，因此条件(4)是满足的。

例 均匀流动中的球体

自左向右的均匀来流，根据式(8-25)流函数为$\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta$。如果在此均匀流动中放入半径为 a 的球面，则绕球流动的流函数可根据巴特勒球定理写为

$$\begin{aligned}\psi(r,\theta)&=\psi_0(r,\theta)-\frac{r}{a}\psi_0\left(\frac{a^2}{r},\theta\right)\\&=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta-\frac{r}{a}\left[\frac{1}{2}U\left(\frac{a^2}{r}\right)^2\sin^2\theta\right]\\&=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta-\frac{1}{2}U\frac{a^3}{r}\sin^2\theta\\&=\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\end{aligned}$$

此结果与式(8-42)完全一致。

8.9 格林定理

8.9.1 内部流动

对于任意向量 $\boldsymbol{A}$ 和标量 ϕ，有

$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot \nabla\phi + \phi \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{a}$$

如图 8-12 所示，设 V 为一由封闭曲面 S 包围的体积，曲面上微元面积 $\mathrm{d}S$ 的外法线单位向量如 $\boldsymbol{n}$，由高斯公式得

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{I-15}$$

式中的 $\boldsymbol{A}$ 以 $\phi\boldsymbol{A}$ 代替，则

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = \iint_S \phi \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{b}$$

如果 ϕ 和 ψ 为两个标量函数，而且 $\phi \in C^2(V)$，$\psi \in C^2(V)$，又 $\phi \in C^1(V+S)$，$\psi \in C^1(V+S)$，即在体积 V 以内 ϕ 和 ψ 均有二阶导数，在 V 内部及边界 S 上均有一阶导数存在，并以向量 $\nabla\psi$ 代替式(a)和(b)中的向量 $\boldsymbol{A}$，则由式(a)得

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla\psi) \mathrm{d}V = \iiint_V (\nabla\psi \cdot \nabla\phi + \phi \nabla \cdot \nabla\psi) \mathrm{d}V \tag{c}$$

由(b)式得

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla\psi) \mathrm{d}V &= \iint_S \phi \nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \\ &= \iint_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{d}$$

由式(c)及式(d)可得

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla\psi) \mathrm{d}V &= \iiint_V (\nabla\psi \cdot \nabla\phi + \phi \nabla^2 \psi) \mathrm{d}V \\ &= \iint_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{8-56}$$

式(8-56)为格林第一恒等式(Green's first identity)。

同样,将式(8-56)中的 ϕ 与 ψ 互换,得

$$\iiint_V (\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}V = \iint_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{8-57}$$

将式(8-56)减去式(8-57)则得

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}V = \iint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{8-58}$$

式(8-58)为格林第二恒等式(Green's second identity)。

如果函数 ϕ 和 ψ 均为在体积 V 内的调和函数,则在 V 内有 $\nabla^2\phi=0, \nabla^2\psi=0$,代入式(8-58)可得

$$\iint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S = \iint_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{8-59}$$

式(8-59)为格林互逆定理(Green's reciprocal theorem)。

如果 ϕ 为流速势函数,且令 $\phi=\psi$,则由式(8-57)得体积 V 内流体的动能 T 为

$$T = \frac{1}{2}\rho\iiint_V (\nabla\phi \cdot \nabla\phi)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\rho\iint_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{8-60}$$

如果 $\nabla^2\phi=0, \psi=1$ 代入式(8-58)则

$$\iint_S \frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{8-61}$$

式(8-61)为高斯积分定理(Gauss' integral theorem),对于任意调和函数都是成立的。对流速势函数 ϕ,在边界上 $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$。即边界面上的法向流速为零。

8.9.2 外部流动

现在来研究封闭曲面 S 所包围的体积 V 外面的流动。曲面 S 上任一微小面积的法线向量仍用 $\boldsymbol{n}$ 表示,$\boldsymbol{n}$ 指向 V 体积外部的流动区域。设在外部流动区域 V_0 内的固定点为 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 为一动点,则在 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\xi}$ 之间的距离为

$$r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2} \tag{8-62}$$

设 ϕ 为去除在 ξ 点围成的半径为 ε，体积为 V_ε，表面积为 S_ε 的小圆球后 V_0 内流动的流速势函数，令 $\psi=\dfrac{1}{r}$，则 ψ 在去除 V_ε 以外的 V_0 域内为调和函数（见图 8-12 所示）。对于以 V 及 V_ε 为外部区域的 (V_0-V_ε) 而言，由格林第二恒等式(8-58)可得

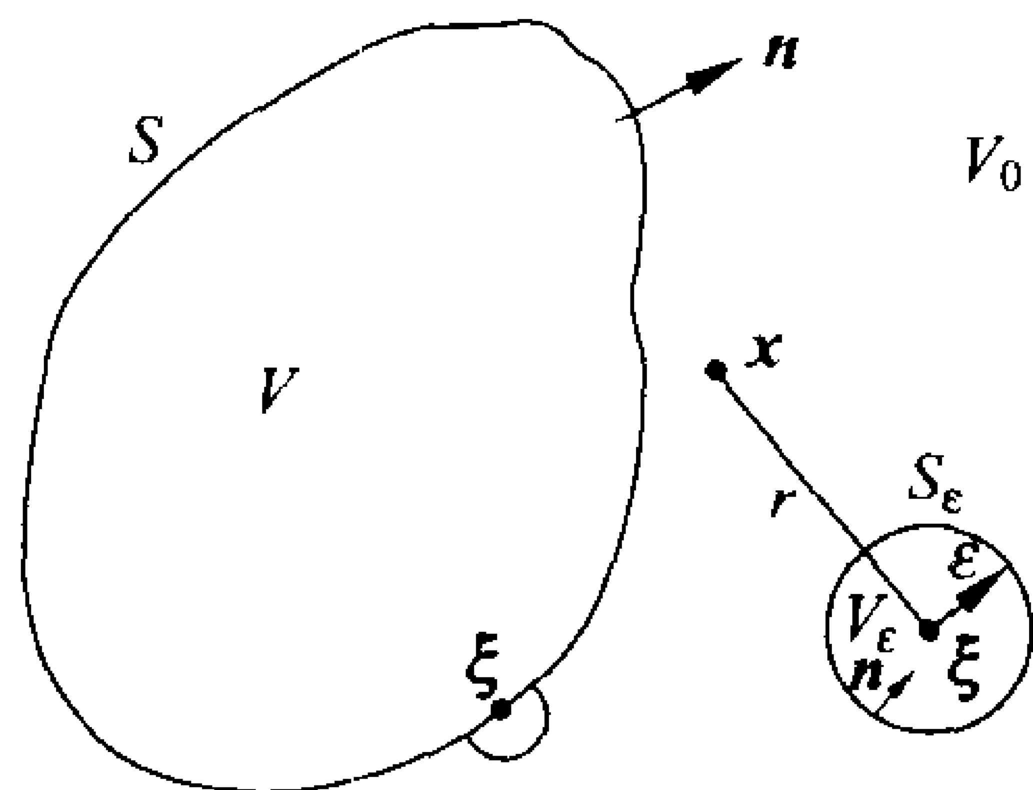


图 8-12 格林定理

$$\iiint_{V_0-V_\varepsilon}\left(\phi\nabla^2\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\nabla^2\phi\right)\mathrm{d}V$$
$$=\iint_{-S+S_\varepsilon}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{e}$$

式中 S 前面的负号表示对 V_0 而言 $\boldsymbol{n}$ 视为内法线方向。式(e)等号的左侧为零，因为 ϕ 与 $\psi=\dfrac{1}{r}$ 均为调和函数，所以得

$$\iint_{S_\varepsilon}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S=\iint_{S}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{f}$$

对于以 ξ 为球心的圆球面 S_ε 而言，$\dfrac{\partial}{\partial n}=-\dfrac{\partial}{\partial r}$，所以当 $\varepsilon\to 0$ 时，则

$$\iint_{S_\varepsilon}\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S=-\iint_{S_\varepsilon}\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S$$
$$=\iint_{S_\varepsilon}\phi\frac{1}{r^2}r^2\mathrm{d}\Omega$$
$$=\iint_{S_\varepsilon}\phi\,\mathrm{d}\Omega$$
$$=4\pi\phi(\xi) \tag{g}$$

式中：$\mathrm{d}S=r^2\mathrm{d}\Omega$，$\Omega$ 为球面的立体角(solid angle)；$\iint_{S_\varepsilon}\mathrm{d}\Omega=4\pi$。

对于 ξ 处的小圆球 $r=\varepsilon$,所以式(f)等号的左侧第二项可写为

$$\iint_{S_\varepsilon} -\frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial n}\ \mathrm{d}S=-\iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial n}r^2\mathrm{d}\Omega$$

$$=-\iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial n}\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega$$

当 $\varepsilon\to0$ 时,而$\frac{\partial\phi}{\partial n}$为有限值,$\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial n}\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega=0$,所以

$$\iint_{S_\varepsilon} -\frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial n}\ \mathrm{d}S=0 \tag{h}$$

把式(g)和式(h)代入式(f)可得

$$\iint_S \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S=4\pi\phi(\xi) \tag{8-63}$$

或写为

$$\phi(\xi)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{8-64}$$

式(8-64)说明 V_0 域内一点 ξ 的流速势函数 $\phi(\xi)$ 可以用边界 S 面上流速势的值和其法向导数的值来表示。或者说可用布置在边界上的分布奇点便可描述域内的势流流动。式(8-64)为格林第三恒等式(Green's third identity)。

如果 ξ 是封闭曲面 S 以内体积 V 中的一点,而 ϕ 与 $\psi=\frac{1}{r}$ 均是在 S 以外的 V_0 流域中的调和函数 $\nabla^2\phi=0$,$\nabla^2\psi=0$,因此由式(8-58)可得

$$\iint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iint_S \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S=0 \tag{8-65}$$

而当 ξ 位于封闭曲面 S 上时,可在 ξ 点取半球面 S_ε,这个半球面在封闭曲面 S 的外部 V_0 域内,如图8-12所示。对于半球面有 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\iint_{S_\varepsilon}\phi\,\mathrm{d}\Omega=2\pi\phi(\xi)$。所以得

$$\iint_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S = 2\pi\phi(\xi) \tag{8-66}$$

综合以上所述，有

$$\left.\begin{matrix} 4\pi \\ 0 \\ 2\pi \end{matrix}\right\} \phi(\xi) = \iint_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S \quad \left.\begin{matrix} \xi \text{在} S \text{以外} \\ \xi \text{在} S \text{以内} \\ \xi \text{在} S \text{上} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (8\text{-}64) \\ (8\text{-}65) \\ (8\text{-}66) \end{matrix}$$

当 ϕ 为封闭曲面 S 外部的调和函数，ξ 是 S 外的一点时，由式(8-64)得

$$\phi(\xi) = \iint_S \left[-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial \phi}{\partial n} + \phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right] \mathrm{d}S \tag{i}$$

应用解析延拓(analytical continuation)原理，将速度势函数 ϕ 延拓至 S 面内部，得 ϕ' 仍为调和函数。由于 ξ 在 S 外，所以由式(8-65)有

$$0 = \iint_S \left[-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial \phi'}{\partial n} + \phi' \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right] \mathrm{d}S \tag{j}$$

将式(i)－式(j)，得

$$\phi(\xi) = \iint_S \left[-\frac{1}{4\pi r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi'}{\partial n}\right) + (\phi - \phi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right] \mathrm{d}S \tag{8-67}$$

如果在曲面 S 上 $\phi = \phi'$，则

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \iint_S \left[-\frac{1}{4\pi r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi'}{\partial n}\right) + (\phi - \phi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right] \mathrm{d}S \\ &= -\iint_S \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi'}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \\ &= -\iint_S \frac{Q}{4\pi r} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{8-68}$$

式中：

$$Q = \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi'}{\partial n}$$

式(8-68)表示 $\phi(\xi)$ 是由 S 面上分布的强度为 Q 的“源”给出的。

由 $\phi=\phi'$ 可见流速势在边界面上连续，而流速势在法线方向的一阶导数则并不连续，即 $\frac{\partial\phi}{\partial n}\neq\frac{\partial\phi'}{\partial n}$，而有一个跳跃，其值为 $\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\phi'}{\partial n}=Q$，或写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=Q+\frac{\partial\phi'}{\partial n} \tag{8-69}$$

如果在曲面 S 上 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 连续，即 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial\phi'}{\partial n}$，则由(8-67)式得

$$\begin{aligned}\phi(\xi)&=\iint_S\left[-\frac{1}{4\pi r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\phi'}{\partial n}\right)+(\phi-\phi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right]\mathrm{d}S\\&=\iint_S(\phi-\phi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\mathrm{d}S\\&=\iint_S\mu\,\frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8-70}$$

这时 $\phi(\xi)$ 是由 S 面上分布的强度为 μ 的偶极子给出的，偶极子的方向为边界曲面的法线方向，$\mu=\phi'-\phi$。由此可见跨越一个偶极的分布面 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 是连续的，但流速势则有一个 μ 的跳跃，并不连续。

8.10 达朗贝尔疑题

本节将证明理想流体的均匀流动中任意形状三维物体所受到的流体作用力为零。事实上，由于真实流体具有粘性，特别是物体表面的薄层流体中粘性作用是不能忽略的，这一薄层流体运动称为边界层。边界层中的流体将有切应力作用于物体壁面，并且由于边界层的分离而产生绕流物体尾部的低压尾流区，从而形成压差阻力或称形状阻力(form drag)，因此绕流物体没有流体作用力这一结论是与实际流动不相符合的，故称之为“达朗贝尔疑题”。这一结论的得出是忽略流体粘性的结果，现证明如下：

在 8.5 节中已证明均匀势流中绕圆球的流动作用于球面上的

合力为零。现在来考虑更一般的情形,即一任意形状物体的绕流,如图 8-13 所示。物体重心位于坐标原点上,静止物体的表面为 S_b,表面上单位法线向量为 $\boldsymbol{n}$。

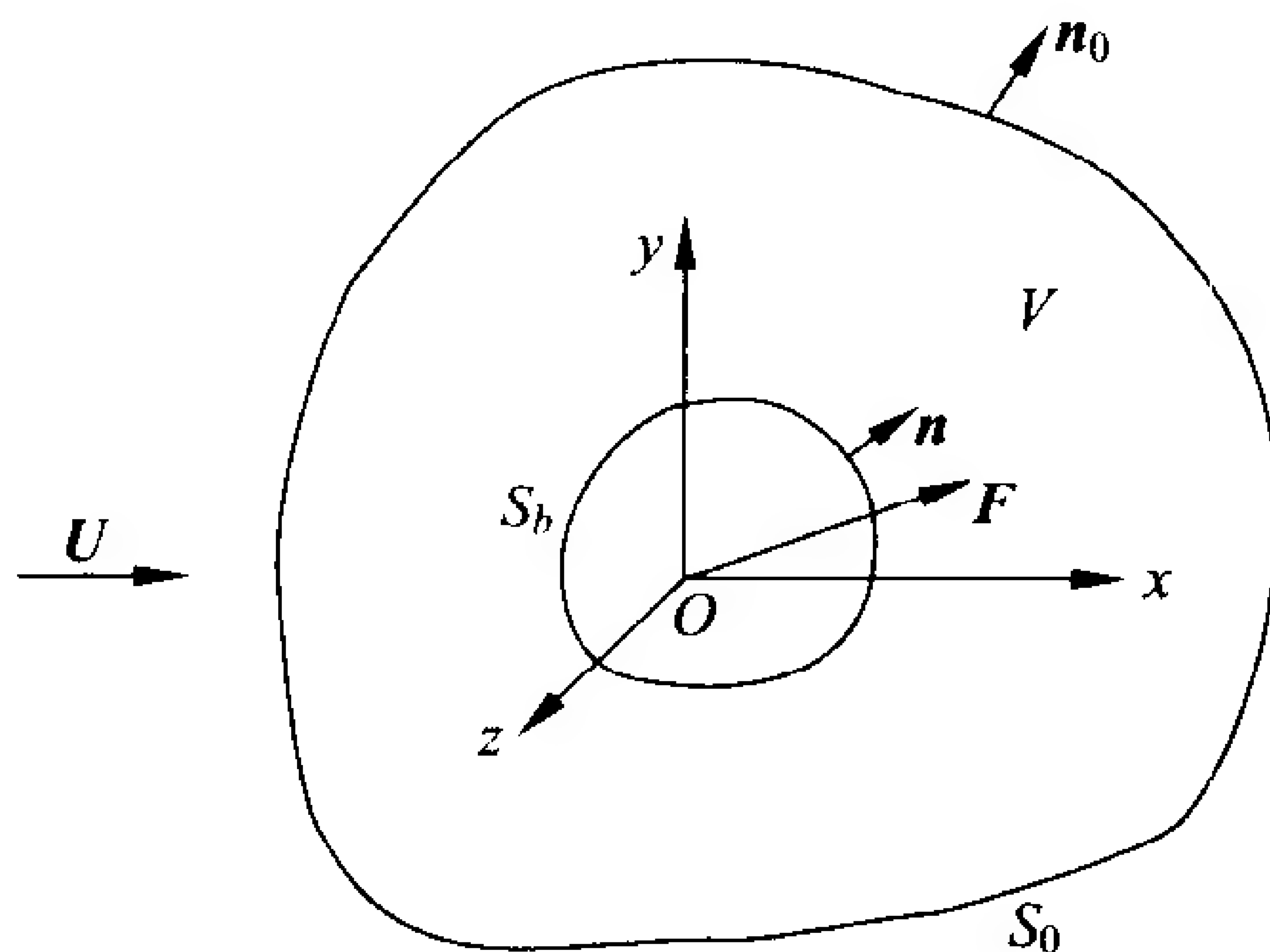


图 8-13　绕任意形状物体的势流

无界流场中有一恒定均匀来流,流速为 $\boldsymbol{U}$,坐标的选取使 x 轴与 $\boldsymbol{U}$ 平行。在绕流物体外部取任意边界 S_0 为控制面,S_0 上任意单位法线向量为 $\boldsymbol{n}_0$。以物体表面 S_b 与 S_0 之间的流体为隔离体 V,应用动量方程,设在此流域内没有奇点存在。物体受到流体的作用力为 $\boldsymbol{D}$,则物体对流体的反作用力即流体受到物体的阻力为 $-\boldsymbol{D}$,参考式(2-14)可得

$$\boldsymbol{D} = -\iint_{S_b} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

式中:$\pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j$ 为动量通量张量。因此

$$\boldsymbol{D} = -\iint_{S_b} [p\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})] \mathrm{d}S \qquad (8\text{-}71)$$

设物体壁面 S_b 为不透水边界,因此在 S_b 上 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$,所以

$$\boldsymbol{D} = -\int_{S_b} p\boldsymbol{n} \mathrm{d}S \qquad (8\text{-}72)$$

由于在 S_b 与 S_0 之间的隔离体 V 内没有奇点存在,式(8-71)可以写为

$$\boldsymbol{D}=-\iint_{S_0}[p\boldsymbol{n}_0+\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_0)]\mathrm{d}S \tag{8-73}$$

对于恒定无涡流动，应用伯努利方程式(2-98)，即

$$p+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=C \tag{2-98}$$

式中伯努利常数 C 在整个流场中为常数，因此对于任意封闭曲面有

$$\iint_{S_0}C\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S-C\iint_{S_0}\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=0$$

于是式(8-73)可以写为

$$\boldsymbol{D}=\rho\iint_{S_0}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_0-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_0)\right]\mathrm{d}S \tag{8-74}$$

令 S_0 面趋于无穷，也就是说 S_0 趋于球面而其半径 $r\rightarrow\infty$。流场中的流速势应该是均匀来流 ϕ_1 和由于绕流物体所引起的流速势变化值 ϕ_2 之和，即 $\phi=\phi_1+\phi_2$。

均匀流动流速势 ϕ_1 为

$$\phi_1=Ux \tag{8-22}$$

由绕流物体而产生的流速势 ϕ_2 可由式(8-18)得到

$$\phi_2=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \tag{8-18}$$

由于在 $r\rightarrow\infty$时，绕流物体对流场的影响应趋于零，因此式(8-18)中 $A_l r^l$ 项中除 A_0 外其他各项均不存在，得

$$\begin{aligned}\phi_2&=A_0+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}\\&=A_0+\frac{B_0}{r}+\frac{B_1\cos\theta}{r^2}+o\left(\frac{1}{r^3}\right)\end{aligned} \tag{8-75}$$

由于高斯积分定理式(8-61)为$\iint_{\sum S}\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S=0$，又物体表面为封闭的不透水界面，因此$\iint_{S_0}\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\mathrm{d}S=0$。而$\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=-\frac{B_0}{r^2}+o\left(\frac{1}{r^3}\right)$，所以

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \phi_2}{\partial n}\mathrm{d}S = \iint_{S_0}\left[-\frac{B_0}{r^2}+o\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}S = 4\pi B_0 + o\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$，B_0 必须为零。则

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = Ux + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{8-76}$$

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi = U\boldsymbol{e}_x + o\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{8-77}$$

代入式(8-74)得

$$\boldsymbol{D} = \rho\iint_{S_0}\left[\frac{1}{2}U^2\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}_0) + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}S = 0 \tag{8-78}$$

式中：第一项 $\iint_{S_0}\frac{1}{2}U^2\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$ 由于对于封闭曲面 $\iint_{S_0}\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S = 0$，乘以常数 $\frac{1}{2}U^2$ 后仍为零；第二项由于 $\iint_{S_0}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$ 是常数向量点积 $\iint_{S_0}\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$ 应为零；第三项由于 $\iint_{S_0}\mathrm{d}S = o(r^2)$ 所以 $\iint_{S_0} o\left(\frac{1}{r^3}\right)\mathrm{d}S = o\left(\frac{1}{r}\right)$，当 $r\to\infty$，此项也为零。

8.11 附加质量

在图 8-13 任意形状物体的外部流动中，如取边界上单位法线向量为 $\boldsymbol{n}$，则整个流动区域 V 内流体的动能可由式(8-60)知

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\rho\iiint_V(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\rho\iint_{\sum S}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S \qquad (8\text{-}60) \\ &= \frac{1}{2}\rho\iint_{S_0}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\rho\iint_{S_b}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S \qquad (\mathrm{a}) \end{aligned}$$

因为对于 S_b，流动的外法线向量为 $-\boldsymbol{n}$。对于在无穷远处为均匀

流速 $\boldsymbol{U}$ 的无界流动($S_0\to\infty$),所具有的动能是无限的。现在来考虑原处于静止的流体中一物体以速度 $\boldsymbol{U}$ 运动并以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动而产生的流场。这个流场必定是无涡的,并且没有环量。这样的运动中物体表面的流体压力是有限量,为了产生给定物体的运动,只需有限的能量,并且这些能量须在物体和流体之间分配,流体的动能是有限的。物体重心位于坐标原点上,流场 V 中的流速势函数为 ϕ,在整个域内 $\nabla^2\phi=0$,运动的物体对无穷远处的影响应趋于零,即在无穷远处 $\boldsymbol{u}=\nabla\phi=0$,流体仍保持静止状态。由式(8-75)得

$$\phi = A_0 + \frac{B_0}{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{8-79}$$

假设在 V 内没有源,则 $B_0=0$。$\lim\limits_{r\to\infty}\phi=A_0$。由连续方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$,有

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = 0$$

所以

$$\iint_{S_0}\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S - \iint_{S_b}\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$$

式中:$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$。$A_0$ 为常数,以 $\frac{1}{2}\rho A_0$ 乘上式得

$$\frac{1}{2}\rho\iint_{S_0}A_0\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\rho\iint_{S_b}A_0\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{b}$$

(a)-(b)得

$$T = \frac{1}{2}\rho\iint_{S_0}(\phi-A_0)\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\rho\iint_{S_b}(\phi-A_0)\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

当 $S_0\to\infty$,即 $r\to\infty$,$(\phi-A_0)=0$,$\frac{\partial\phi}{\partial n}=o\left(\frac{1}{r^3}\right)$ 而 $\iint_{S_0}\mathrm{d}S = o(r^2)$,因此上式等号右侧第一项为零。从而得

$$T = -\frac{1}{2}\rho\iint_{S_b}(\phi-A_0)\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

由于 S_b 是物体的封闭壁面，其中没有净的“源”存在，因此 $\iint_{S_b}\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S=0$，乘以常数 A_0 后仍为零，即 $\iint_{S_b}A_0\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S=0$。这时虽然流场仍是无限流场，但全部流体的动能却为有限量。因此

$$T=-\frac{1}{2}\rho\iint_{S_b}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{c}$$

在物体表面 S_b 上，某一点的法线速度，也就是该点处流体质点在物体表面法线方向应有的流速，完全取决于物体重心（或某一固定点）的速度和其转动角速度。使物体重心位于坐标系原点上，于是

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}) \tag{d}$$

展开写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial n}&=U_xn_x+U_yn_y+U_zn_z+(\omega_yz-\omega_zy)n_x+(\omega_zx-\omega_xz)n_y\\&\quad+(\omega_xy-\omega_yx)n_z\\&=U_xn_x+U_yn_y+U_zn_z+\omega_x(yn_z-zn_y)+\omega_y(zn_x-xn_z)\\&\quad+\omega_z(xn_y-yn_x)\end{aligned} \tag{e}$$

由于是线性问题，可假设

$$\phi=U_\alpha\phi_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{b}U_\alpha\phi_\alpha \tag{f}$$

U_α 可能是时间 t 的函数，但不是 (x,y,z) 的函数，设 $U_1=U_x$，$U_2=U_y$，$U_3=U_z$，$U_4=\omega_x$，$U_5=\omega_y$，$U_6=\omega_z$，所以 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=U_\alpha\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n}$。

ϕ_α 为调和函数，在整个流场内有

$$\nabla^2\phi_\alpha=0\qquad\alpha=1,2,3,4,5,6 \tag{g}$$

在无穷远处的边界条件为

$$\lim_{r\to\infty}|\nabla\phi_\alpha|=0 \tag{h}$$

在物体表面 S_b 上，令 $\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=n_x$，$\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=n_y$，$\frac{\partial\phi_3}{\partial n}=n_z$，$\frac{\partial\phi_4}{\partial n}=yn_z-zn_y$，

$\frac{\partial\phi_5}{\partial n}=zn_x-xn_z,\frac{\partial\phi_6}{\partial n}=xn_y-yn_x$，于是

$$2T=-\rho\iint_{S_b}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$
$$=-\rho\iint_{S_b}(U_1\phi_1+U_2\phi_2+\cdots+U_6\phi_6)\left(U_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}+U_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}+\cdots+U_6\frac{\partial\phi_6}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

可写为

$$2T=\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta\qquad(\alpha,\beta=1,2,3,4,5,6)\tag{8-80}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}=-\rho\iint_{S_b}\phi_\alpha\frac{\partial\phi_\beta}{\partial n}\mathrm{d}S\tag{8-81}$$

ϕ_α 和 ϕ_β 在 V 域内均为正则调和函数(regular harmonic function)，应用格林互逆定理式(8-59)上式等号的右侧可写为

$$\iint_{S_b}\phi_\alpha\frac{\partial\phi_\beta}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint_{S_b}\phi_\beta\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n}\mathrm{d}S\tag{8-59}$$

因此

$$\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}=\boldsymbol{A}_{\beta\alpha}\tag{8-82}$$

$\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$称为附加质量张量(added mass tensor)，为对称张量。共有 36 个分量，由于对称，独立分量有 21 个。

如当 U_α 和 U_β 中只有 U_1 时，即 $\alpha=\beta=1$，由式(8-80)和式(8-81)得

$$T=\frac{1}{2}A_{11}U_1^2$$

$$A_{11}=-\rho\iint_{S_b}\phi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\mathrm{d}S\tag{8-83}$$

由此说明：一个物体在原系静止的流体中运动时，必将导致一定范围内的流体也相应流动，而整个流场中流体所具有的动能等同于质量为 A_{11} 的流体像物体一样以 U_1 速度运动而具有的动能。

也可以说像质量为 A_{11} 的流体附着在物体上以同一速度一起运动，所以称 $A_{\alpha\beta}$ 为附加质量，也称视质量(apparent mass)。它是物体的一个最重要的水动力特征。

在物体表面 S_b 上有

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=U_\alpha\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n}$$
$$=U_1n_1+U_2n_2+U_3n_3+U_4(yn_3-zn_2)$$
$$+U_5(zn_1-xn_3)+U_6(xn_2-yn_1)$$

式中：$n_1=n_x, n_2=n_y, n_3=n_z$。如果设

$$(n_4,n_5,n_6)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ x & y & z\\ n_1 & n_2 & n_3\end{vmatrix}$$

由此可将$\frac{\partial\phi}{\partial n}$写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=U_\alpha\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n}=U_\alpha n_\alpha \qquad \alpha=1,2,3,4,5,6$$

$$\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n}=n_\alpha$$

因此附加质量张量可写为

$$A_{\alpha\beta}=-\rho\iint_{S_b}\phi_\alpha n_\beta \mathrm{d}S \tag{8-84}$$

附加质量只与物体的形状和方位有关而与其运动速度、角速度或加速度无关。因为对于任意形状物体，速度势 ϕ_α 只与物体的形状和方位有关。一般情况下附加质量有三个主轴(principal axis)，轴对称物体有两个主轴而球体则只有一个主轴。

例 圆球的附加质量

静止无界理想流体中一个半径为 a 的圆球以速度 $\boldsymbol{U}$ 运动，这时所产生的流动，可以由无穷远均匀来流绕圆球流动叠加一反方向同等流速的均匀流动而得到。这时无穷远处流速仍保持为零。

流速势 ϕ 为

$$\phi = U\left(r + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta - Ur\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}U\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

$$= U_1\phi_1$$

由上式得 $U_1 = U, \phi_1 = \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$。由式(8-81)得附加质量 M' 为

$$M' = A_{11} = -\rho\iint_{S_b}\phi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$= -\rho\iint_{S_b}\left(\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta\right)\left(-\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\right)\mathrm{d}S$$

$$= \rho\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{2\pi}\cos^2\theta a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3\rho \tag{8-85}$$

相当于圆球排开流体体积的一半。附加质量 M' 可以加到圆球本身的质量 M 上去，作为总的质量 $(M + M')$ 应用到动力学方程中，即

$$\boldsymbol{F} = (M + M')\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} \tag{8-86}$$

式中：$\boldsymbol{F}$ 为圆球上的作用力。

式(8-86)对于其他形状物体当然也是适用的。

第9章

明槽水流运动

液体在渠槽中的流动，由于具有暴露于大气中的自由表面而称为明槽水流运动(open channel flow)(简称为明槽流动)。天然河道中的水流和人工渠道、水工建筑物如涵管、渡槽、溢洪道等中的水流均属明槽流动，因此明槽流动是自然界和人类生活中最常见的一种流动。

明槽流动的自由表面上作用着大气压力，由于没有固体壁面的约束而可以根据流动状况而自由变动，这个自由边界在很多水流情况下是待求的因素，这是求解明槽流动问题中一个困难的因素。明槽槽身的固体壁面又因其形状和构成的多样性，也使得明槽流动复杂多变。

明槽流动中作用于水流的外力除壁面阻力以外，主要是重力。具有封闭固体壁面的管道水流，其重力作用通常表现为压强的变化而明槽水流中的重力作用通常表现为自由表面的高程变化。

由于生产实践和人类生活的需要，对明槽水流的研究和认识具有悠久的历史。本章中着重阐述明槽流动的基本原理和方程。明槽水流根据其各种流动要素如流速、水深等随时间的变化与否而分为恒定流与非恒定流；根据其各种流动要素在空间上的分布而分为均匀流和非均匀流。非均匀流中根据各种流动要素在空间上变化的缓急而分为渐变流和急变流。明槽水流中同样存在不同

的流动型态——层流与紊流，但是由于实际问题中明槽流动的雷诺数很大，因此明槽水流多为紊流。明槽紊流的内容读者可参阅粘性流体力学有关书籍。明槽水流中的主要作用力为重力，因此弗劳德数 Fr 为明槽水流中一个最重要的相似准数，由 Fr 数作为数据，明槽水流的流态可以分为缓流、急流和临界流。不同的流态使得明槽水流千变万化、丰富多彩。

明槽水流的理论应用广泛，本章中不能尽述，读者可参阅有关工程水力学的大量论著。

9.1 明槽水流运动的基本方程

9.1.1 简述

明槽流动中水流的边界除自由表面外均由固体壁面所构成。一般情况下固体壁面分为底面和两个侧面，统称河(渠)床。固体河床形状多样，如图 9-1 所示的河床为一些典型床面。由于水流与固体壁面之间的无滑移条件，因此在明槽底面和两个侧面，流速均由壁面处为零向内法线方向逐渐增大。因此明槽中流速并非均匀分布而是一个三维流速分布。图 9-1 中还画出了各种明槽水流中断面上的等流速线。断面最大流速一般发生在自由表面以下 5%～25%水深处。

一般情况下明槽中使水发生流动的主要作用力是重力，特别是重力在流动方向的分力，而这个分力的大小则取决于明槽底面的坡度，底坡在明槽流动中自然具有了重要的意义。阻滞水流运动的力是水流与固体壁面间的阻力。重力是质量力，它作用于每一流体质点上，而阻力则是面积力。阻力与明槽的形状、流量、底坡、槽壁粗糙度等诸多因素有关。在明槽流动中压强不是一个重要的因素，因为自由表面上作用着的大气压力在沿流程各断面处

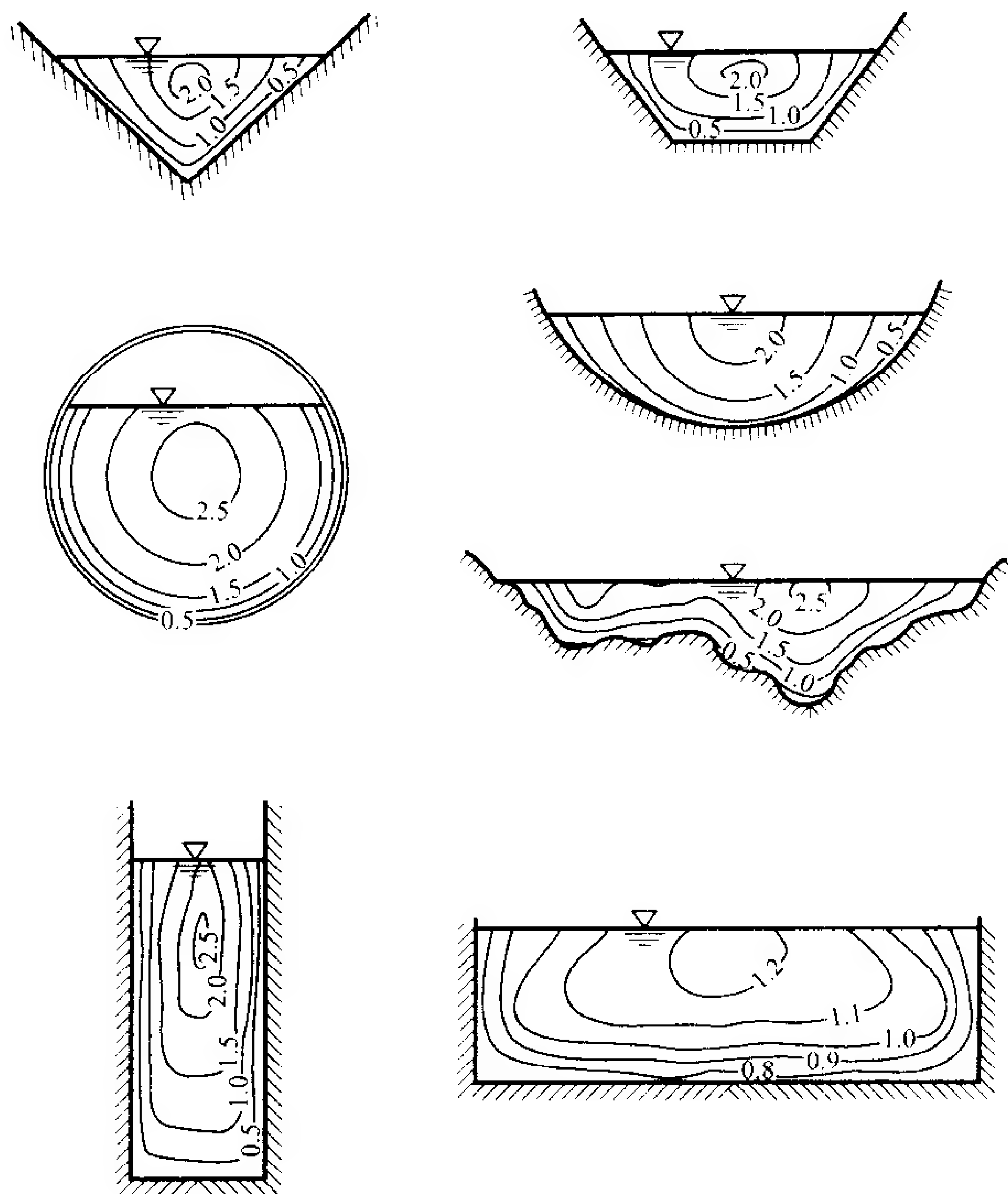


图 9-1 明槽流动[4]

均为一个常量,相对压强为零,因此明槽流动也称为无压流动。这一点与四周均被固体壁面约束的管道水流的情况完全不同。

9.1.2 明槽水流运动的微分方程式

对于明槽流动,连续方程与纳维-斯托克斯方程(简称 N-S 方程)仍然是基本的微分方程式。即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (1\text{-}17)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{2-40}$$

1. 不可压缩粘性流体在二维无界流场内的流动

如果体积力只考虑重力，如图 9-2 所示的无界流场中一点 P 处，单位体积流体的受力 ρf 只有铅垂向的重力 ρg。平面坐标选用 xOz。O'-O' 为水准线。

$$\rho \boldsymbol{f} = \boldsymbol{i}\rho g \sin\alpha - \boldsymbol{k}\rho g \cos\alpha \tag{9-1}$$

α 为 Ox 轴与 O'-O' 间的夹角。坐标原点 O 的高程为 h_0，P 点高程为 h，即

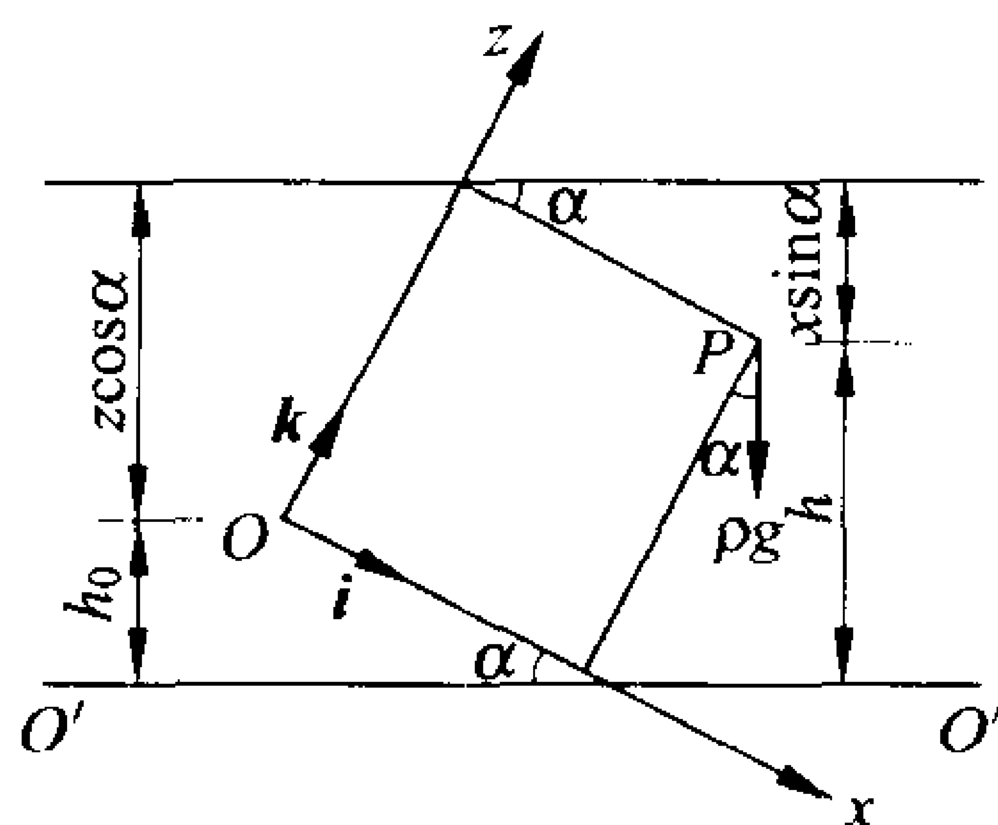


图 9-2 无界流场中的流动

$$h = h_0 + z\cos\alpha - x\sin\alpha \tag{9-2}$$

式(9-2)中各项乘以 ρg，得

$$\rho g h = \rho g h_0 + \rho g z \cos\alpha - \rho g x \sin\alpha \tag{9-3}$$

$(\rho g h)$ 为一标量函数，取其梯度为

$$\mathrm{grad}(\rho g h) = -\boldsymbol{i}\rho g \sin\alpha + \boldsymbol{k}\rho g \cos\alpha \tag{9-4}$$

比较式(9-1)与式(9-4)，得

$$\rho \boldsymbol{f} = -\mathrm{grad}(\rho g h) \tag{9-5}$$

可见 $(\rho g h)$ 为力势函数。重力为有势力(potential force)。

$$\left.\begin{aligned} \rho f_x &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho g h) \\ \rho f_z &= -\frac{\partial}{\partial z}(\rho g h) \end{aligned}\right\} \tag{9-6}$$

将式(9-6)代入式(2-40)中，从而得到体积力为重力，不可压缩流体二维流动的纳维-斯托克斯方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -g\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9-7}$$

式中：u,w 为 x 及 z 方向的流速。

式(9-7)写为一般的分量方程式为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-g\frac{\partial h}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} \tag{9-8}$$

式中：u_i 分别表示 u 和 w。

2. 纳维-斯托克斯方程中的压强项改变为流体动压强

设流动中的压强由两部分压强组成：流体静压强 p_s 及流体动压强 p_d。即

$$p=p_s+p_d$$

由流体静力学可知，如图 9-3 所示，流场中某点 A 的流体静压强 p_s 满足下式：

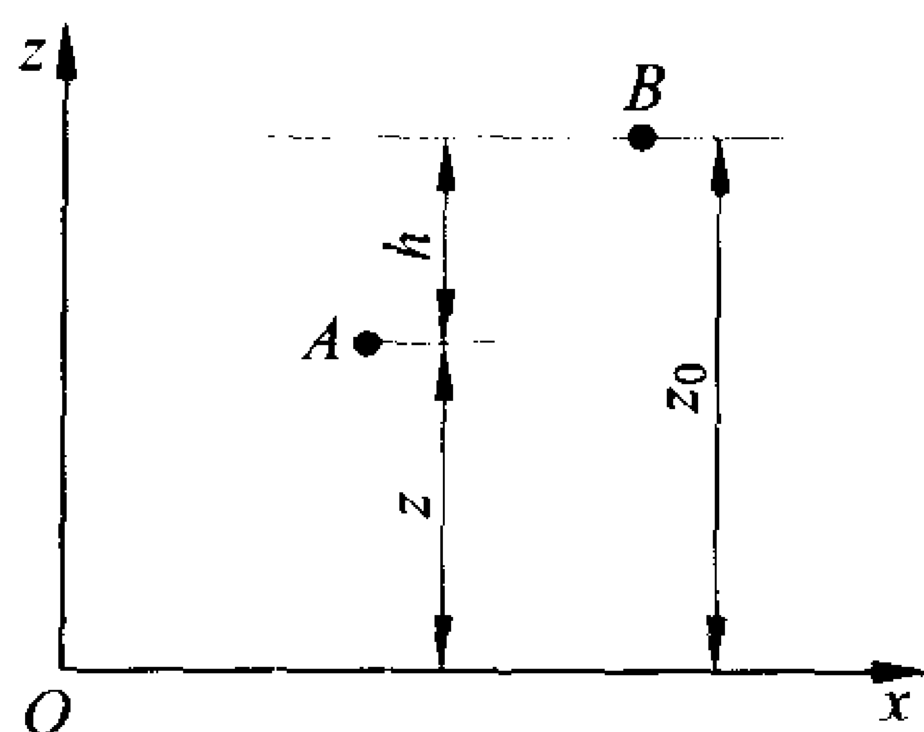


图 9-3 流场中 A 点静压强示意图

$$p_s+\rho gz=\text{const} \tag{3-16}$$

设一参考点 B 处静压强为 p_0，其垂直坐标位置 $z=z_0$，于是

$$p_0+\rho gz_0=p_s+\rho gz=C$$

$$\begin{aligned}p_s&=C-\rho gz\\&=p_0+\rho gz_0-\rho gz\\&=p_0+\gamma h\end{aligned} \tag{3-18}$$

式中 $h=z_0-z$。由式(9-5)和式(9-2)可得单位体积力为

$$\rho f=-\text{grad}(\rho gh)=-\rho g\,\nabla(h_0+z\cos\alpha-x\sin\alpha)$$

本节中取 z 为铅垂方向，所以 $\alpha=0$，上式可写为

$$\rho f=-\rho g\,\nabla(h_0+z)=-\rho g\,\nabla z=-\nabla(\rho gz) \tag{9-9}$$

N-S 方程中压强梯度项为

$$\nabla p=\nabla(p_a+p_s)=\nabla[p_d+(C-\rho gz)]=\nabla p_d-\nabla(\rho gz) \tag{9-10}$$

将式(9-9)、式(9-10)代入 N-S 方程式(2-40)，得

$$-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla(gz)-\frac{1}{\rho}\nabla p_d+\frac{1}{\rho}\nabla(\rho gz)+\frac{1}{\rho}\mu\,\nabla^2\boldsymbol{u}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\nabla p_{\mathrm{d}}+\nu\nabla^{2}\boldsymbol{u} \tag{9-11}$$

从而在 N-S 方程中重力项在形式上不再出现。

3. 明槽水流纳维-斯托克斯方程

明槽水流是具有自由表面的水流运动。自由表面上作用有大气压强 p_a，假设 $p_a=0$，即考虑相对压强。如图 9-4 所示，H 为水深，z_0 为槽底高程，$H+z_0$ 为水面高程。水中一点 P，坐标为 (x,z)，P 点上的静水压强为

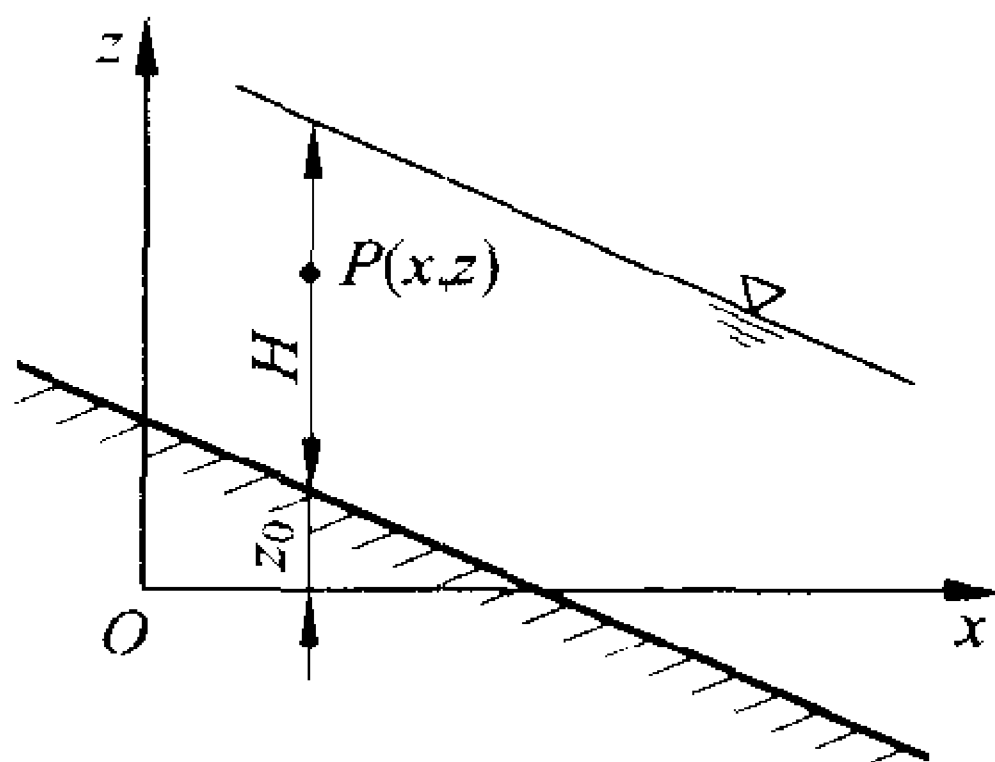


图 9-4 明槽水流中点压强示意图

$$p_s=\rho g[(H+z_0)-z]$$

动水压强为

$$p_d=p-\rho g[(H+z_0)-z]$$

全压强为

$$p=p_d+p_s=p_d+\rho g[(H+z_0)-z] \tag{9-12}$$

将式(9-9)，式(9-12)代入 N-S 方程式(2-40)，得

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla(\rho g z)-\nabla[p_d+\rho g(H+z_0-z)]+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}$$

$$=-\nabla p_d-\nabla[\rho g(H+z_0)]+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}$$

令水面高程 $(H+z_0)=z_s$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p_{\mathrm{d}}-g\nabla z_s+\nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{9-13}$$

式(9-13)为明槽水流的 N-S 方程。

由方程可以看出在明槽流动中，重力作为质量力的作用表现为沿程水面的变化。

9.1.3 明槽总流方程

分析明槽水流时常考虑沿流动方向整股水流的各种水流物理量的变化，基本方程式有连续方程、动量方程和能量方程。

1. 明槽总流的连续方程

图 9-5 表示明槽总流的纵、横剖面图。以 1-1,2-2 两断面之间的水体为研究对象。图中沿流动方向有三个坡度：底坡 i、水面坡度 J_S 和总水头线坡度(能坡)J。沿流动方向的纵坐标为 s,垂直流向的水深为 $h(s)$。0-0 为水平基准面,水面相对于基准面的高度为 z_s,即为该断面的测管水头高度,断面平均流速为 v,则流速水头为$\frac{\alpha v^2}{2g}$,α 为动能修正系数。横断面中 A 为断面面积,B 为水面宽度,P 为湿周(wetted perimeter),即床面与水接触部分的长度。定义面积 A 与湿周 P 的商为水力半径 R,即

$$R = \frac{A}{P} \tag{9-14}$$

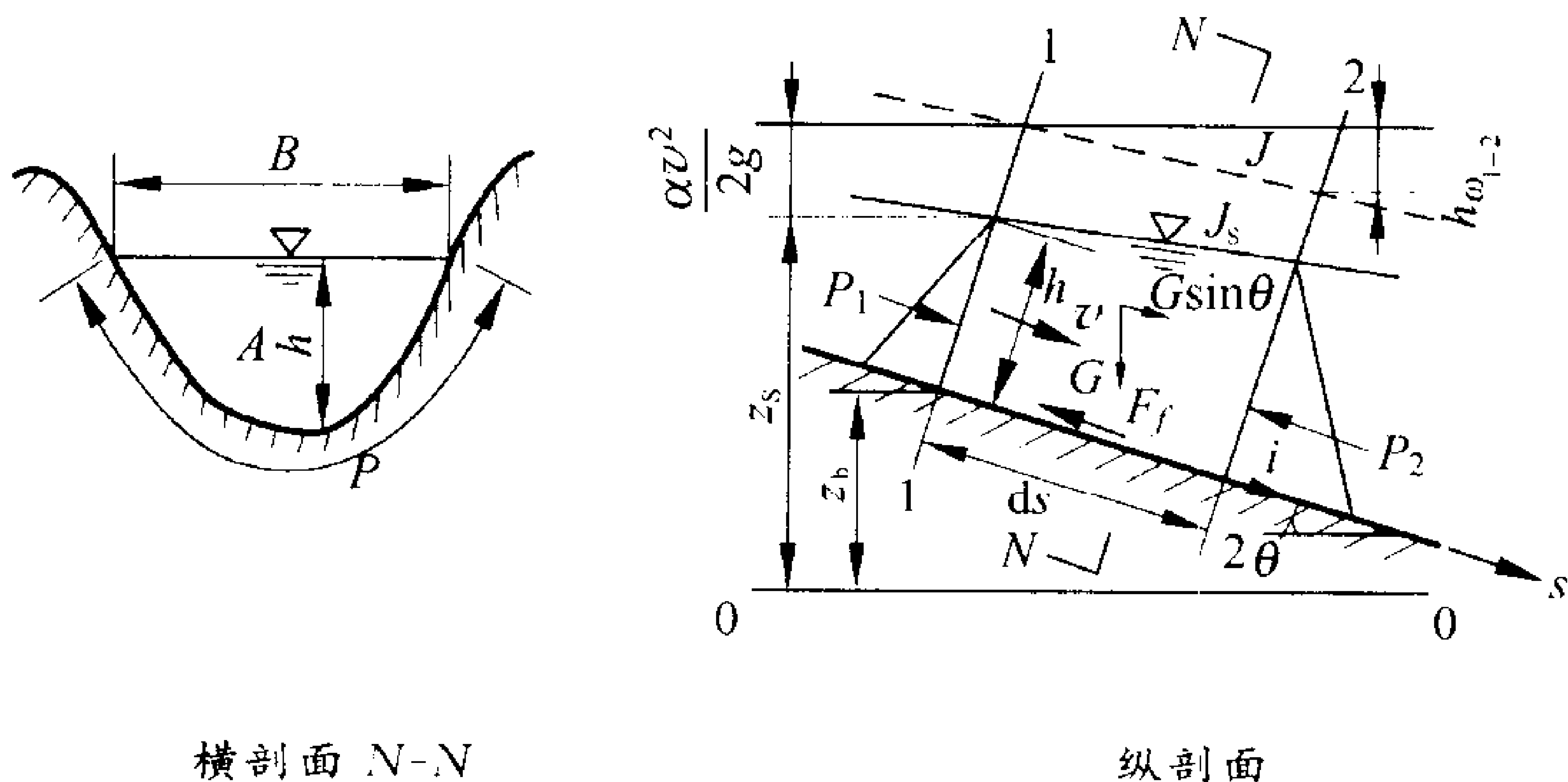


图 9-5 明槽流动剖面

考虑一种普遍情况,过水断面面积 A 和流体密度 ρ 均随时间变化,即 $A=A(s,t)$,$\rho=\rho(s,t)$。在图 9-5 中的微小控制体 1-2 流体,由断面 1-1 流入,由断面 2-2 流出,两断面间距为 $\mathrm{d}s$。时段 $\mathrm{d}t$ 内流入断面 1-1 的流体质量为

$$m_1 = \rho v A \mathrm{d}t$$

由断面 2-2 流出的流体质量为

$$m_2=\rho vA\mathrm{d}t+\frac{\partial}{\partial s}(\rho vA\mathrm{d}t)\mathrm{d}s$$

流出与流入的质量差为

$$\mathrm{d}m_s=m_2-m_1=\frac{\partial}{\partial s}(\rho vA\mathrm{d}t)\mathrm{d}s$$

在同一时段内，控制体内的流体质量由原来的 $\rho A\mathrm{d}s$ 变为 $\rho A\mathrm{d}s+\frac{\partial}{\partial t}(\rho A\mathrm{d}s)\mathrm{d}t$，即得

$$\mathrm{d}m_t=\frac{\partial}{\partial t}(\rho A\mathrm{d}s)\mathrm{d}t$$

由质量守恒原理，忽略高阶小量，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A\mathrm{d}s)\mathrm{d}t=-\frac{\partial}{\partial s}(\rho vA\mathrm{d}t)\mathrm{d}s$$

或写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+\frac{\partial}{\partial s}(\rho vA)=0 \tag{9-15}$$

即一维非恒定流动连续方程。水作为不可压缩流体，ρ 为常数，式(9-15)简化为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}(vA)=0 \tag{9-16}$$

这就是在明槽流动中常用的连续方程形式。由于断面流量 Q 为断面平均流速 v 与断面积 A 的乘积，即

$$Q=vA \tag{2-74}$$

因此明槽流动的连续方程可写为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=0 \tag{9-17}$$

对于恒定流即 $\frac{\partial A}{\partial t}=0$，积分式(9-17)得

$$Q=vA=\mathrm{const} \tag{9-18}$$

对于 1-1 及 2-2 两个断面，可写成

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \text{或} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \tag{9-19}$$

2. 明槽总流的动量方程

由 2.2 节已知纳维-斯托克斯方程就是实际流体运动时的动量方程式，只不过它是动量方程的微分形式，在流体力学中常称为流体的运动方程。运动方程与连续方程联立，原则上已可求解在给定边界条件及初始条件下的流动问题。但在实用上往往并不需要知道各种物理量在流场中各点上的分布，于是发展了动量方程的积分形式。积分形式的动量定理表明：流体系统动量的时间变化率等于作用在该流体系统上的全部作用力。流体系统动量的时间变化率可由雷诺输运方程式(1-12)得到，只要将式(1-12)中的 F 以 $\rho \boldsymbol{u}$ 代替即可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V(t)}(\rho \boldsymbol{u})\mathrm{d}V = \iiint_{V(t)}\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\mathrm{d}V + \iint_{S(t)}(\rho \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{9-20}$$

式(9-20)表明流体系统的动量随时间的变化率等于控制体中流体动量的当地时间变化率与单位时间里从控制体表面净流出的动量之和。于是动量的积分方程可以写为

$$\iiint_{V(t)}\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\mathrm{d}V + \iint_{S(t)}(\rho \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum F_B + \sum F_S \tag{9-21}$$

式中：F_B 表示体积力；F_S 表示面积力。

在直角坐标系中将式(9-21)写为分量的形式，在 x_1, x_2, x_3 坐标方向分别为

$$\iiint_{V(t)}\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_1)\mathrm{d}V + \iint_{S(t)}(\rho u_1)\boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum F_{B_1} + \sum F_{S_1} \tag{9-22a}$$

$$\iiint_{V(t)}\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_2)\mathrm{d}V + \iint_{S(t)}(\rho u_2)\boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum F_{B_2} + \sum F_{S_2} \tag{9-22b}$$

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_3)\mathrm{d}V + \iint_{S(t)} (\rho u_3)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum F_{B_3} + \sum F_{S_3} \tag{9-22c}$$

对于恒定流动，则式(9-22)化简为

$$\iint_S (\rho u_1)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum F_{B_1} + \sum F_{S_1} \tag{9-23a}$$

$$\iint_S (\rho u_2)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum F_{B_2} + \sum F_{S_2} \tag{9-23b}$$

$$\iint_S (\rho u_3)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum F_{B_3} + \sum F_{S_3} \tag{9-23c}$$

式中的 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ 为在控制体表面积上流速在外法线方向的投影。

明槽流动如图 9-5 所示，由于自由水面及床面均无流体流入或流出，因此当令 $x_1=x, x_2=y, x_3=z$ 时，式(9-23)可写为

$$\rho Q(\alpha_{0_2} v_{2_x} - \alpha_{0_1} v_{1_x}) = \sum F_{B_x} + \sum F_{S_x} \tag{9-24a}$$

$$\rho Q(\alpha_{0_2} v_{2_y} - \alpha_{0_1} v_{1_y}) = \sum F_{B_y} + \sum F_{S_y} \tag{9-24b}$$

$$\rho Q(\alpha_{0_2} v_{2_z} - \alpha_{0_1} v_{1_z}) = \sum F_{B_z} + \sum F_{S_z} \tag{9-24c}$$

式中：$v_{2_x}, v_{2_y}, v_{2_z}$ 分别表示断面 2-2 上的断面平均流速在 x, y, z 方向的投影；$v_{1_x}, v_{1_y}, v_{1_z}$ 分别表示断面 1-1 上的断面平均流速在 x, y, z 方向的投影。

由于断面上各点流速 u 分布并不均匀，所以当用断面平均流速 v 来表示动量时，须乘一个动量修正系数 α_0，即

$$\alpha_0 = \frac{\int_A u^2 \mathrm{d}A}{v^2 A}$$

α_0 在渐变流动中一般为 1.02～1.05，为简单起见，常采用 $\alpha_0=1.0$。通常进出断面 1-1 和 2-2 均选在渐变流中而对 1 和 2 两断面之间的流动并无限制。

3. 明槽总流的能量方程

关于明槽总流的能量方程可由 2.4.4 节总流的伯努利方程

(2-87)得到。式(2-87)为

$$\frac{p_1}{r}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{r}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+z_2+h_{w_{1-2}} \qquad (2\text{-}87)$$

式中的$\left(\frac{p}{r}+z\right)$表示断面的测管水头，由图 9-5 可以看出各个断面的测管水头为 z_s，$z_s=\frac{p}{r}+z=z_b+h\cos\theta$，式(2-87)在明槽流动中也可写为

$$z_{s_1}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_{s_2}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w_{1-2}} \qquad (9\text{-}25)$$

式中的 $h_{w_{1-2}}$ 表示断面 1-1 与断面 2-2 之间的水头损失。

9.2 明槽水流运动的两种流态——缓流和急流

明槽水流有两种完全不同的流态(flow regime)：一种水流流动湍急，遇到某些障碍物例如山溪中的巨石，则会在巨石处激起浪花，而其上游的水流却不受任何影响；另一种水流流动平缓，如果遇到某些障碍物例如河道的缩窄或河槽中矗立的桥墩，则这些障碍物上游的水位会涌高，而且这种涌高将一直影响到上游相当远处。这两种不同的水流流动状态，前者称为急流(supercritical flow)，后者称为缓流(subcritical flow)。这两种流态的水流，其水面曲线的变化规律不同，因此在明槽水流研究中有重要意义。判别水流流态的准数是弗劳德数，与可压缩流体运动中由马赫数将流动分为超音速(supersonic flow)和亚音速流动(subsonic flow)类似。

9.2.1 明槽中的微波波速

从明槽水流中微小干扰波的传播可以探索两种流态的本质。明槽中流动边界的突然改变，如河道的缩窄、障碍物的出现，流动

方向或槽底坡的急剧变化，或者对明槽水流的人工干扰都会形成明槽水面的波动，这种波动将以一定的速度向四周传播。例如在一个浅水池塘中投入石块，于是在水面产生波动并以速度 c 向四周传播，形成以投石点为中心的一组同心圆，如图 9-6(a)所示。如果是向均匀等速流动着的明槽水流中投入石块，则所形成的干扰波将随水流移动，当水流的流速 U 小于微波传播的速度即波速 c 时，微波向上游传播的绝对速度为 $(c-U)$ 而向下游传播的绝对速度为 $(c+U)$，扰动微波最终可以传播到整个水面，形成的波形图如 9-6(b)所示。在 $t=0$ 时刻投入水面 O 点处的石子扰动产生的微小水面波在 $t_1=\Delta t$ 时将传播到以 O_1 为中心，$c\Delta t$ 为半径的圆

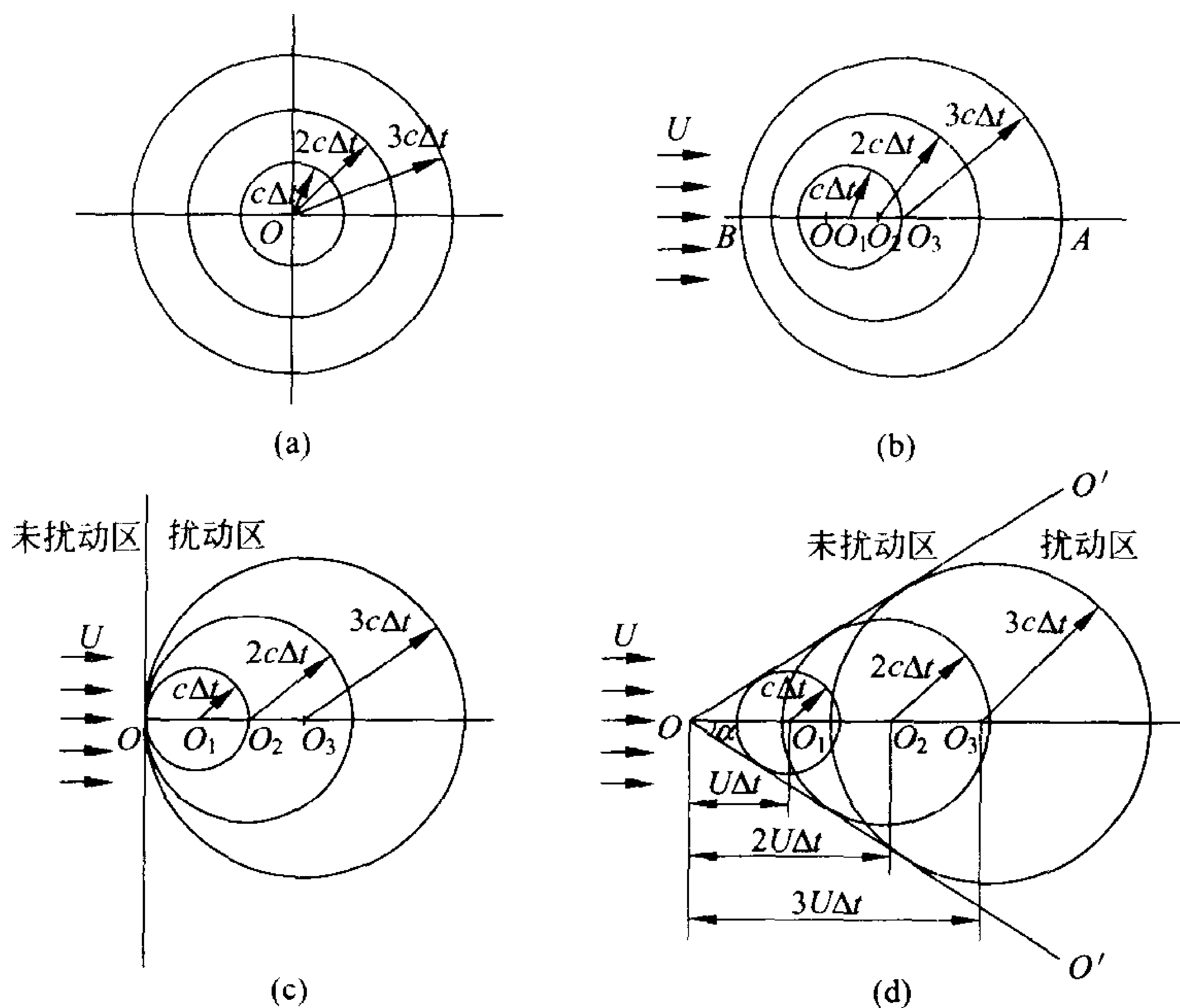


图 9-6 干扰微波在水中的传播

周，而$\overline{OO_1}=U\Delta t$。同样可以得出在$2\Delta t, 3\Delta t, \cdots$时的微波传播的图形。图中的$A$点为经过$3\Delta t$时间由$O$传播到达的点，$\overline{OA}=3(U+c)\Delta t$，可见向下游的传播速度为$(U+c)$。同理$\overline{OB}=3(U-c)\Delta t$。图9-6(c)表示当水流流速$U$等于波速$c$的情形。这时，向下游传播的绝对速度为$2c$而微波不可能向上游传播，$O$点处为一公切线，作为扰动区与未扰动区的分界线。图9-6(d)表示$U>c$的情形。这时，O点处的微扰动波只能沿顺流方向，在以O为顶点，过O点的流线为轴线的锥形区内传播。图中示出$t=\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$三个时刻微波传播的圆周。在流动方向微波的传播的绝对速度为$(U+c)$，锥形的半顶角$\alpha=\sin^{-1}\frac{c}{U}$。干扰波不可能传播到锥形以外的区域。可见通过对水流流速U与微小干扰波传播速度c的比较就可以判断干扰波能否向上游传播，从而判断水的流态。

微波传播速度c可以通过对图9-7所示任意形状的平底棱柱形明槽水流的分析得出。设明槽内为静水，水深为h，水面宽度为B，过水断面面积为A。如果用薄板N-N以一定速度向左拨动一

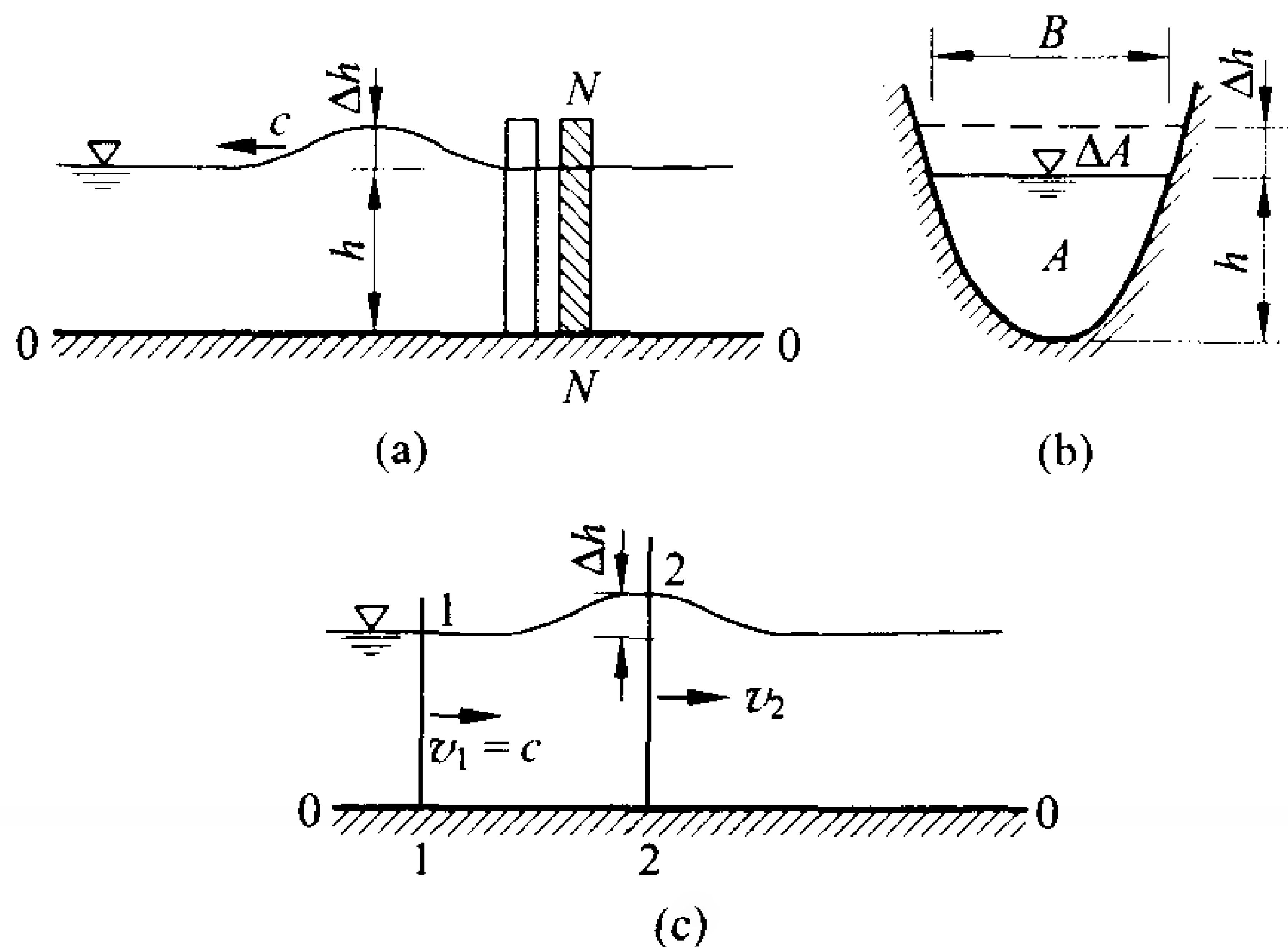


图 9-7 明槽中微波传播[1]

下，则在薄板左面的水面上激起一个微小波动，波高为 Δh，以波速 c 向左方传播。如果忽略摩阻力的影响，则微波将保持它的形状一直传播到无穷远处。事实上由于摩阻力的存在，波高将在传播过程中逐渐减小以至消失。波形所到之处将带动槽水运动，所以槽中各点流速都随时间变化，流动为非恒定流动。取坐标系位于微波波峰断面并以 c 的速度向左移动，如果忽略摩阻力的影响，则对于此坐标系而言，槽中水流自左向右流动，水面波形将固定不变，为恒定流动，但水深则沿程变化。对于波峰所在断面 2-2 及其上游邻近断面 1-1，若以槽底为基准面，则测管水头分别为

$$z_1 + \frac{p_1}{r} = h$$

$$z_2 + \frac{p_2}{r} = h + \Delta h$$

又 $$v_1 = c$$

由连续方程得

$$v_2 = \frac{v_1 A}{A + \Delta A} = \frac{cA}{A + \Delta A}$$

忽略断面 1-1 和 2-2 之间的水头损失，并令 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$，则能量方程式为

$$h + \frac{c^2}{2g} = h + \Delta h + \frac{c^2}{2g}\left(\frac{A}{A + \Delta A}\right)^2$$

将 $\Delta A \approx B\Delta h$ 代入并化简，可得

$$c = \pm\sqrt{\frac{2g\left(\frac{A}{B} + \Delta h\right)^2}{\frac{2A}{B} + \Delta h}} \tag{9-26}$$

考虑到 $\Delta h \ll \frac{A}{B}$，$\frac{A}{B}$为断面平均水深 $\bar{h}$，则式(9-26)可近似写为

$$c = \pm\sqrt{g\frac{A}{B}} \tag{9-27}$$

对于矩形明槽，$A = Bh$，则

$$c = \pm\sqrt{gh} \tag{9-28}$$

实际上明槽或天然河道中的水总是有流动的，设水流流速为 v，则微波传播的绝对速度为

$$v \pm c = v \pm \sqrt{g\frac{A}{B}} \tag{9-28'}$$

顺水流方向用"＋"号，逆水流方向用"－"号。

根据水流流速 v（注意这里用断面平均流速 v 与表面流速会有一些差别）与波速 c 的比较，将水流分为以下三种流态：

(1) 缓流　　$v<c$

(2) 临界流　　$v=c$

(3) 急流　　$v>c$

急流相当于图 9-6(d)所表示的情形，缓流相当于图 9-6(b)所表示的情形，而临界流(critical flow)相当于图 9-6(c)所表示的情形。临界流中水的流速称为临界流速(critical velocity)，以 v_c 表示，即

$$v_c = \sqrt{g\frac{A}{B}} \tag{9-29}$$

对于矩形明槽，v_c 为

$$v_c = \sqrt{gh} \tag{9-30}$$

所以用临界流速 v_c 也可以判别流态。当 $v>v_c$ 为急流，$v<v_c$ 为缓流。

由式(4-20)已知流动中弗劳德数为 $Fr=\frac{v}{\sqrt{gl}}$，l 为流动中某一几何尺度，这里采用水深 h，则可见 Fr 数表示了水流流速与波速之比，从而得到

$$\left.\begin{aligned} Fr &= \frac{v}{c} < 1 \quad \text{缓流} \\ Fr &= \frac{v}{c} = 1 \quad \text{临界流} \\ Fr &= \frac{v}{c} > 1 \quad \text{急流} \end{aligned}\right\} \tag{9-31}$$

由此可见弗劳德数是水流流态的判别准数，因而具有重要意义。这说明，当 $Fr=1$，水流流速等于波速，也表示在流动中重力的作用与惯性力的作用恰好相等，是为临界流动；当 $Fr<1$，表明惯性力的作用小于重力的作用，干扰微波正是在重力的作用下克服惯性力而向上游传播的，是为缓流；急流中 $Fr>1$，惯性力的作用大于重力的作用，干扰微波不能向上游传播。

类似水波，在空气动力学的研究中马赫(Ernst Mach，1838—1916)于 1887 年发表的文章中指出在空气中运动的扰动源，例如一个尖头弹丸的顶尖，其扰动将以音速 a 向四周传播，从而得到与图 9-6 中与水波相类似的现象。也可以是以流速 U 流过不动的扰动源的气流。当流速为 U，可以根据流速 U 与音速 a 之比即马赫数 $M=\frac{U}{a}$，将气体流动分为亚音速(subsonic)、音速(sonic)和超音速(supersonic)运动。

$$\left.\begin{aligned} Ma &= \frac{U}{a} < 1 \qquad \text{亚音速流动} \\ Ma &= \frac{U}{a} = 1 \qquad \text{音速流动} \\ Ma &= \frac{U}{a} > 1 \qquad \text{超音速流动} \end{aligned}\right\} \tag{9-32}$$

对于超音速气流，扰动可以传播到的范围同样为一锥体，称为马赫锥(Mach cone)，锥顶点为扰动源的位置，锥的半顶角称为马赫角，$\alpha=\sin^{-1}\frac{a}{U}$。对于二维平面流动，马赫锥退化为两条锥形线，称为马赫线。可见水流运动中的 Fr 数和气流中的 Ma 数有相似的含意，而水流的不同流态分别与气流中的亚音速、音速和超音速流动也有相似之处。

9.2.2 比能、临界水深

在研究明槽流动中沿程各断面之间能量的关系时，常常选定一条基准线 0-0，相对于这条基准线确定沿程各断面的各种水头，通过总水头的比较而得到两断面之间的水头损失，这条基准线是任意选定的。因此当企图通过研究一个断面中各种能量，主要是水流的势能和动能的配比关系而分析明槽水流的流态时，可以采用明槽中所研究的断面的最低点为基准。1911 年巴赫米切夫(Bakhmeteff B. A.)[①]建议以断面最低点为基准的断面水流单位重量水体的总机械能定义为比能(specific energy)，以 E 表示为

$$E = h\cos\theta + \frac{\alpha v^2}{2g} \tag{9-33}$$

式中：h 为水深；θ 为明槽槽底坡线与水平线的夹角；$h\cos\theta$ 表示该断面水深在铅垂方向的投影，是势能；$\frac{\alpha v^2}{2g}$ 表示该断面水流的动能。

对于坡度很小的明槽($\theta<6°$)，则 $\cos\theta\approx 1.0$，即可用水深 h 代替单位重量水体的势能 $h\cos\theta$。因此式(9-33)改写为

$$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \tag{9-34}$$

或者由于 $v=\frac{Q}{A}$ 而写为

$$E = h + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \tag{9-35}$$

图 9-8 表示一个过流断面的能量关系。在非均匀流中，由于流动条件的改变，一定的流量 Q 有可能以不同的水深 h 通过同一过水断面，相应每一水深有不同的断面面积和断面平均流速，从而有不

---

① B A Bakhmeteff. Hydraulics of Open Channels. New York: McGraw-Hill Co. 1932

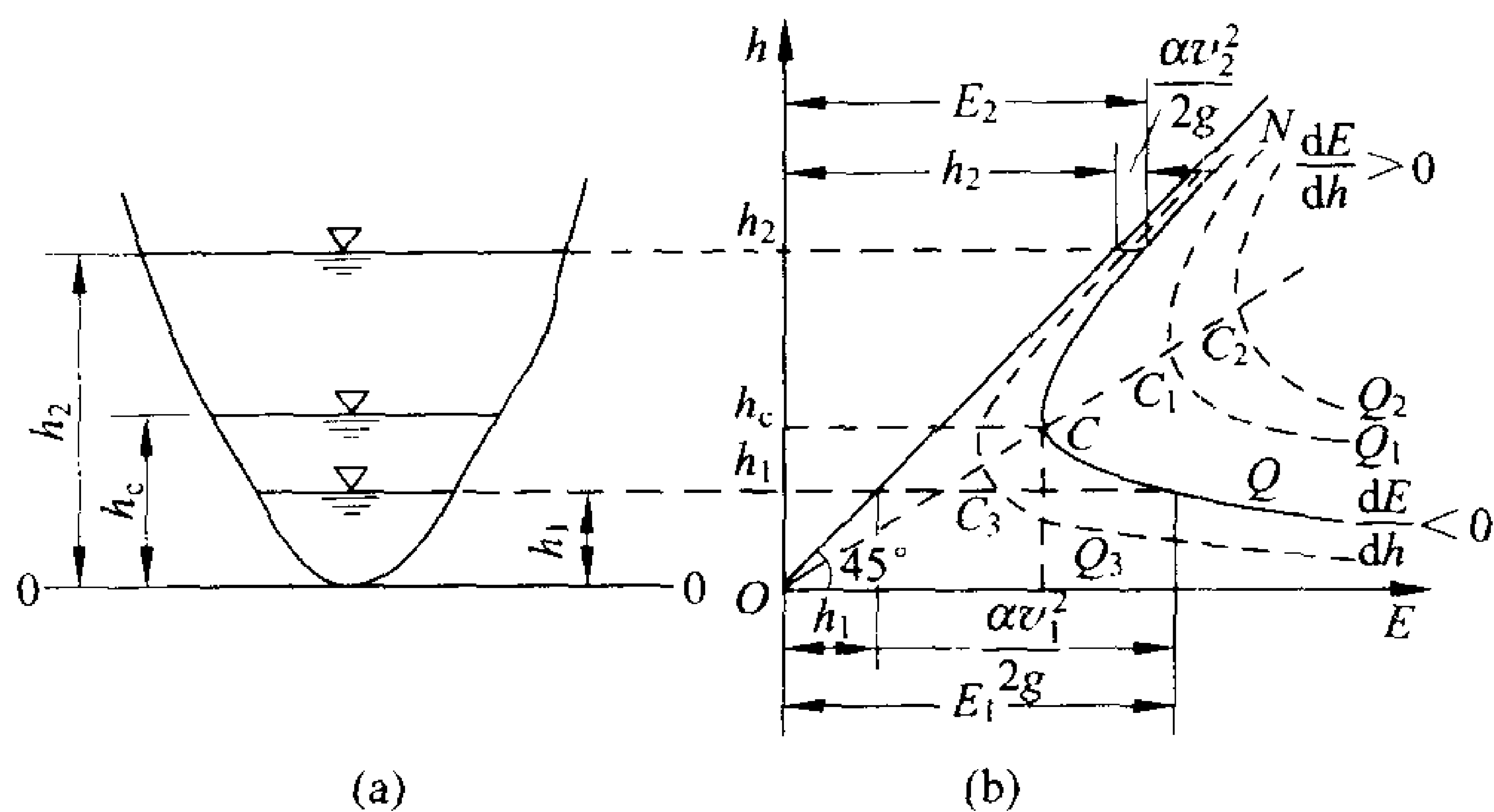


图 9-8 比能曲线[1]

同的比能 E 值。当断面形状、尺寸和流量一定时，比能 E 与水深 h 的关系如图 9-8(b)中曲线（实线）所示，这条曲线称为比能曲线。由式(9-34)的关系可以看出：当 $h\to 0$ 时，因 $A\to 0$ 而 $v\to\infty$，所以$\frac{\alpha v^2}{2g}\to\infty$，比能 $E\to\infty$，比能曲线必然以横坐标为渐近线；反之，当 $h\to\infty$时，因 $A\to\infty$，$v\to 0$，$\frac{\alpha v^2}{2g}\to 0$ 而比能 $E=h\to\infty$，所以比能曲线必以 45°直线 ON 为渐近线。在 $h\to 0$ 和 $h\to\infty$的两种极端情形当中必有一个 h 值相应 E 值为最小值，可从$\frac{dE}{dh}=0$ 求得

$$\frac{dE}{dh}=\frac{d}{dh}\left(h+\frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\right)=1-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dh}=0 \qquad (9\text{-}36)$$

由于 $dA=Bdh$，并设 $\alpha=1.0$，B 为相应水深时的水面宽度，所以式(9-36)可写为

$$1-\frac{Q^2B}{gA^3}=0,\quad \frac{Q^2}{A^2}=g\frac{A}{B}$$

又因$\frac{Q^2}{A^2}=v^2$，并根据式(9-29)可得

$$v=\sqrt{g\frac{A}{B}}=v_c \tag{9-37}$$

由此可见比能 E 为最小值时，流速 v 为临界流速 v_c，即此时为临界流。最小比能点 c 相应的水深称为临界水深(critical depth)，以 h_c 表示。这时水流的弗劳德数 $Fr=\frac{v}{\sqrt{g\frac{A}{B}}}=1.0$。由图 9-8(b)可看到，$C$ 点将比能曲线分为上下两支，曲线上支 $\frac{dE}{dh}>0$，$v<v_c$，流动为缓流；曲线下支 $\frac{dE}{dh}<0$，$v>v_c$ 流动属于急流。图 9-8 中实线所表示的 E 与 h 关系曲线是对应于某一流量 Q 的，如果流量变化则会有与该流量相应的另一条比能曲线，如图中相应 Q_1 与 Q_2 的虚线。对于同一断面，当流量 Q 增加则比能曲线向右移动而临界水深增加，如图 9-8 中 $Q_2>Q_1>Q$；反之当 Q 减小则比能曲线向左移动，如 Q_3。

若以 A_c 和 B_c 分别表示水深为临界水深时断面的过水断面面积和水面宽度，则由式(9-36)得

$$\frac{A_c^3}{B_c}=\frac{\alpha Q^2}{g} \tag{9-38}$$

式(9-38)为临界水深的计算式，由于此式为隐函数形式，需由试算求解，也可查水力学计算手册。

对于矩形断面，$A_c=B_c h_c$，$Q=qB_c$，q 为单宽流量。代入式(9-38)得

$$h_c=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} \tag{9-39}$$

以 $q=h_c v_c$ 代入式(9-39)得

$$h_c=\frac{\alpha v_c^2}{g}=2\frac{\alpha v_c^2}{2g}=\frac{2}{3}E_{\min} \tag{9-40}$$

式(9-40)说明临界水深是临界流速水头的2倍，是最小比能的$\frac{2}{3}$。如势能大于此值，$h>h_c$ 则流动为缓流，如势能小于此值，$h<h_c$ 则流动属于急流。

对于矩形断面还可以得出在比能 E 为一定时，水深与流量的关系。$v=\frac{q}{h}$，以 $\alpha=1.0$ 代入式(9-34)得

$$q = h\sqrt{2g(E-h)} \tag{9-41}$$

令 $E=\text{const}$，以 h 为纵坐标，q 为横坐标，按式(9-41)绘出 $h\sim q$ 曲线如图9-9所示。由图可见：单宽流量 q 存在一个最大值，由 $\frac{dq}{dh}=0$ 可以求得相应于该最大流量的水深为

$$h = \frac{2}{3}E = h_c \tag{9-42}$$

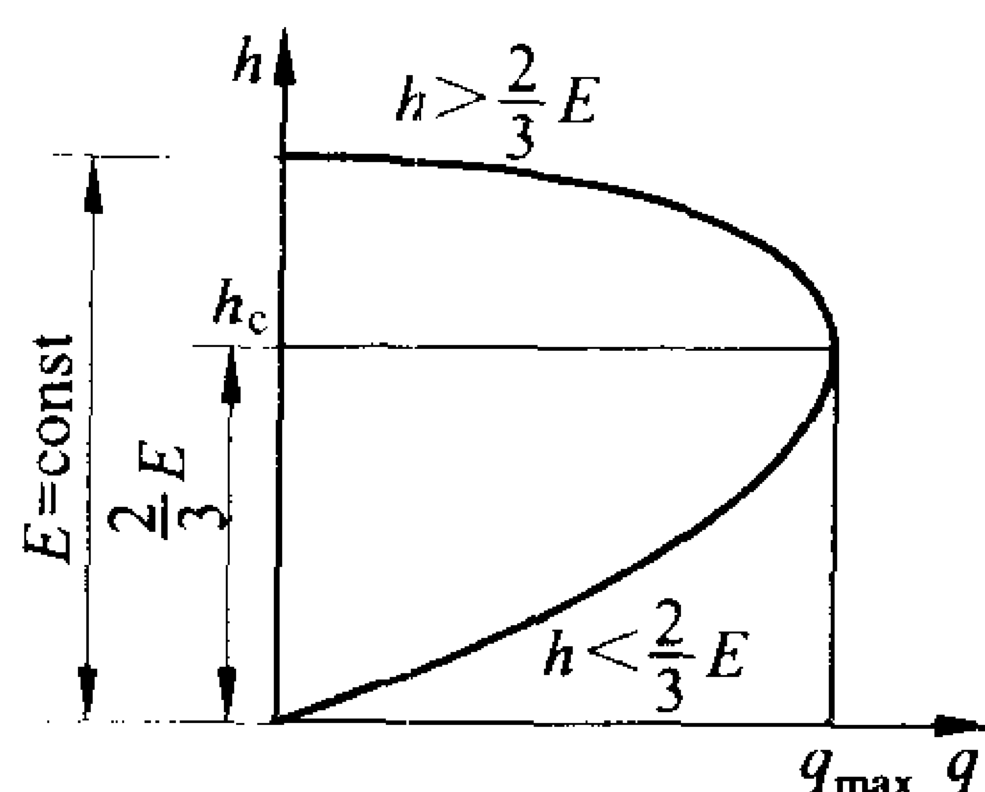


图9-9　h 与 q 关系曲线[1]

式(9-42)说明当水深为临界水深时，通过断面的流量为最大。由图9-9还可看出：对于 $h>h_c$ 的缓流情况，水深越大则单宽流量越小；在 $h<h_c$ 的急流情况下，水深越大则单宽流量越大，二者情况恰好相反。不同过水断面的比能不能直接互相比较，因其基准线(槽底)的高程不同。

9.3　明槽均匀流与渐变流

9.3.1　明槽均匀流动

当明槽中水深、过水断面、流速、流量等运动要素均保持沿程不变，这种流动为明槽均匀流。明槽均匀流中流线均为与槽底平行的直线。如图9-10所示，水面线、总水头线与槽底平行，也就是

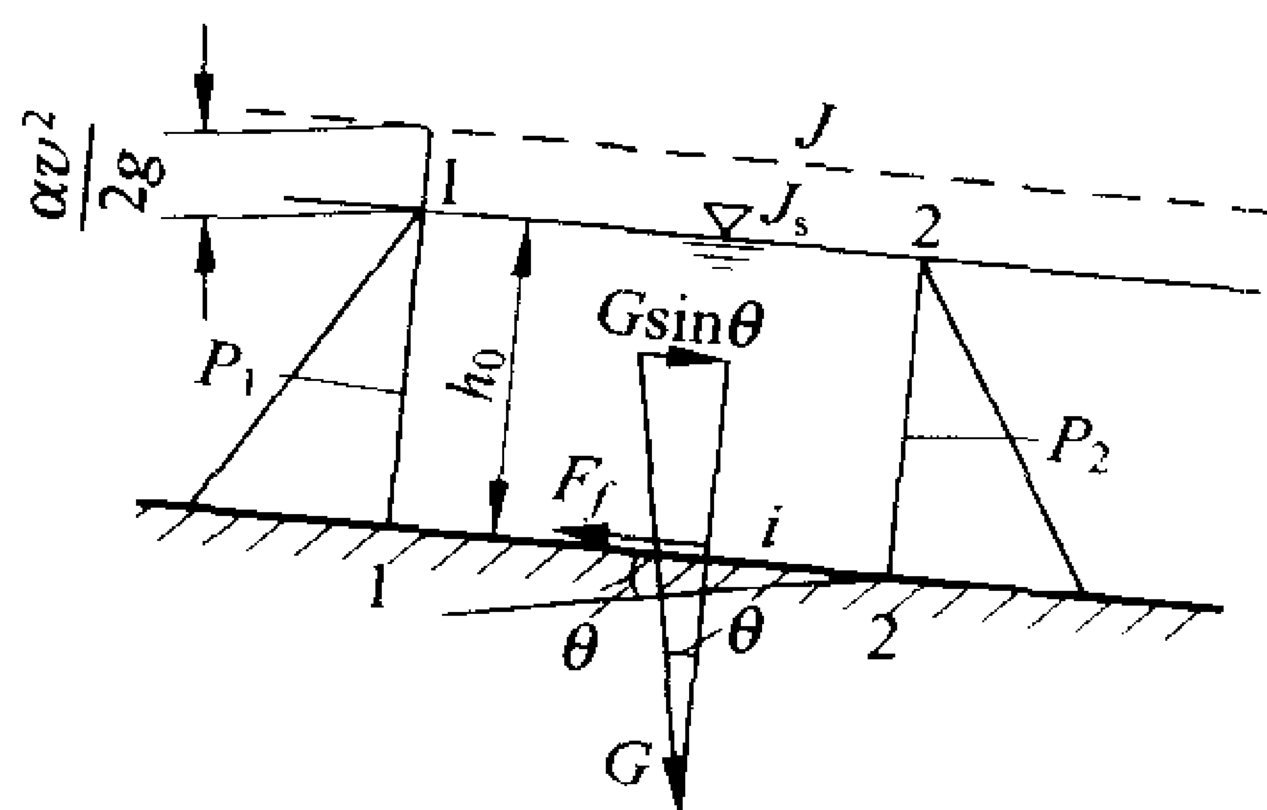


图 9-10　明槽均匀流动[1]

水面坡度 J_s，总水头线坡度 J 和底坡 i 均相等，即

$$J_s = J = i = \sin\theta \tag{9-42}$$

明槽均匀流是等速直线流动，因此作用于水体的各种力保持平衡。均匀流动中各断面水深相同，且压强均符合静水压强分布，因此各断面的水压力是相同的，对流动不起作用。沿流动方向的重力分量 $G\sin\theta$ 与床面对水流的摩阻力 F_f 相等。底坡的加大将改变流动方向的重力分量从而使流动速度增加，而流速的增加将使阻力 F_f 增加，从而可达到一个新的平衡。长直渠道中明槽流动总是以均匀流作为流动演变的目标，但是真正实现均匀流动往往是很困难的。明槽均匀流是明槽流动中最简单、最典型的流动，而且它是非均匀流动分析与计算的基础，因此也是一种最重要的流动型式。明槽均匀流动都是恒定的。

明槽均匀流的基本公式是如下的连续方程与谢才公式：

$$Q = Av \tag{9-43}$$

$$v = C\sqrt{RJ} \tag{9-44}$$

式中：Q 为断面流量；A 为过水断面面积；v 为断面平均流速；C 为谢才系数(Chézy coefficient)；R 为水力半径。工程中常把明槽均匀流动中的水深称为正常水深(normal depth)，以 h_0 表示。相应的过水断面面积为 A_0，水力半径为 R_0，谢才系数为 C_0，又因 $J=i$，所以明槽均匀流的流量公式为

$$Q = A_0 C_0 \sqrt{R_0 i} \tag{9-45}$$

谢才系数通常采用曼宁公式(Manning formula)确定,即

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} \tag{9-46}$$

式中的 n 为糙率也称粗糙系数,它是反映壁面粗糙情况的一个系数。n 值一般根据壁面情况选用,但对于天然河流由于河床断面的不规则,组成河床材料的大小与材质不同,河道的弯曲和河滩的覆盖情况(有无树木、杂草等)的不同,n 的选择很困难,多是通过实地测验得到。表 9-1 给出了一些 n 的参考数值供选用。

表 9-1 粗糙系数 n[3]

序号	边界种类及状况	n	$\frac{1}{n}$
1	仔细刨光的木板,新制的清洁的生铁和铸铁管,铺设平整,接缝光滑	0.011	90
2	未刨光的但连接很好的木板,正常情况下的给水管,极清洁的排水管,很光滑的混凝土面	0.012	83.3
3	正常情况下的排水管,略有污秽的给水管,很好的砖砌	0.013	76.9
4	污秽的给水和排水管,一般的混凝土面,一般的砖砌	0.014	71.4
5	陈旧的砖砌面,相当粗糙的混凝土面,光滑、仔细开挖的岩石面	0.017	58.8
6	坚实粘土中的土渠,有不连续淤泥层的黄土或砂砾石中的土渠,维修良好的大土渠	0.0225	44.4
7	一般的大土渠,情况良好的小土渠,情况极其良好的天然河流(河床清洁顺直,水流通畅,没有浅滩深槽)	0.025	40.0
8	情况较坏的土渠(如有部分地区的杂草或砾石,部分的岸坡倒塌等),情况良好的天然河流	0.030	33.3

续表

序号	边界种类及状况	n	$\frac{1}{n}$
9	情况极坏的土渠(剖面不规则,有杂草、块石、水流不畅等),情况比较良好的天然河流,但有不多的块石和野草	0.035	28.6
10	情况特别不好的土渠(深槽或浅滩,杂草众多,渠底有大块石等),情况不甚良好的天然河流(野草、块石较多,河床不甚规则而有弯曲,有不少的倒塌和深潭等处)	0.040	25.0

9.3.2 临界底坡

当棱柱形明槽的形状、尺寸及壁面粗糙情况一定时,槽中通过的流量 Q 也不随时间改变,则正常水深 h_0 只是槽底纵坡 i 的函数,如图 9-11 所示。底坡 i 越大则正常水深 h_0 越小。当正常水深 h_0 恰好等于该流量 Q 相应的临界水深 h_c 时,则这个底坡 i 称为临界底坡(critical slope),以符号 i_c 表示。这时有

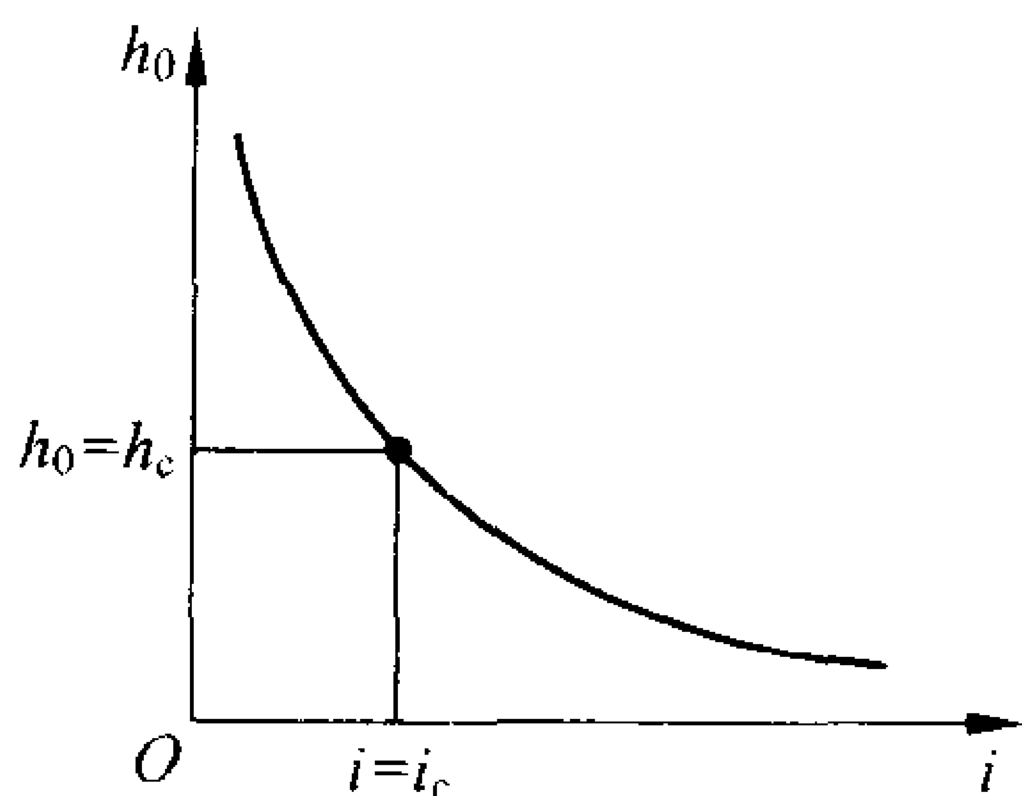


图 9-11 临界底坡[1]

$$Q = A_c C_c \sqrt{R_c i_c} \tag{9-47}$$

$$\frac{A_c^3}{B_c} = \frac{\alpha Q^2}{g} \tag{9-38}$$

联解以上两式,可得临界坡度为

$$i_c = \frac{g}{\alpha C_c^2} \frac{P_c}{B_c} \tag{9-48}$$

式中:P_c 为临界水深时的湿周。

对于宽槽 $P_c \approx B_c$,因此

$$i_c = \frac{g}{\alpha C_c^2} \tag{9-49}$$

将明槽底坡与临界底坡比较，可判断明槽流动的流态。

$$\left.\begin{array}{lll} i < i_c & h_0 > h_c & \text{缓流} \\ i = i_c & h_0 = h_c & \text{临界流} \\ i > i_c & h_0 < h_c & \text{急流} \end{array}\right\} \tag{9-50}$$

其中 $i<i_c$ 的情形称为缓坡(mild slope)明槽，$i>i_c$ 则称为陡坡(steep slope)明槽。渠槽中的流动常常由于各种边界条件的影响而形成非均匀流，其水深 h 并不等于正常水深 h_0。在缓坡上可能形成 $h<h_c$ 的急流，在陡坡上也可能出现 $h>h_c$ 的缓流。但不管是什么流态，对于一个长直的棱柱形渠槽，非均匀流总是趋于向均匀流转变，使重力在流动方向的分量与床面摩阻力达到平衡。图 9-12 中表

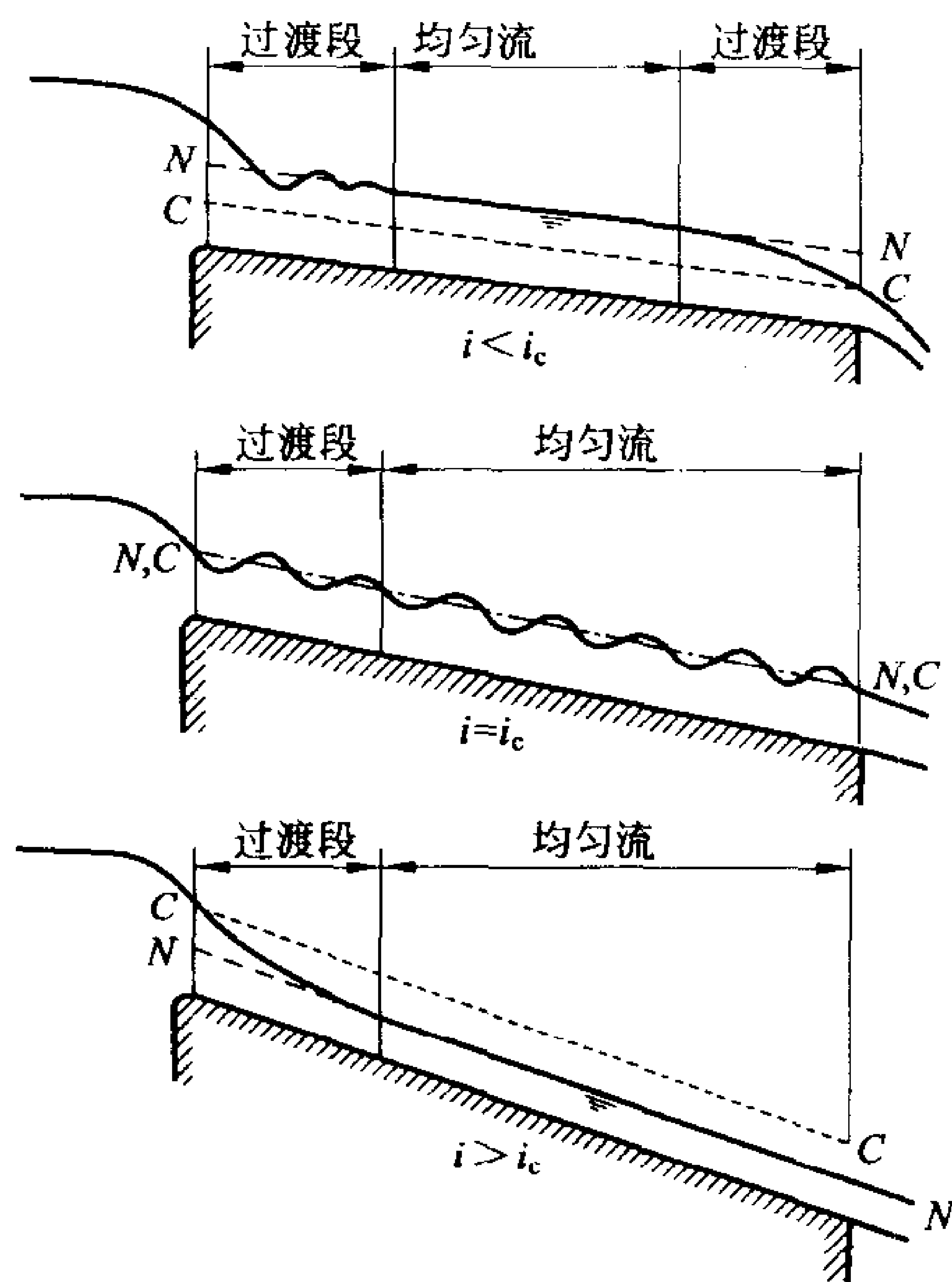


图 9-12 流态的转化[4]

示了缓坡、临界坡和陡坡明槽中非均匀流与均匀流的互相转化，转化的过程表示为过渡段(transitory zone)。过渡段中均为非均匀流。发生在临界底坡明槽中的临界流动，正像一切过渡现象一样，是一种不稳定的流态，其水面呈现波动(但其平均水深为 h_c)。设计渠道时应尽量避免这种流动的出现。

9.3.3 明槽恒定非均匀渐变流动

2.4.4 节曾提到对于非均匀流动可能有两种情形：渐变流动与急变流动。流程很长的非均匀流动多数为渐变流动；急变流动往往发生在比较短的流程内，为一种局部现象，例如河段的弯曲，断面形状与大小的急剧变化等所引起的流动。渐变流动的水深沿明槽长度方向缓慢变化，所有流线几乎均平行于槽底，断面上压强接近静水压强分布。

有关恒定渐变流动的理论自 18 世纪以来逐渐发展成熟，这些理论基于以下一些假定。

首先假定在渐变流动中两个比较接近的断面之间的水头损失与其断面水深、流过的流量均相同的均匀流断面间的水头损失相同。因此均匀流中的谢才公式与曼宁公式对渐变流仍适用。一般情况下假定明槽底坡很小，例如 $\theta<6°$ 而 $i<0.1$，这时可用铅垂断面代替与流线垂直的过水断面而不致引起太大误差，这时 $\cos\theta\simeq 1.0$。明槽断面上的流速分布沿程不变，并假定动能修正系数 α 均等于 1.0。

图 9-13 表示一底坡为 i 的明槽中的渐变流动，0-0 为基准线，任取符合渐变流动条件的过水断面 1-1 和 2-2，两者的间距为 ds。相对于基准线 0-0，断面的总水头 H 为

$$H = z + h\cos\theta + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

$$= z + h + \frac{v^2}{2g} \qquad (9\text{-}51)$$

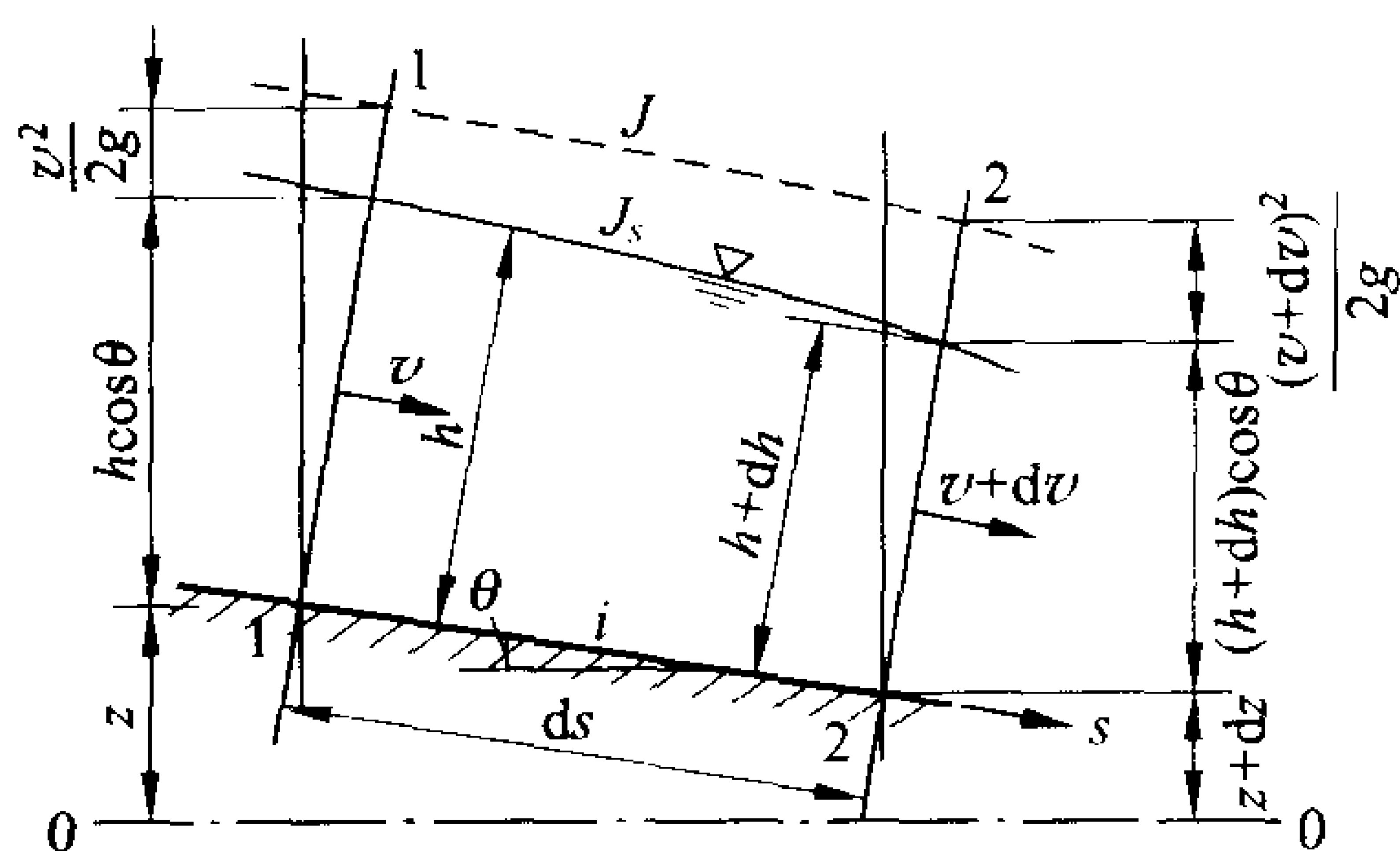


图 9-13 非均匀渐变流动[1]

于是

$$\frac{dH}{ds} = -J = \frac{dz}{ds} + \frac{dh}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \tag{9-52}$$

即为明槽恒定渐变流动的基本微分方程。在恒定的均匀流动或渐变流动中总水头损失只考虑摩阻力所引起的沿程水头损失，因此总水头坡度$\frac{dH}{ds}$与摩阻坡度（或称水力坡度）J 相等。当总水头线沿程降低时 J 为正，因此$\frac{dH}{ds}=-J$。同样 $i=\sin\theta=-\frac{dz}{ds}$。由谢才公式(9-44)可得

$$J = \frac{v^2}{C^2R} \tag{9-53}$$

由于流速变化与过水断面变化的关系为 $v=\frac{Q}{A}$，其中 Q 为常量，于是

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{ds}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{ds}$$

$$\frac{\partial A}{\partial h} = B$$

将这些关系式代入式(9-52),得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \frac{i - J + \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial s}}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}} \tag{9-54}$$

对于棱柱形明槽,即断面形状及尺寸沿程不变的长直明槽,过水断面面积 A 只与水深 h 有关,所以 $\frac{\partial A}{\partial s}=0$,于是

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \frac{i - J}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}} \tag{9-55}$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \frac{i - J}{1 - Fr^2} \tag{9-56}$$

由式(9-55)或式(9-56)可以分析不同底坡的棱柱形明槽中渐变流动水面曲线的各种变化。明槽流动中水面曲线的各种型式如图 9-14 所示。

1. 正底坡($i>0$)的明槽

根据流量大小和槽身形状、尺寸、粗糙程度的不同可分为缓坡($i<i_c$),临界坡($i=i_c$)及陡坡($i>i_c$)三种情况。

(1) 缓坡明槽为 $i<i_c$,见图 9-14(a)所示。图中 N-N 为正常水深线,C-C 为临界水深线。缓坡明槽中 $h_0>h_c$,所以 N-N 线高于 C-C 线。由 N-N 线和 C-C 线将流动分为三个区域,两条线之上为 1 区,两条线之间为 2 区,两条线之下为 3 区。必须指出一条连续变化的水面曲线一般只能在一个区内发生。

1 区:水深 $h>h_0$,水面曲线在 N-N 以上,水深的变化 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}$ 可由式(9-56)得知:此种情况下 $h>h_c$,因此 $Fr<1$,$1-Fr^2>0$,式(9-56)

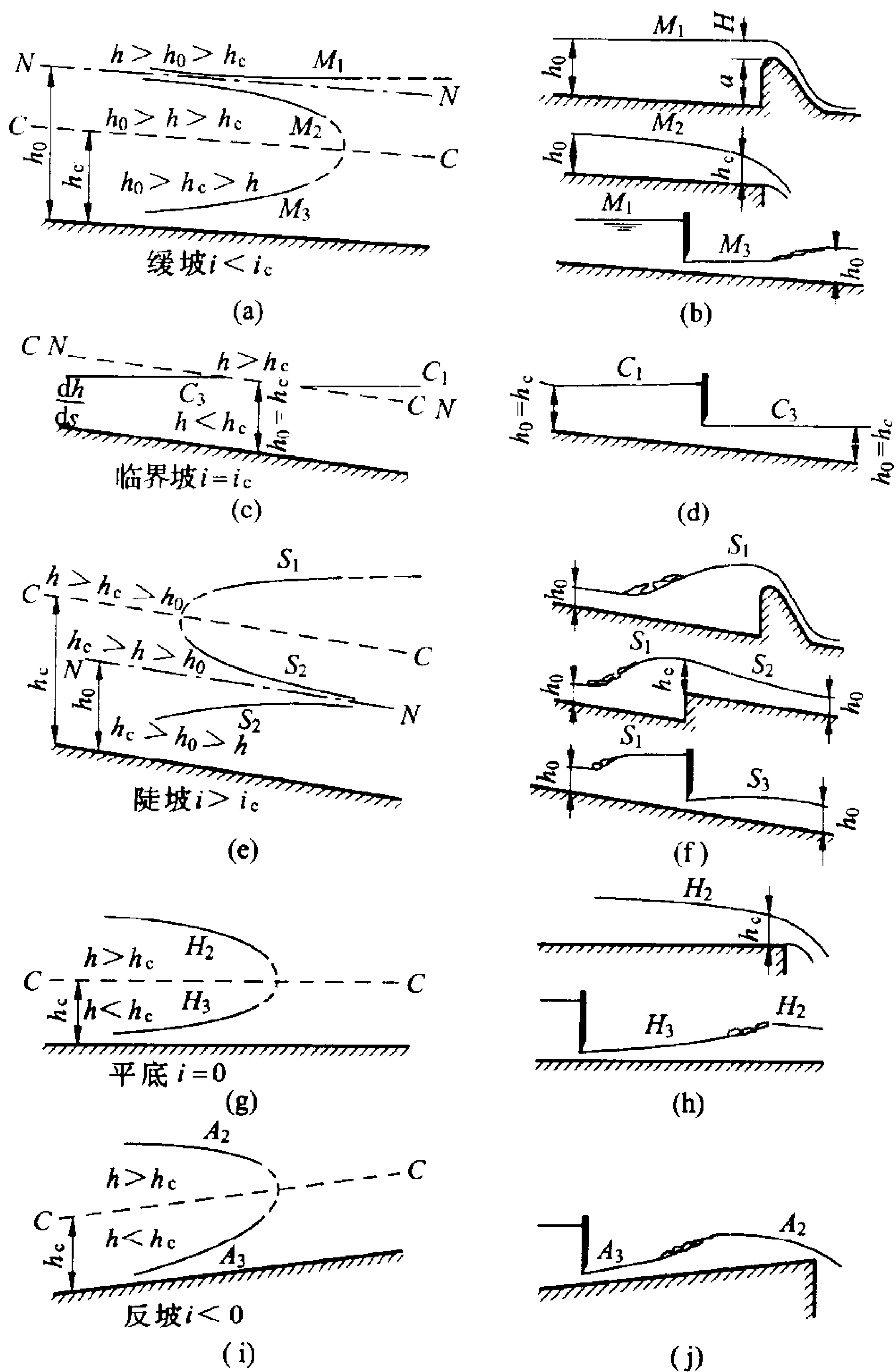


图 9-14 明槽渐变流动的水面曲线型式[1]

中分母为正。又 $h>h_0$ 即水深大于正常水深，流速小从而水头损失小，$J<i,i-J>0$，式(9-56)中分子也为正。从而$\frac{dh}{ds}>0$，水深 h 沿程增加，此时的水面曲线称为 M_1 型水面线，即壅水曲线(backwater curve)。由式(9-56)还可看出：当 $h\to h_0$，则$J\to i$，$\frac{dh}{ds}\to 0$ 即水深沿程不变为均匀流。当 $h\to\infty$时 $J\to 0$，$Fr\to 0$，所以$\frac{dh}{ds}\to i$，单位距离中水深的增加与槽底的降低相等，可见水面线为一水平线。这样得到 M_1 型水面线的两个极限状况：一端以正常水深浅 N-N 为渐近线；另一端以水平线为渐近线。在缓坡河渠中修建挡水建筑物，抬高水位使控制水深$(a+H)$超过相应流量的正常水深时，建筑物上游将出现 M_1 型水面曲线，见图 9-14(b)。

2 区：$h_0>h>h_c$，水面曲线在 N-N，C-C 两线之间。在式(9-56)中，因 $h>h_c$，$Fr<1$，$1-Fr^2>0$ 所以分母为正；又因 $h<h_0$，$J>i$，$i-J<0$，所以分子为负。因此式(9-56)$\frac{dh}{ds}<0$ 即水深沿程减小，为降水曲线(drawdown curve)M_2。它的一端以 N-N 为渐近线；另一端当 $h\to h_c$ 时 $Fr\to 1$，流态接近临界流，$\frac{dh}{ds}\to-\infty$，水面线与 C-C 线正交。注意此处水深急剧降落已不是渐变流，将发生由缓流到急流的过渡现象——水跌(详见下节)。在渠道末端若水位低于渠尾的正常水深，即形成 M_2 型水面曲线，见图 9-14(b)。

3 区：$h<h_c<h_0$，水面曲线在 C-C 线之下的区域。由于$h<h_0$，$J>i$，$i-J<0$，所以式(9-56)的分子为负；又因 $h<h_c$，$Fr>1$，$1-Fr^2<0$，所以式(9-56)的分母为负。于是$\frac{dh}{ds}>0$ 水深沿程增加为壅水曲线 M_3，流动为急流。当水深沿程增加接近 h_c 时，$Fr\to 1$，$\frac{dh}{ds}\to\infty$，水面线与 C-C 线正交。这里水深急剧增加已不是渐变

流，将发生由急流到缓流的过渡现象——水跃（详见下节）。缓坡渠道上闸门部分开启时，可能发生 M_3 型水面曲线，见图9-14(b)。

（2）临界坡明槽为 $i=i_c$，见图 9-14(c)。正常水深 h_0 等于临界水深 h_c，N-N 线与 C-C 线重合，因此只有在 1 区与 3 区中存在渐变流动，而在 2 区中流动只能是均匀的临界流动可称为 C_2 型水面线，但一般不包含在渐变流动的水面曲线类型中。1 区中为缓流的壅水曲线，为 C_1 型曲线。3 区中为急流的 C_3 型壅水曲线。在矩形宽槽中这两条线均以水平线为其渐近线。图 9-14(d)示出了闸前和闸后出现的 C_1，C_3 型壅水曲线。

（3）陡坡明槽为 $i>i_c$，见图 9-14(e)。正常水深 h_0 小于临界水深 h_c，N-N 线位于 C-C 线之下，流动同样可分为三个区域。1 区为 S_1 型壅水曲线，2 区为 S_2 型降水曲线，3 区为 S_3 型壅水曲线。在水深趋近于正常水深时，流动以均匀流水深线 N-N 为渐近线。当水深趋近于临界水深时，则将发生缓流到急流或急流到缓流的过渡现象——水跌或水跃。水面线与临界水深线 C-C 垂直。实例参见图 9-14(f)。

2. 平底坡（$i=0$）的明槽

平底明槽中重力在流动方向的分力为零，不可能出现均匀流，只有临界水深线 C-C。流动分为 2，3 两个区域而不存在 1 区，见图 9-14(g)。对于平底明槽，式(9-56)变为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}=\frac{-J}{1-Fr^2} \qquad (9\text{-}57)$$

在 2 区内为 H_2 型降水曲线，在 3 区内为 H_3 型壅水曲线。

3. 反坡（$i<0$）的明槽

反坡明槽中同样不可能形成均匀流，只有临界水深线 C-C。流动在 2 区内为 A_2 型降水曲线而在 3 区内为 A_3 型壅水曲线。

由以上分析可见，在各种不同坡度的情况下水面曲线共有 12 种型式，它们之间有很多共同的特点。水面曲线的具体计算方法

可参阅专业书籍。

9.4 明槽水流运动中两种流态的过渡

由上节可知明槽流动中常常发生流态的过渡，包括由缓流向急流的过渡——水跌和由急流向缓流的过渡——水跃。过渡现象一般都发生在较短的流程内，水流的水面和流速分布都有急剧的变化，属于急变流动。急变流动中流动结构在短距离内发生急剧的变化，表现为流速分布的重新调整和流速的强烈脉动，有时主流与边界分离而形成回流区的漩滚。由于流线有较大曲率，离心惯性力不能忽略从而过水断面上压强不再符合静水压强分布的规律。由于这种水力现象发生在较短距离内因而沿程摩阻损失可以忽略，但是局部水头损失往往巨大。流态的过渡现象可以用来解决某些工程中的问题。

9.4.1 由缓流到急流的过渡——水跌

缓流状态的明槽水流，当下游槽身断面形状突然改变或槽底坡突然变为陡坡($i>i_c$)，这时水面将急剧降落，水流以临界流状态通过这个突然改变的断面，转变为急流。这种从缓流向急流过渡的局部水力现象称为“水跌”(hydraulic drop)。图 9-15(a)表示缓坡渠道中跌坎处发生的水跌现象。缓坡明槽中原系均匀流动，水深为 h_0，水面线 N-N 和总水头线 E'-E'与底坡线平行。水流行至 D 处突然出现了跌坎，意味着在 D 点下游突然失去了原来承托水流的槽壁压力及壁面对水流的阻力，显著改变了跌坎断面上水流的受力条件，使重力的主导作用得到充分发挥。重力将跌坎上水流的势能转变为动能，使水流成为加速流动，并使水面尽可能地向下降落。D 点上游的水流将由均匀流动转变为图 9-14(b)中的 M_2 水面曲线。

图 9-15(b)中绘出了 D 点过水断面的比能曲线，以 D 点槽底

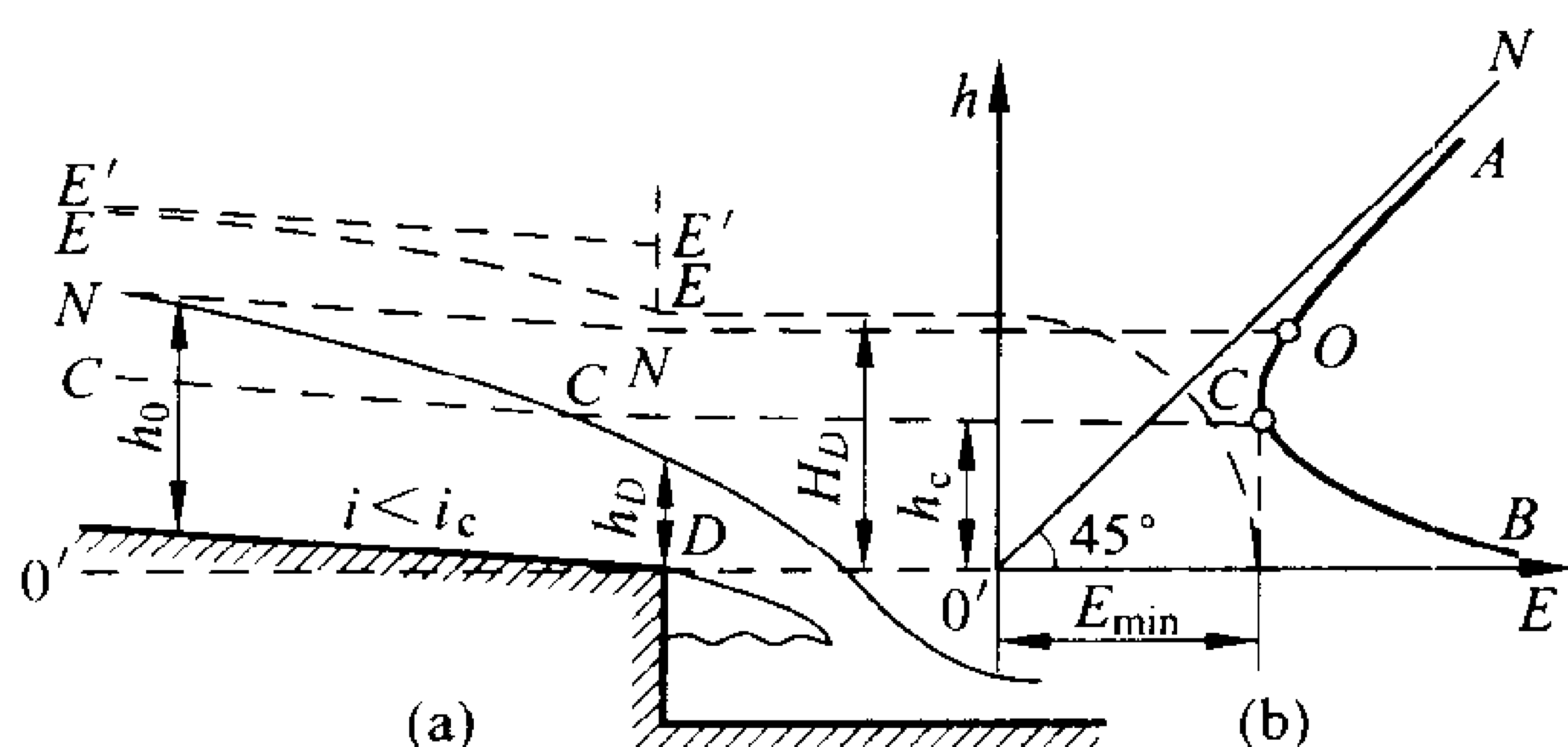


图 9-15 水跌[1]

为基准线。曲线上 O 点表示明槽中原为缓流均匀流的情况，水深 h_0。当水流加速，水深减小时，断面单位能量将在比能曲线上由 O 点向 C 点移动。显然，在重力作用下坎上水面最低只能降到 C 点，即水流断面比能为最小的临界情况（因为如继续降低，则转换为急流状态，断面比能反而增加，这是不可能的）。如果取 0′-0′为基准线以研究沿流程各断面的能量变化，则在 D 断面处总水头达到最小值，$H_D = H_{\min} = E_{\min}$。所以在已知流量下跌坎处的极限水深是断面比能最小的临界水深 h_c。

但是，由于跌坎断面处所发生的水力现象已不是渐变流而是急变流，流线的曲率较大，过水断面上的压强分布已不符合静水压强分布，必须考虑离心力的作用，水深 h 已不能代表断面上的平均单位势能。所以跌坎处的临界水深与式(9-38)、式(9-39)在均匀流或渐变流中得到的临界水深在数值上应有差别，但其物理内涵则没有本质的差别。可以把均匀流比能公式作以下修正：

$$E = \beta h + \frac{\alpha v^2}{2g} \tag{9-58}$$

式(9-58)为急变流的比能公式。系数 β 反映了考虑离心惯性力后压强不再是静压分布而对断面平均单位重量水体的势能所作的修正。由 2.4.4 节可知：这里的水面线为凸曲线，$\beta<1.0$；当流线为弯曲下凹时，则 $\beta>1.0$。

由于跌坎 D 处 $\beta<1.0$，因此该处的临界水深 h_{c_D} 必小于均匀流临界水深 h_c。比能曲线应与图 9-15(b)有所不同。由实验得知：$h_c=1.4h_{c_D}$，而 h_c 值的水深发生在坎端上游，离坎端(3～4)h_c 的位置。

跌坎可以理解为明槽底坡在跌坎 D 处突然变为无穷大，即 $i=\infty$ 的情况。当 D 点处底坡由缓坡($i<i_c$)变为陡坡($i>i_c$)时，也会发生由缓流到急流的过渡现象，水面急剧跌落，坡度转折的 D 点为临界流动断面，如图 9-16 所示。在进行水面曲线计算时，这种能够形成临界流动的突变断面可以作为控制断面。

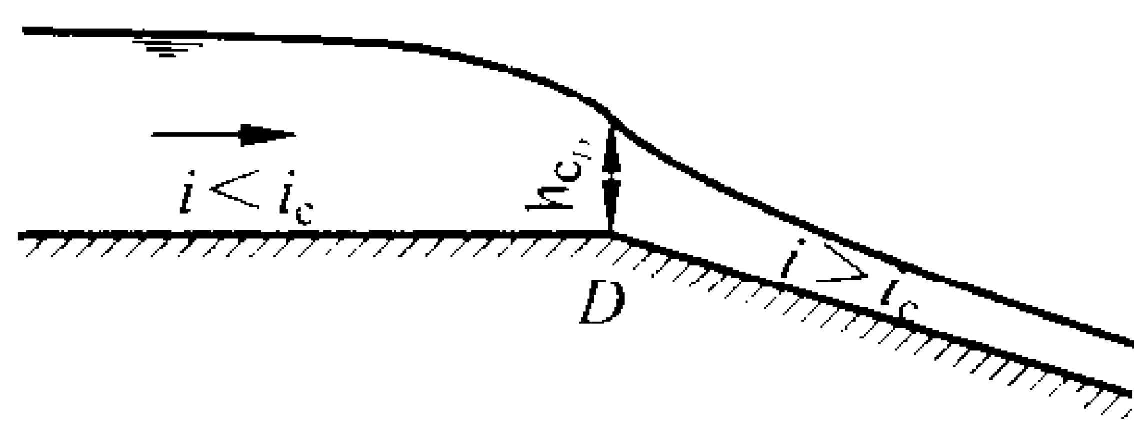


图 9-16　跌坎水流[1]

堰(weir)流是利用水跌现象的实例，在工程中有广泛的用途。堰顶溢流(overflow through weirs)的水流情况视堰顶厚度 δ 与堰上水头(head on crest)H 的比值而变化，但其流动的基本特征却是一样的。由于筑堰挡水，堰上游水深增加。当水流趋近堰顶时流股断面收缩，动能增加而势能减小，水面明显下降，而在堰顶会出现临界流动断面。堰流中起主要作用的力是重力，但由于堰顶水流流速变化大，流线弯曲，惯性力也较为显著。粘性的作用主要反映在局部水头损失中，固体边界的粘性阻力作用对流动的影响可以忽略，因此堰流可以作为理想流体的有势流动来分析。

以图 9-17 所示的流经薄壁堰(sharp-crested weir)的流动为例。由平面势流理论可绘出流网，从而计算流速及压强的分布。所谓薄壁堰是指堰墙的厚度 δ 小于堰上水头 H 的 67%，即 $\delta<0.67H$。图 9-18 表示出因重力作用使自由水面降落的范围限于堰壁上游离堰壁(3～4)H 的距离内。堰上水头就是指在堰壁上游离堰壁(3～4)H 处由堰顶到水面的距离。由实验量测得到：贴近堰壁的流线绕过堰顶因惯性脱离堰顶向上弯曲至水舌下缘的

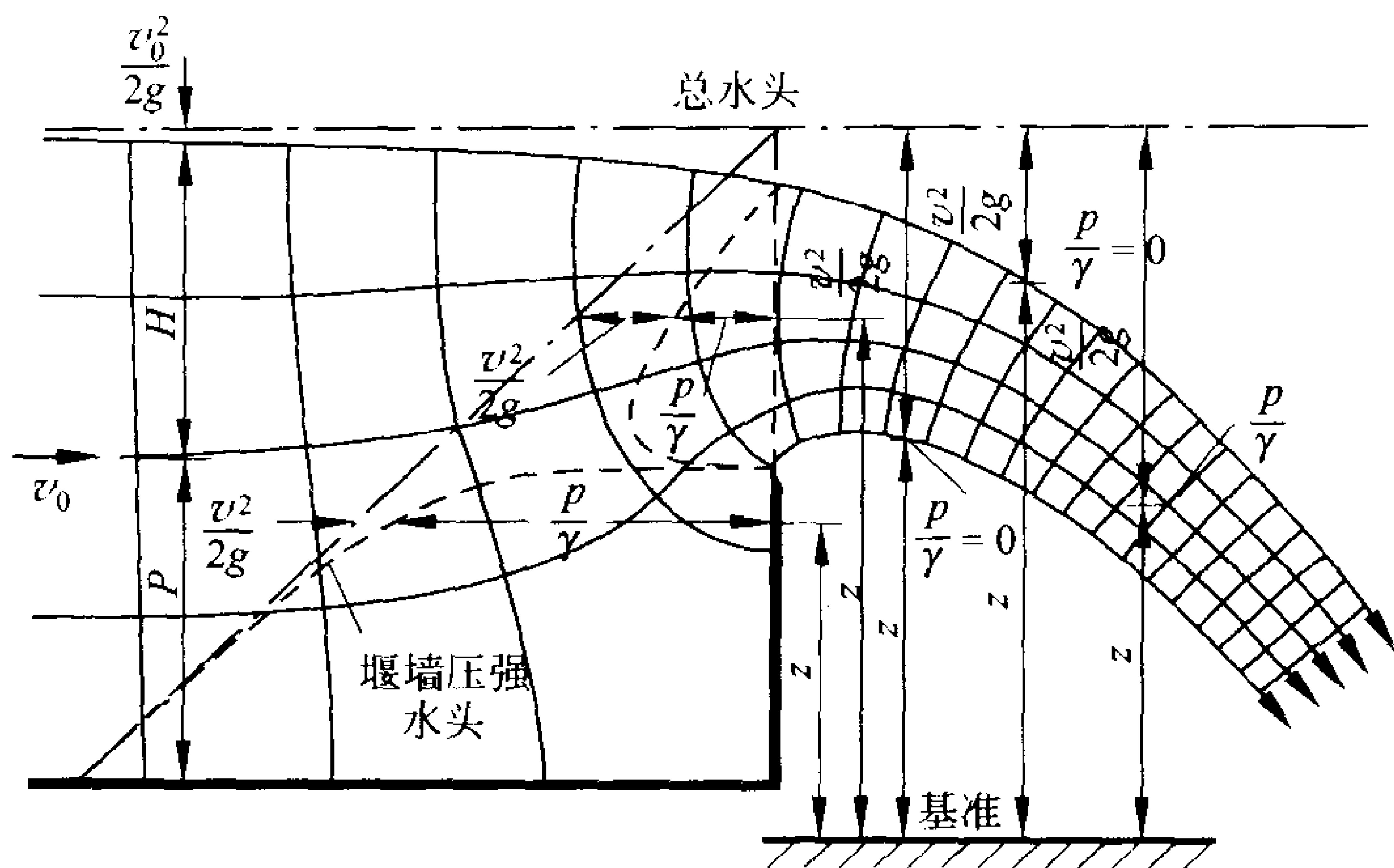


图 9-17　薄壁堰溢流的典型流网[2]

最高点，然后因重力作用而向下流动，水舌下缘与堰顶在同一高度的点至堰上游壁面的水平距离为 0.67H，见图 9-18。这表明将壁堰 $\delta<0.67H$ 的意思就是表示水舌的下缘不会碰到堰墙，说明堰墙对溢流无影响。

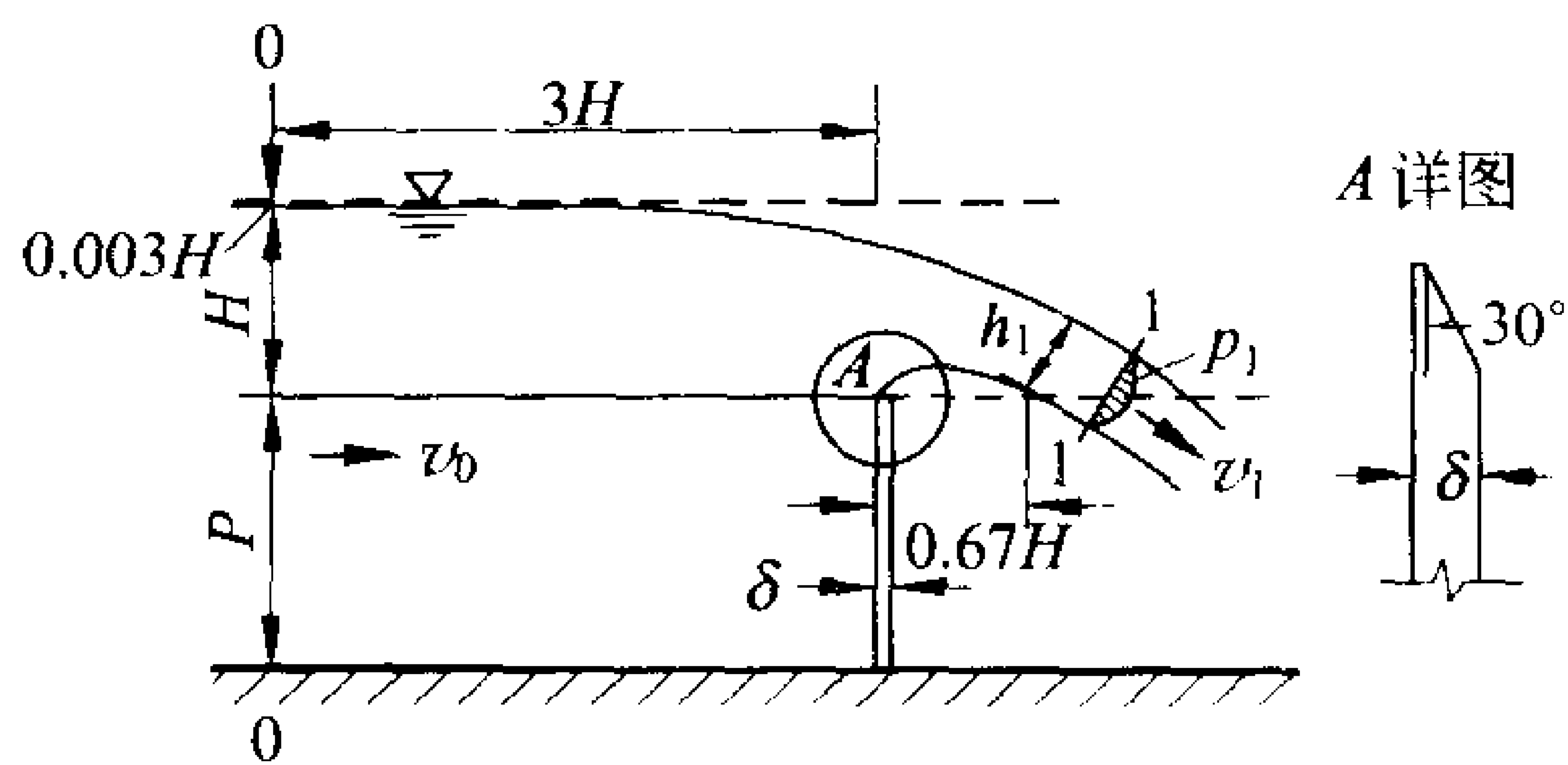


图 9-18　薄壁堰溢流[1]

堰流的主要问题是过水能力的问题，也就是要建立各种堰型的溢流量与堰上水头的关系，可以由势流理论推求得到。但工程

中应用的是如下说明的总流分析方法。以堰顶 A 的高程为基准，对过水断面 0-0(即堰壁上游离堰壁 $3H$ 处，量取堰上水头的断面)及断面 1-1 写伯努利方程。断面 1-1 中与堰顶高程相同的点，该处流线已接近平行，为渐变流断面但断面内各点压强并不全等于水舌外缘的大气压强(相对压强为零)。假定 1-1 断面平均压强为 $\left(\frac{p_1}{r}\right)_m$，则

$$H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=\left(\frac{p_1}{r}\right)_m+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+\zeta\frac{v_1^2}{2g}$$

式中：v_0，v_1 分别为 0-0，1-1 断面的平均流速；α_0，α_1 为相应断面的动能修正系数；ζ 为局部水头损失系数。令

$$H_0=H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g},\quad \varphi=\frac{1}{\sqrt{\alpha_1+\zeta}},\quad \left(\frac{p_1}{r}\right)_m=\xi H_0$$

则

$$v_1=\varphi\sqrt{2gH_0(1-\xi)}$$

设断面 1-1 水舌厚度为 kH_0，b 为堰顶宽度，则堰顶溢流的流量 Q 为

$$Q=kH_0bv_1=k\varphi b\sqrt{1-\xi}\sqrt{2g}H_0^{\frac{3}{2}} \qquad (9\text{-}59)$$

令

$$m=k\varphi\sqrt{1-\xi}$$

则

$$Q=mb\sqrt{2g}H_0^{\frac{3}{2}} \qquad (9\text{-}60)$$

m 称为流量系数(discharge coefficient)，它反映了水股的收缩程度(k)和水头损失(φ)及水股中的压强分布(ξ)，k 和 φ 及 ξ 都是随堰的几何边界条件而变化的。因此对于各种类型的堰，其流量系数 m 均不同，但流量公式的型式却是一致的。工程中有时堰下游水位较高，淹没了堰顶，改变了堰顶的临界流动状态，对水流的下泄形成遏阻的作用，从而可能降低过水能力。或者有时堰顶过流

的宽度小于上游来流的水面宽度，使过堰水流侧边发生收缩，减小过流宽度，增加局部水头损失，也会降低过水能力，这些情况可参考工程水力学有关书籍。

如将趋近流速水头(approaching velocity head)$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$的影响包含在流量系数中，则式(9-60)可写为

$$Q=m_0 b\sqrt{2g}H^{\frac{3}{2}} \tag{9-61}$$

m_0 是新的流量系数。使用此公式则只要量测堰上水头 H 即能计算溢流量。流量系数需通过实验确定，矩形薄壁堰流量系数 m_0 多采用巴赞(BazinH. E.)经验公式，该公式为

$$m_0=\left(0.405+\frac{0.0027}{H}\right)\left[1+0.55\left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right] \tag{9-62}$$

式中：$\frac{0.0027}{H}$反映表面张力的作用；方括号内反映趋近流速水头的影响；H 以米(m)计。

式(9-62)适用范围为 $H=0.1\sim0.6$m，堰宽 $b=0.2\sim2.0$m 及 $H\leqslant 2P$ 的情况(P 为上游堰高)。系数误差在 1%左右。还有其他经验公式可资选用，不一一细述。

9.4.2 由急流到缓流的过渡——水跃

明槽水流中当水流由急流状态过渡到缓流状态时，水面将突然跃起，并在水面形成旋滚或波浪，这种局部水力现象称为水跃(hydraulic jump)。闸底出流的下游、溢流坎的底部以及陡坡明槽坡度突然变缓处都会发生水跃现象。工程中常利用水跃作为消能措施。

对水跃进行试验研究，最初是由意大利人碧丹(Giorgio

Bidone)于1818年完成的[①②]。百余年来很多学者在水跃的研究中做了大量工作，在理论方面和实用上都得到丰富的成果。

图9-19表示实验室玻璃水槽中平板闸门下出流所形成的一个完整水跃。闸门出流为急流，下游为缓流。由图可以看出水跃区的水流可以分为两部分：上部是急流冲入缓流所激起的表面水滚，回旋翻腾，饱掺空气；表面水滚下面则是断面逐渐扩深和流速由大变小的主流。主流与水滚的交界面紊动掺混极为强烈，不断进行质量交换。在确定水跃区的范围时，通常将表面水滚的前端称为跃首或跃前断面，该断面水深 h' 称为跃前水深（initial depth）。表面水滚的末端称为跃尾或跃后断面，该断面水深 h'' 称为跃后水深(sequent depth)。跃前水深与跃后水深之差称为跃高(height of jump)。跃前跃后两断面之间的距离称为水跃长度(length of jump)。跃前水深与跃后水深存在一定的关系，所以称为共轭水深(conjugate depths)。

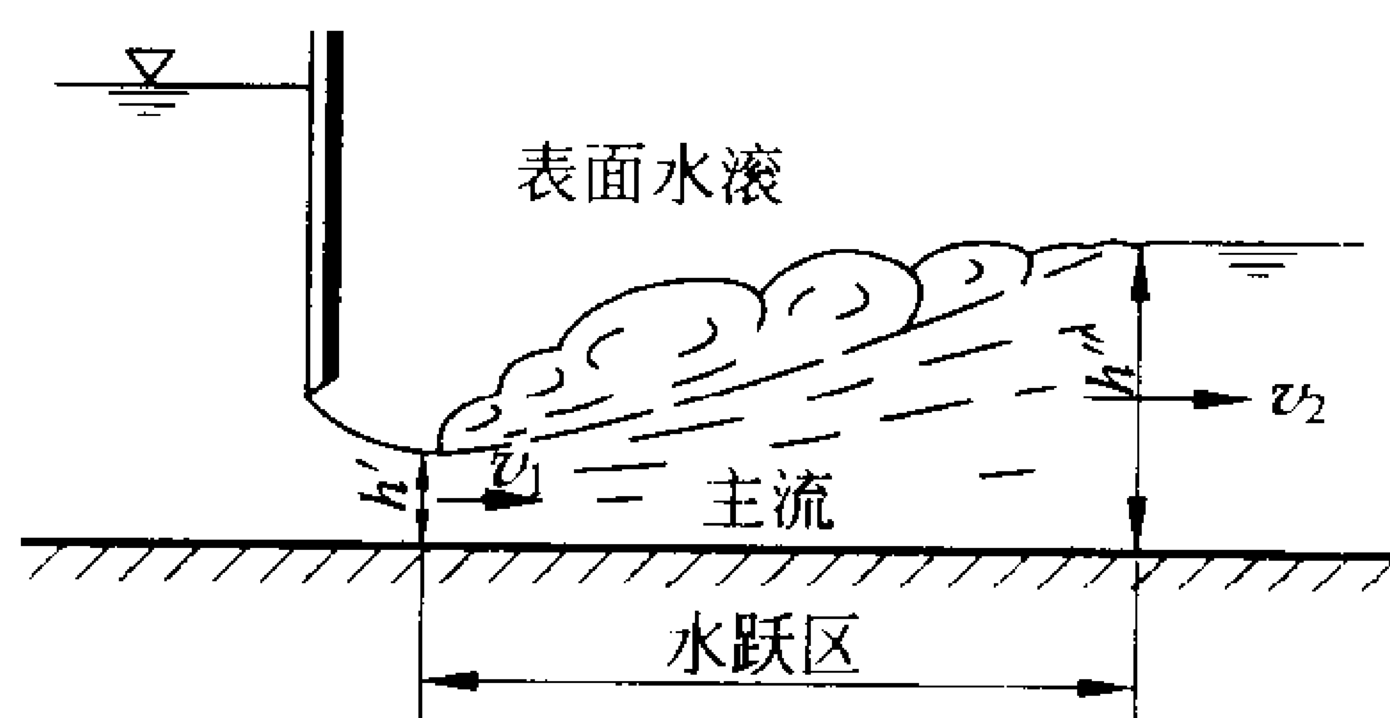


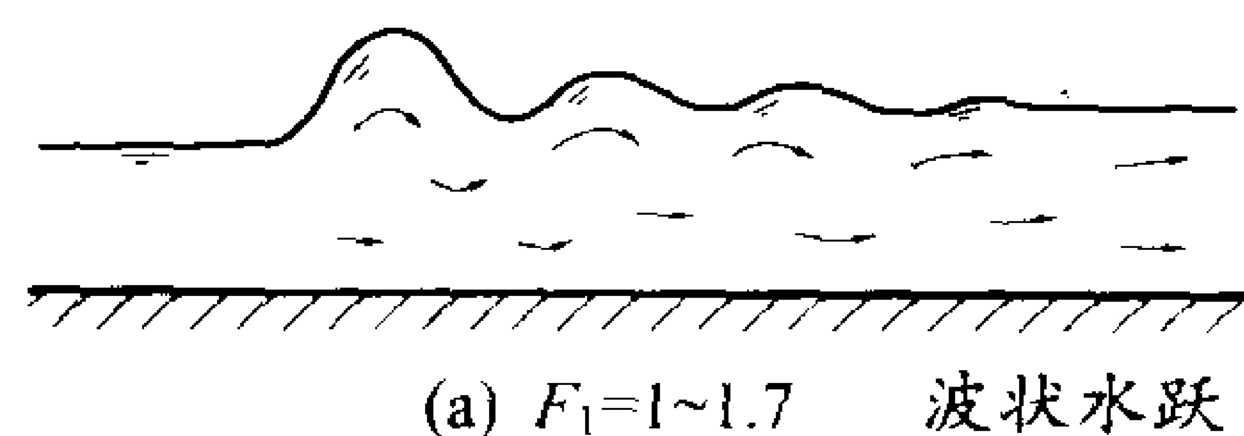
图 9-19　水跃现象[1]

① Giorgio Bidone: Observations sur le hauteur du ressaut hydraulique en 1818 (Observations on the height of the hydraulic jump in 1818), a report presented at the Dec. 12, 1819, meeting of the Royal Academy of Science of Turin and later incorporated as a part of ②, 21～80

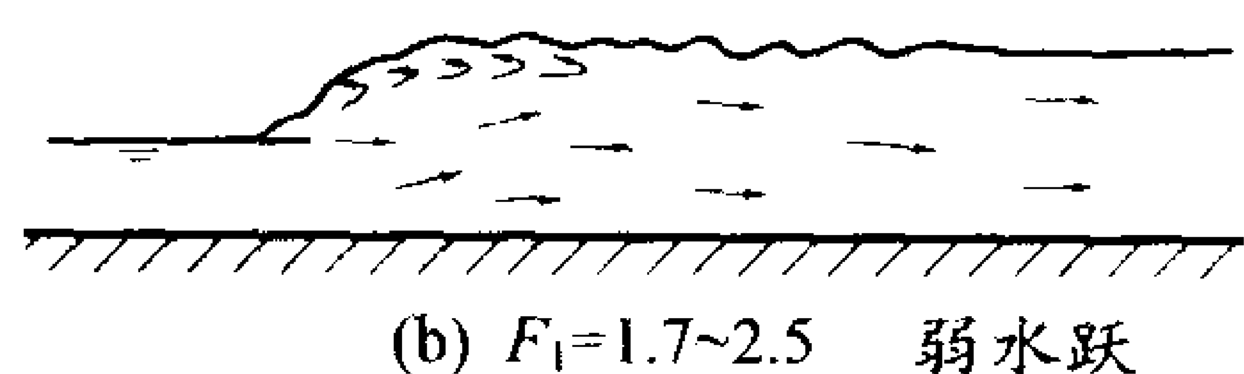
② Giorgio Bidone: Expériences sur le remous et la propagation des ondes (Experiments on backwater and the propagation of waves), *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, Turin, 1820, vol. 25: 21～112

平底坡明槽中的水跃可根据其跃前断面水流弗劳德数 Fr_1 而分为以下五种类型(见图 9-20 所示):

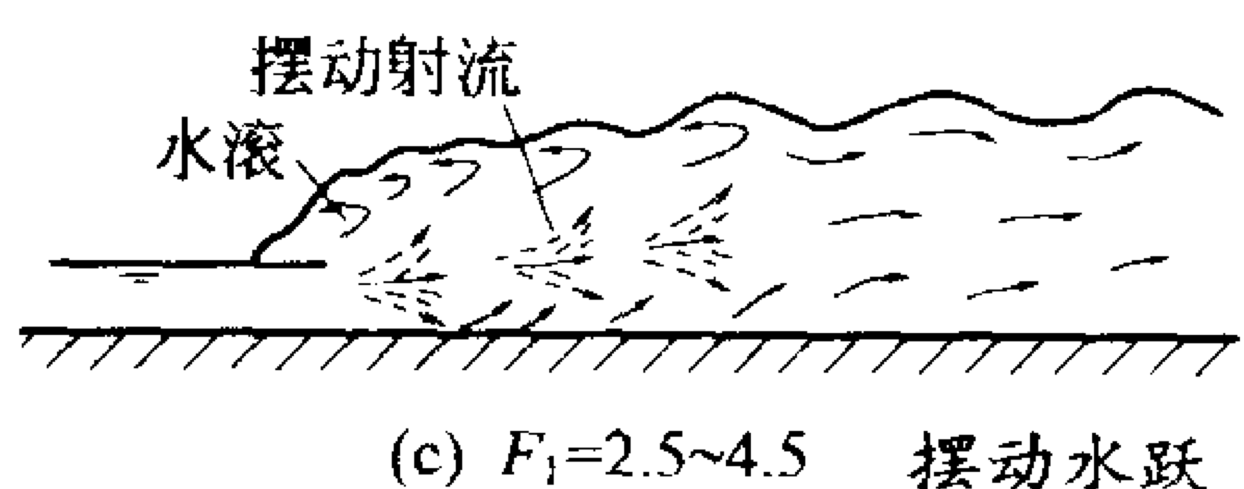
(1) 波状水跃(undular jump)　当 $Fr=1.0$ 为临界流动,自然不会有水跃形成。当 $Fr_1=1\sim1.7$ 时,水面发生波动从而将这一类水跃称为波状水跃,如图 9-20(a)。



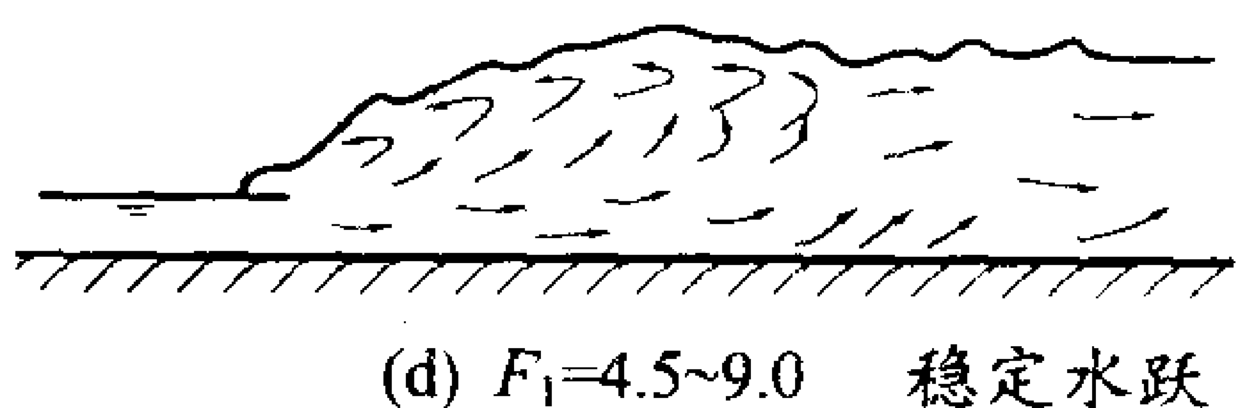
(a) $F_1=1\sim1.7$　波状水跃



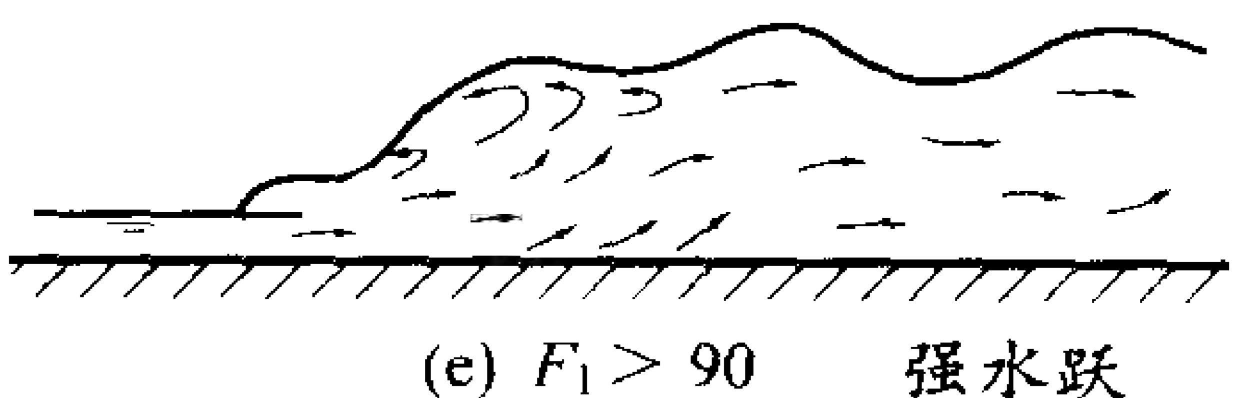
(b) $F_1=1.7\sim2.5$　弱水跃



(c) $F_1=2.5\sim4.5$　摆动水跃



(d) $F_1=4.5\sim9.0$　稳定水跃



(e) $F_1>90$　强水跃

图 9-20　水跃类型[4]

(2) 弱水跃(weak jump)　当 $Fr_1=1.7\sim2.5$ 时,水跃表面产生一系列小的旋滚而跃后水面比较平稳光滑,称为弱水跃。消能效果较小,消能效率一般小于 20%。

(3) 摆动水跃(oscillating jump)　当 $Fr_1=2.5\sim4.5$ 时有摆动射流进入水跃底部并向上窜升，这是一种间歇现象。这种现象没有周期性，它产生大的波浪可以在渠道中向下游传播数公里之远并可造成两岸土堤的损坏。它的消能效率为 20%～45%。

(4) 稳定水跃(steady jump)　当 $Fr_1=4.5\sim9.0$ 时，形成一种良好稳定的水跃。跃前跃后断面的位置比较稳定，对尾水位的变化并不太敏感。跃后下游水面比较平稳。消能效率比较高，可达45%～70%。

(5) 强水跃(strong jump)当 $Fr_1>9.0$ 此种情况下，高速射流挟带间歇发生的水团不断滚向下游，在下游产生较大的水面波动。消能效率可高达 85%。

为说明水跃现象的一些基本特征，本章中将对平底矩形宽敞明槽中发生的自由水跃进行研究。有关水跃的其他情况例如斜坡上的水跃，其他各种形状明槽中的水跃，各种消能附属建筑物(如齿坎、消力墩)存在情况下的水跃等可参考工程有关书籍。

平底矩形宽槽中不计两侧边墙的影响，可以作为二维问题分析。明槽中不设置任何障碍物，单纯由下游水深形成的水跃称为自由水跃，如图 9-21 所示。设发生水跃时流量为 Q，此时跃前在

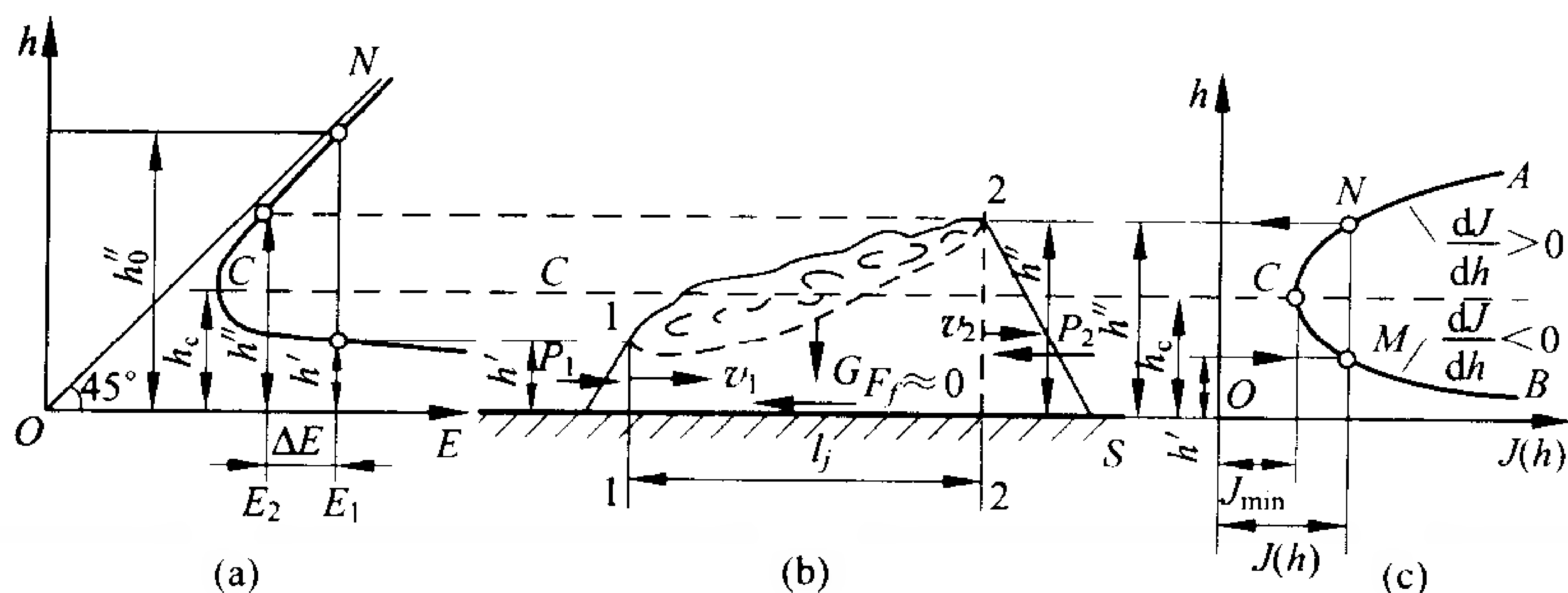


图 9-21　平底槽中的自由水跃

断面 1-1 处的水深为 h'，断面平均流速为 v_1，断面 2-2 为跃后断面，水深为 h''，断面平均流速为 v_2，水跃长度为 l_j。应用恒定总流的动量方程式(9-24)。沿流动方向为 s，这个方向上作用力有：跃前、跃后两个断面上的水压力 P_1，P_2 及作为面积力的摩擦阻力 F_f，而体积力有重力在流动方向的分力 $G\sin\theta$，因此动量方程式为

$$\rho Q(\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1) = P_1 - P_2 + G\sin\theta - F_f \tag{9-63}$$

假设水流与槽壁及槽底的粘性摩擦阻力可以忽略不计，则 $F_f \approx 0$，跃前与跃后断面动量修正系数 $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0$，跃前与跃后断面处均为渐变流动，因而断面上为静水压强分布，对于平底明槽 $\sin\theta = 0$，式(9-63)写为

$$\frac{\alpha_0 \gamma}{g} Q(v_2 - v_1) = P_1 - P_2 \tag{9-64}$$

由于 $P_1 = \gamma y_{c_1} A_1$，$P_2 = \gamma y_{c_2} A_2$，其中 y_{c_1} 和 y_{c_2} 分别表示两断面 1-1 和 2-2 的形心在水下的深度，A_1 和 A_2 为两断面的过水面积，又 $v_1 = \dfrac{Q}{A_1}$，$v_2 = \dfrac{Q}{A_2}$，因而式(9-64)可写为

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{gA_2} + y_{c_2} A_2 = \frac{\alpha_0 Q^2}{gA_1} + y_{c_1} A_1 \tag{9-65}$$

式(9-65)为平底棱柱形明槽中的水跃方程。它说明在水跃区内，单位时间内流入跃前断面的动量和该断面上动水总压力之和与单位时间内流出跃后断面的动量和该断面上动水总压力之和相等。对于一定形状和尺寸的断面，A 和 y_c 都是水深 h 的函数，所以当 Q 给定，$\left(\dfrac{\alpha_0 Q^2}{gA} + y_c A\right)$ 也只是水深 h 的函数，即

$$\frac{\alpha_0 Q}{gA} + y_c A = J(h) \tag{9-66}$$

$J(h)$ 称为水跃函数。水跃的共轭水深为 h'，h''。所以

$$J(h'') = J(h') \tag{9-67}$$

式(9-67)说明对于某一流量 Q 存在两个具有共同水跃函数的水

深，即为共轭水深。可绘制相应某一流量的棱柱形明槽的水跃函数曲线如图 9-21(c)所示。当$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}h}=0$，可得 $J=J_{\min}$时，有

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g}=\frac{A^3}{B} \tag{9-68}$$

式中的 B 为水面宽度。如假设 $\alpha_0=\alpha$，则此式说明当水跃函数 $J(h)$为最小值时，水深为临界水深，如图中 C 点所示。水跃函数曲线以 C 点为界分为上下两支，上支$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}h}>0$，$J(h)$相应为缓流中的水跃函数，下支$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}h}<0$，$J(h)$相应为急流中的水跃函数。当已知共轭水深之一，如 h'时，在该水深处作水平线交 $J(h)$曲线于一支上的 M 点得相应水跃函数 $J(h')$值，自 M 点作平行 h 轴的直线与 $J(h)$曲线的另一支交于 N 点，此点的水深即 h''。用同样的方法可由 h''求 h'。

在图 9-21(a)中还绘出了比能曲线。这里由于是平底棱柱形明槽，各个不同断面的断面最低点高程是相同的，各个断面的比能曲线也是相同的，因此图中的比能曲线对于跃前断面和跃后断面均适用。由图看出在跃前断面水深为 h'，相应的断面比能为 E_1，而相应跃后断面的水深为 h''，比能为 E_2，$E_2-E_1=\Delta E$ 即为通过水跃消减的能量。相应于 E_1 的缓流中水深 h''_0不可能在跃后出现。

类似断面比能的概念也可将水跃函数 $J(h)$称为断面比力(specific force)[4]。但是断面比力曲线中对于相同比力而得到的两个水深是指两个不同断面中的水深，这一点与比能曲线不同。应用水跃函数(或比力)曲线的优点在于不必知道水跃的能量耗损，而直接得到共轭水深。需要注意的是：在推导过程中由于应用的是平底明槽在很短的距离内的两个断面，因而忽略了重力及摩擦阻力的作用，否则问题将变得复杂。

当棱柱形明槽为矩形宽槽，单宽流量 $q=\frac{Q}{b}$，b 为槽宽，过水断面面积 $A=bh$，形心高度 $y_c=\frac{h}{2}$。将这些关系代入式(9-65)，可得

$$\frac{\alpha_0 q^2}{gh''}+\frac{h''^2}{2}=\frac{\alpha_0 q^2}{gh'}+\frac{h'^2}{2}$$

解此式可得

$$h''=\frac{h'}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8\alpha_0 q^2}{gh'^3}}-1\right) \tag{9-69}$$

$$h'=\frac{h''}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8\alpha_0 q^2}{gh''^3}}-1\right) \tag{9-70}$$

当得知共轭水深中的一个可求另一个水深。因 $\frac{\alpha_0 q^2}{gh'^3}\approx\frac{v_1^2}{gh'}=Fr_1^2$，$\frac{\alpha_0 q^2}{gh''^3}\approx\frac{v_2^2}{gh''}=Fr_2^2$，所以

$$h''=\frac{h'}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1) \tag{9-71}$$

$$h'=\frac{h''}{2}(\sqrt{1+8Fr_2^2}-1) \tag{9-72}$$

Fr_1 和 Fr_2 分别为跃前和跃后断面水流的弗劳德数。由式可见：水跃的共轭水深比$\frac{h''}{h'}$主要决定于跃前断面急流的弗劳德数 Fr_1，Fr_1 越大，也就是说跃前急流的动能与势能的比值越大则形成水跃所需要的跃后水深与跃前水深的比值也越大。式(9-71)的自由水跃公式得到实验的验证，如图 9-22 所示。

由急流过渡到缓流的流段的长度即水跃长度的确定，由于现象复杂虽有一些理论分析但仍无成熟的结果，因此通常靠试验确定。下面给出几个不同型式的计算公式以资参考。

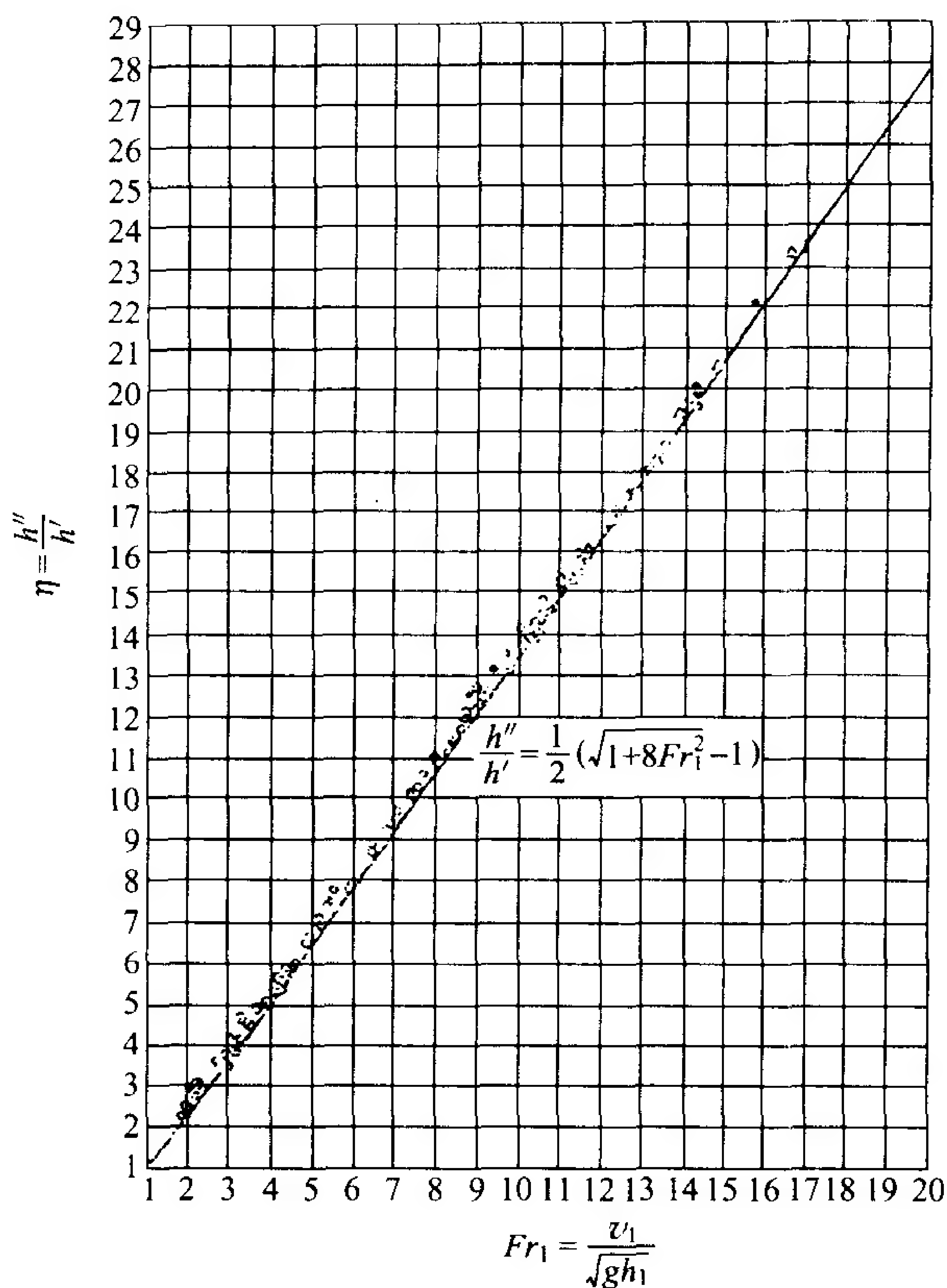


图 9-22　二维自由水跃[1]

（1）以跃后水深表示的公式如

$$l_j=6.1h''①\tag{9-73}$$

（2）以跃高$(h''-h')$表示的公式如

$$l_j=6.9(h''-h')②\tag{9-74}$$

---

① Hydraulic Design of stilling Basins and Energy Dissipators. U. S. Department of the Interior, Bureau of Reclamation. 1963

② Elevatorski E A. Hydraulic Energy Dissipators. 1959

(3) 包含跃前弗劳德数 Fr_1 的公式如

$$l_j = 9.4(Fr_1 - 1)h''\text{①} \tag{9-75}$$

$$l_j = 10.3(Fr_1 - 1)^{0.81}h'\text{②} \tag{9-76}$$

式(9-76)适用于 Fr_1 较小的范围如 $Fr_1 < 4.5$。

9.5 缓流与急流中的弯道水流

在明流渠道设计中或在天然河流中常会遇到弯道水流。弯道水流以其流线弯曲且曲率较大，都是急变流动。缓流与急流的弯道水流又各有其不同的特点。由于流线的曲率而产生离心惯性力，从而在弯道水流中产生凹岸水面较凸岸水面高的水面超高(super elevation)。弯道的横断面上产生断面环流，并形成渠道中的螺旋流动(spiral flow)。缓流弯道中水面变化比较平缓，水面超高较小；急流弯道中将出现冲击波，水面变化剧烈，产生更大的水面超高。

9.5.1 缓流弯道水流

1. 弯道中的水头变化

图 9-23 所示明槽中的 AB 段为一弯道(bend)，设上下游与弯道相切的直段明槽均有足够长度，因此远处都是均匀流动。对于弯道上游流动而言，当流动为缓流状态，弯道在明槽中的作用与任何明槽中的其他障碍物，例如堰、闸一样会使上游水位壅高，形成 M_1 型壅水曲线。A 点处水面升高设为 Δh。上游水面抬高后由于过水断面扩大，流速降低，从而沿程摩阻损失减小。但因明槽底坡并未改变，因此由重力提供的能量并未改变，从而使能量有所盈

---

① 陈椿庭．平底水槽二元水跃长度公式的比较．水利水电技术，1964

② 切尔托乌索夫 M.Д. 水力学专门教程(中译本)．1958

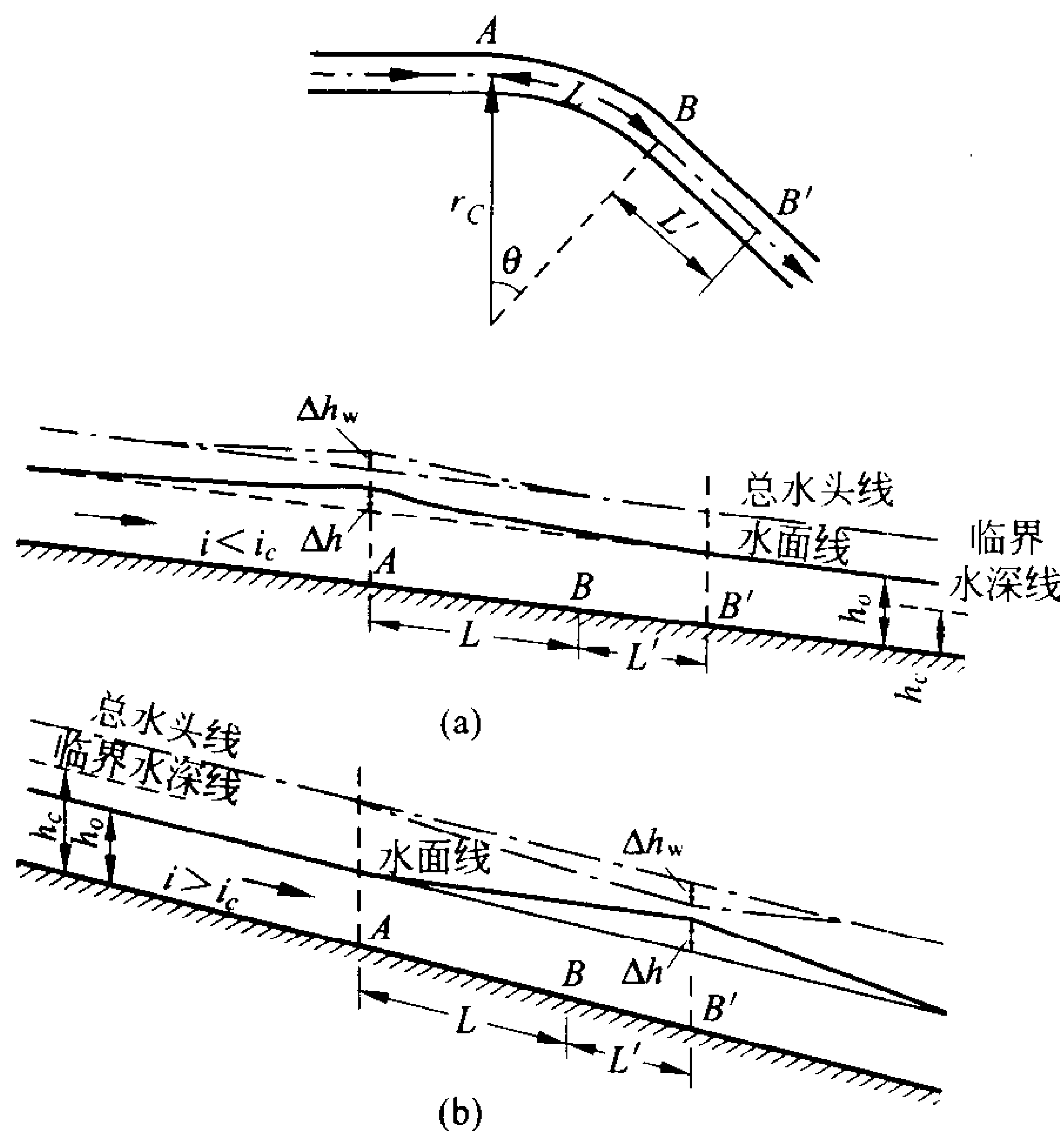


图 9-23 弯道水流[4]

余，在缓流中能量的盈余表现为水面的升高。A 点处断面能量较之均匀流情况增加为 Δh_w，增加的这部分能量将主要损失在弯道水流中，另有小部分损失在弯道下游的水流调整段 BB' 中。从而维持了整个明槽中能量的平衡。经过调整段 BB'，水流回复为下游明槽中的均匀流动，重力给予水流的能量与摩阻损失的能量达到新的平衡。正常水深为 h_0，总水头线、水面线与底坡线三者互相平行。弯道中的水头损失是由于存在断面环流，较大流速靠近凹岸，受到河床的阻力较直段大，而在弯道凸岸水流有脱离，下游产生漩涡。

由明槽断面比能曲线图 9-8 可以看出：在代表缓流的曲线上支是 $\frac{dE}{dh}>1.0$，所以为了得到 Δh_w 的水头必须使该断面水深升高

一个更大的数值 Δh，即 $\Delta h > \Delta h_w$，见图 9-23(a)。对于急流弯道，如图 9-23(b)，由于扰动不可能向上游传播，因此 A 点以上明槽中保持为均匀流动，水深为正常水深 h_0。自 A 点向下游，由于弯道增加了明槽中的水头损失，因此总水头线开始下降，至 B' 点水头损失增加了 Δh_w。急流中能量的减小将使水深增加，至 B' 点水深累积增加 Δh。B' 点以下明槽中由于水深增加水头损失减小，总水头线升高，又逐渐恢复为均匀流动。如果在弯道的某一断面处水深的增加使水深超过临界水深 h_c，还会产生水跃。

由弯道产生的水头损失可用下式表示

$$\Delta h_w = \zeta \frac{v^2}{2g} \tag{9-77}$$

式中：v 为断面平均流速；ζ 为弯道局部水头损失。

根据舒克立[①](Ahmed Shukry)的试验成果，ζ 值与下列因素有关：来流雷诺数、弯道段曲率半径 r、水面宽度 b、水深 h 和转角 θ。ζ 的数值可查舒克立论文[①]或有关手册。弯道水流的水头损失可以通过加大弯道的曲率半径而减小。

除此以外，弯道对其下游流动的扰动可能带来一些不利的影响，例如水面变动可能需使岸堤加高，弯道水流将改变床底泥沙运动，还将冲击岸堤造成破坏。由于弯道水流的干扰还会使其下游水工建筑物的工作条件发生改变。

2. 弯道水流的横向水面超高

图 9-24 所示为一缓流弯道水流。断面中顺流动方向的流速可以按 5.1 节中自由涡的流速分布式得到。即

$$u = \frac{k}{r} \tag{9-78}$$

式中：r 为弯道中一点 A 距离曲率中心(center of curvature)的径

---

① Ahmed Shukry Flow around bends in an open flume. Transaction, ASCE, 1950, vol, 115: 751～779

向距离；u 为 A 点顺流方向流速在铅垂线 A-A' 上的平均值，k 为自由涡强度。

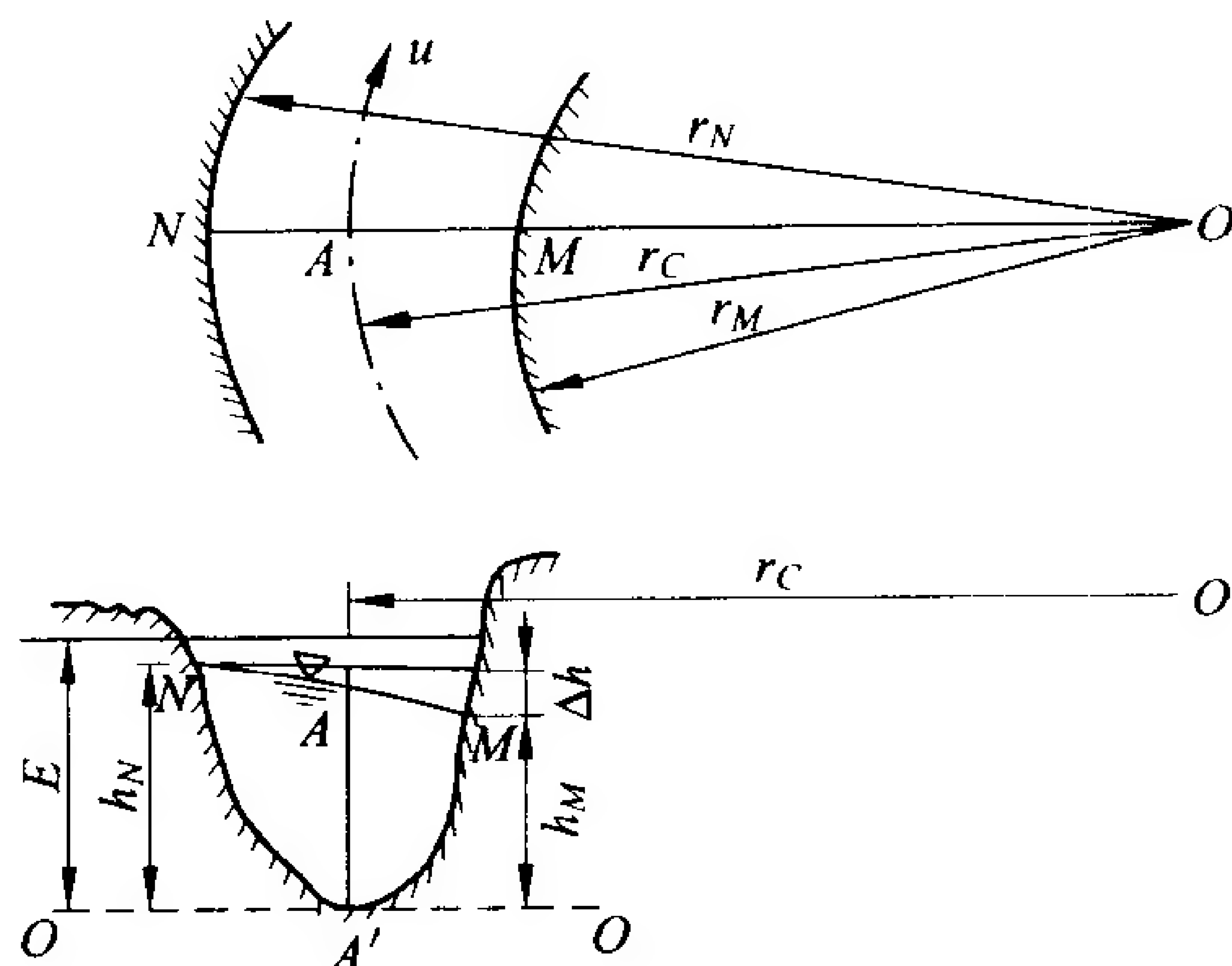


图 9-24　弯道水流横向超高

在横向过水断面 NM 中，设沿该断面任一垂线上水流的总水头为 H_0，$H_0=h+\dfrac{u^2}{2g}$，保持一致，当以槽底为基准线 0-0 时，H_0 即为断面比能 E。

$$H_0=E=h+\frac{\alpha u^2}{2g}\quad 或\quad h=E-\frac{\alpha u^2}{2g}\tag{9-79}$$

由此可得到横断面两端，凹岸的 N 点与凸岸的 M 点，其水面高差为 $\Delta h(\alpha\simeq1.0)$，即

$$\begin{aligned}\Delta h&=h_N-h_M=E-\frac{u_N^2}{2g}-E+\frac{u_M^2}{2g}\\&=\frac{u_M^2}{2g}-\frac{u_N^2}{2g}\end{aligned}$$

把式(9-78)代入上式得

$$\Delta h=\frac{k^2}{2gr_M^2}-\frac{k^2}{2gr_N^2}=\frac{k^2}{2g}\left(\frac{1}{r_M^2}-\frac{1}{r_N^2}\right)\tag{9-80}$$

即为弯道水流横向水面超高的计算公式。如以断面平均流速 v 及断面轴线的曲率半径 r_c 表示，则可由离心力在横向作用的式(2-89)推导出一个简单的公式，用以估算水面超高。其公式为

$$\Delta h = \frac{v^2}{gr_c}b \tag{9-81}$$

式中：b 为横向水面宽度。

3. 断面环流

弯道缓流的一个重要特征是在横断面上水流有横向分速，而且在水流表面横向分速指向凹岸，临近槽底的横向分速则指向凸岸，从而形成断面上的回转流动称为断面环流(circnlation current)。断面环流产生的原因是由于作用于横断面上某一垂线的离心惯性力，其值为$\frac{\rho u^2}{r}$，但垂线上各点流速 u 的分布则是越接近槽底，其顺流向流速 u 越小，因此离心惯性力也越小，沿水深的分布如图 9-25(b)中的 cd 线，离心惯性力的方向为指向凹岸。相反，由于水面超高的作用(如果假设水压力为静水压强分布)，则沿垂线压差的数值不变为 γdh，其作用方向由凹岸指向凸岸，如图 9-25(b)中 ef 线所示。二者作用相抵后，在水表面力的作用产生指向凹岸的流速 $+u_r$ 而在临近槽底处产生指向凸岸的流速 $-u_r$。

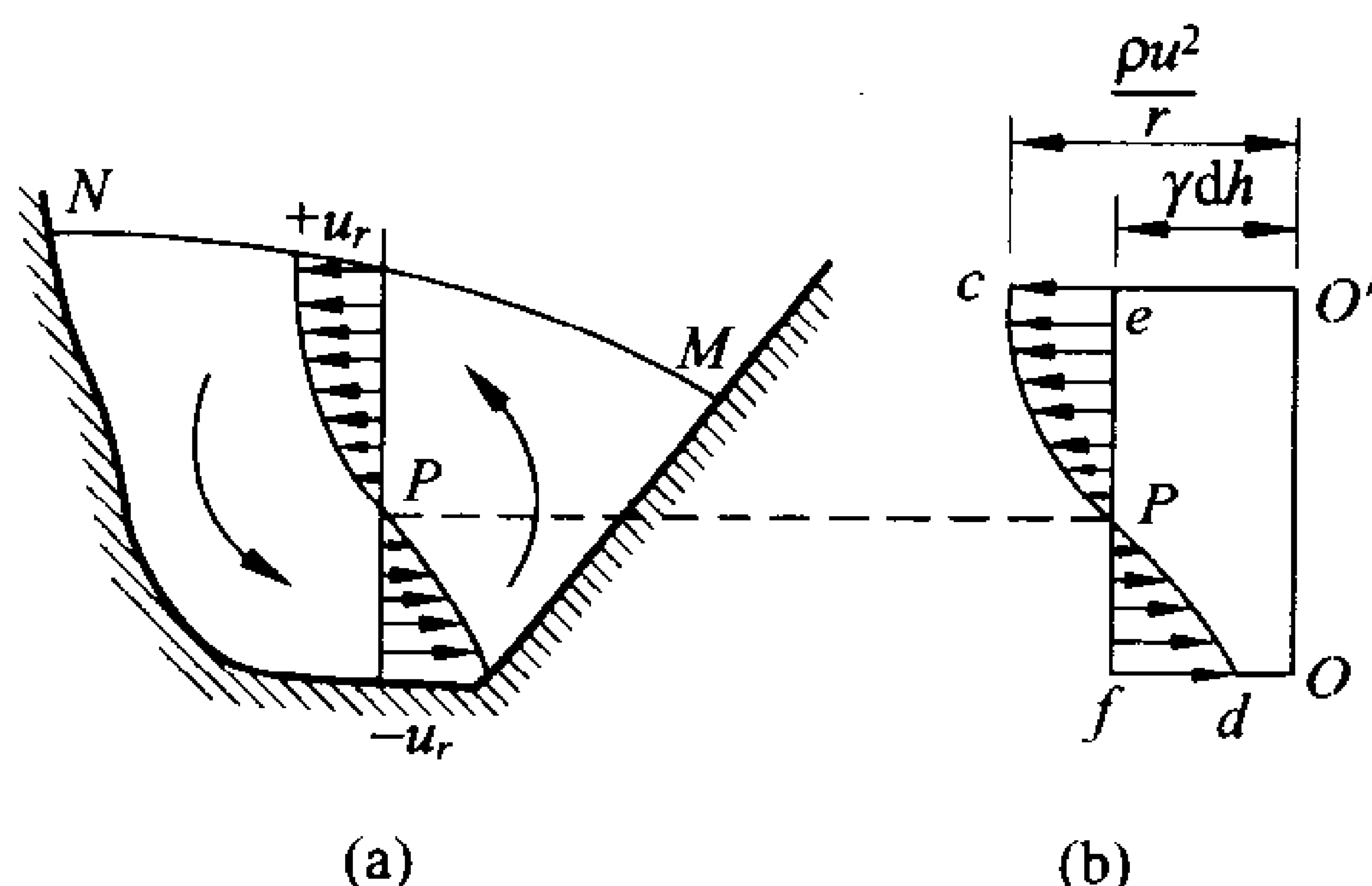


图 9-25　断面环流

P 点处离心惯性力与压差处于平衡状态，横向流速为零。横向流速的这种分布形成横断面上的环流，它是一种二次流动(secondary current)或称副流。横向流速 u_r 与主流的顺流动方向流速 u 合成弯道及其下游渠道中的螺旋流动(见图 9-26)。如果渠道或河流的底部是由可以冲刷的泥沙组成，则弯道的凹岸常常被冲刷，而这些泥沙被水流推向凸岸，形成凸岸槽底的淤积。

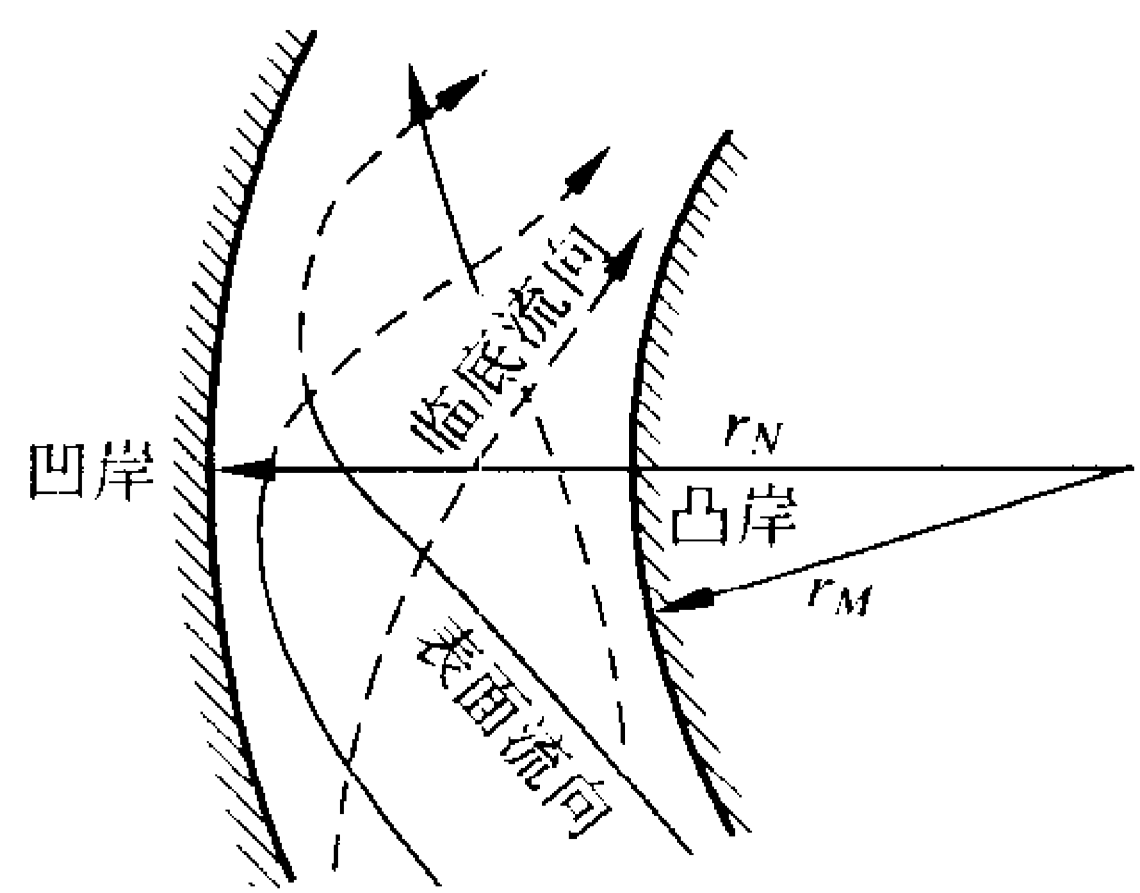


图 9-26　螺旋流动[1]

9.5.2　急流弯道水流

急流中岸壁的变化形成对水流的扰动促使水面变化，这种扰动只能向下游传播，产生激波(shock wave)现象。凹岸与凸岸不同性质的扰动，使得水面不仅沿流动方向起伏变化，而且在横向也发生壅高和降低，水面上形成菱形的波浪，称为交叉波(cross wave)，使得急流弯道与缓流弯道中的水流表面大不相同。

1. 急流激波

图 9-27 为一矩形明槽，槽壁在 M 点向急流内部作微小转折，转角为 $\Delta\theta$。由于急流具有很大的惯性，遇到槽壁转向的阻碍，对槽壁有冲击作用，而槽壁则对水流施加反力，迫使水流沿槽壁转向，产生动量变化，形成水面的局部壅高。这种扰动以波的形式在水流中传播。由于急流中流速大于波的传播速度，因此扰动波在横向传播的同时被水流带向下游，于是在平面上形成如图 9-27 所示的向下游倾斜的扰动线 MD，也称为波前(wave front)或波峰。明槽水深由 h_1 跃升至 h_2，这种现象与 9.4.2 节所述的水跃极为相似，只不过这里水面的跃升是沿与原槽壁成 β 角的斜线 MD 形成

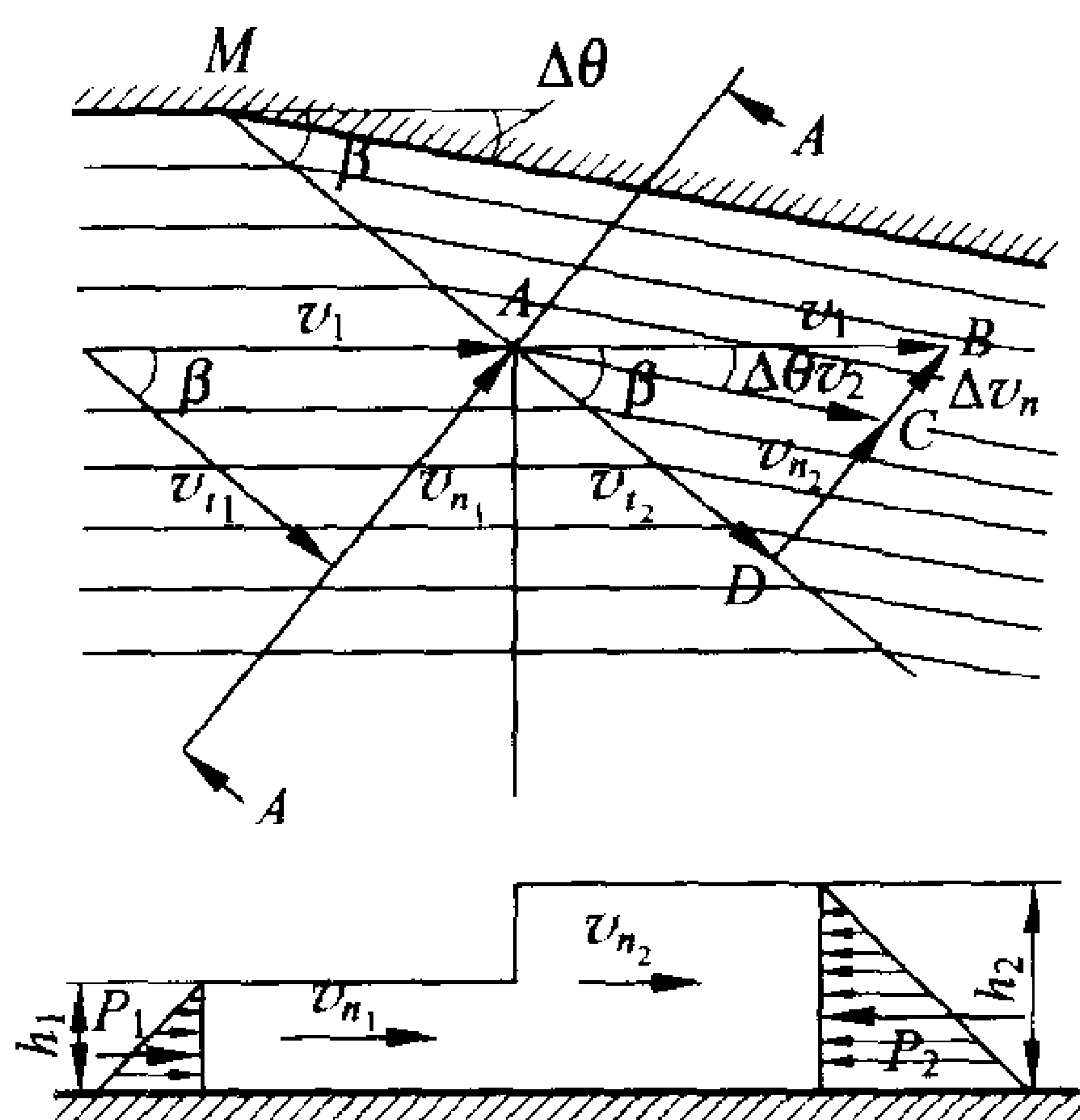


图 9-27　急流激波[1]

的，因此也称斜水跃(oblique hydraulic jump)。角度 β 称为波角(wave angle)。发生激波后，波峰前后的流速、水深以及波角的大小主要决定于扰动前水流的流动状态及造成扰动的外界条件。前者可用扰动前水流的弗劳德数 Fr_1 表示，而后者主要是槽壁的偏转角 $\Delta\theta$。设扰动前的流速 v_1，扰动后的流速 v_2，它们在正交于扰动线和平行于扰动线方向的分速分别是 v_{n_1}，v_{n_2}，v_{t_1}，v_{t_2}。由于沿波前方向的水流并未受到扰动，因此

$$v_{t_1} = v_{t_2} \tag{9-82}$$

而与扰动线正交方向的流速则需符合水流的连续方程。即

$$h_1 v_{n_1} = h_2 v_{n_2} \tag{9-83}$$

沿波前的法线方向应用动量定律，假定静水压强分布并忽略摩擦阻力，则

$$\rho q(v_{n_1} - v_{n_2}) = \frac{\gamma}{2}h_2^2 - \frac{\gamma}{2}h_1^2 \tag{9-84}$$

式中 q 为明槽单位宽度流量，$q=h_1 v_{n_1}=h_2 v_{n_2}$。由式(9-83)的 $v_{n_2}=v_{n_1}\dfrac{h_1}{h_2}$ 代入式(9-84)，得

$$v_{n_1} = v_1 \sin\beta = \sqrt{gh_1}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{h_2}{h_1}+1\right)} \tag{9-85}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{gh_1}}{v_1}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{h_2}{h_1}+1\right)} \tag{9-86}$$

或

$$\sin\beta = \frac{1}{Fr_1}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{h_2}{h_1}+1\right)} \tag{9-87}$$

当波高很小时，$h_1 \approx h_2$，式(9-87)简化为

$$\sin\beta = \frac{1}{Fr_1} \tag{9-88}$$

由此可见：对于微小的干扰，即 $\Delta\theta$ 很小时，波角主要决定于原来水流的弗劳德数。也可理解为 $\sin\beta = \frac{\sqrt{gh_1}}{v_1}$，而$\sqrt{gh_1}$为微波传播速度，即波角 β 由原来的水流速度与微波传播速度的对比确定。

设波峰法线方向的来流弗劳德数为 Fr_{n_1}，得

$$Fr_{n_1} = \frac{v_{n_1}}{\sqrt{gh_1}} = \frac{v_1 \sin\beta}{\sqrt{gh_1}} = Fr_1 \sin\beta \tag{9-89}$$

对波峰前后的水流引用由动量方程导出的矩形水槽水跃公式(9-71)得

$$\begin{aligned}\frac{h_2}{h_1} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_{n_1}^2}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_1^2\sin^2\beta}-1\right)\end{aligned} \tag{9-90}$$

需要指出的是：对于斜水跃，其跃前及跃后的水流都发生在陡坡水槽中，跃前和跃后均为急流，这一点与由急流向缓流过渡的水跃现象不同；跃前和跃后水深均发生在比能曲线的下支，跃后水深较大，说明跃后断面单位能量有所减小，通过水流的跳跃，损失了部分水头。

2. 弯道急流

急流明槽中出现弯道，如图 9-28 所示，自 A 点开始出现转弯

并强迫水流转变方向。外侧槽壁向水流内转折，如上节所述将形成斜水跃，或称为正冲击波。内侧槽壁向水流外转折将形成斜向的扩张波(oblique expansion wave)，对水流是一个负的扰动，使水面降低。由外侧及内侧槽壁的转折而引起的扰动线分别为 AB 及 $A'B$，它们相遇会互相干扰，碰到槽壁会反射，形成弯道及其下游一段明槽内的菱形波。弯道相当于沿程以极小转角产生的一系列转折。设明槽槽宽为 b，弯道中心线曲率半径为 r_C，A 点出现的第一条干扰线波角为 β，ABA' 上游为未受扰动的区域，保持原有上游直段明槽中的水流状态。在 B 点下游正负扰动互相干扰，干扰线不再保持直线而为图 9-28 中的曲线 BC 及 BD。由外槽凹曲线槽壁引起的水面升高至C点达到第一个最大值，C点以后则由于内侧槽壁自A'点开始的使水面下降的影响传播所致，沿外槽壁

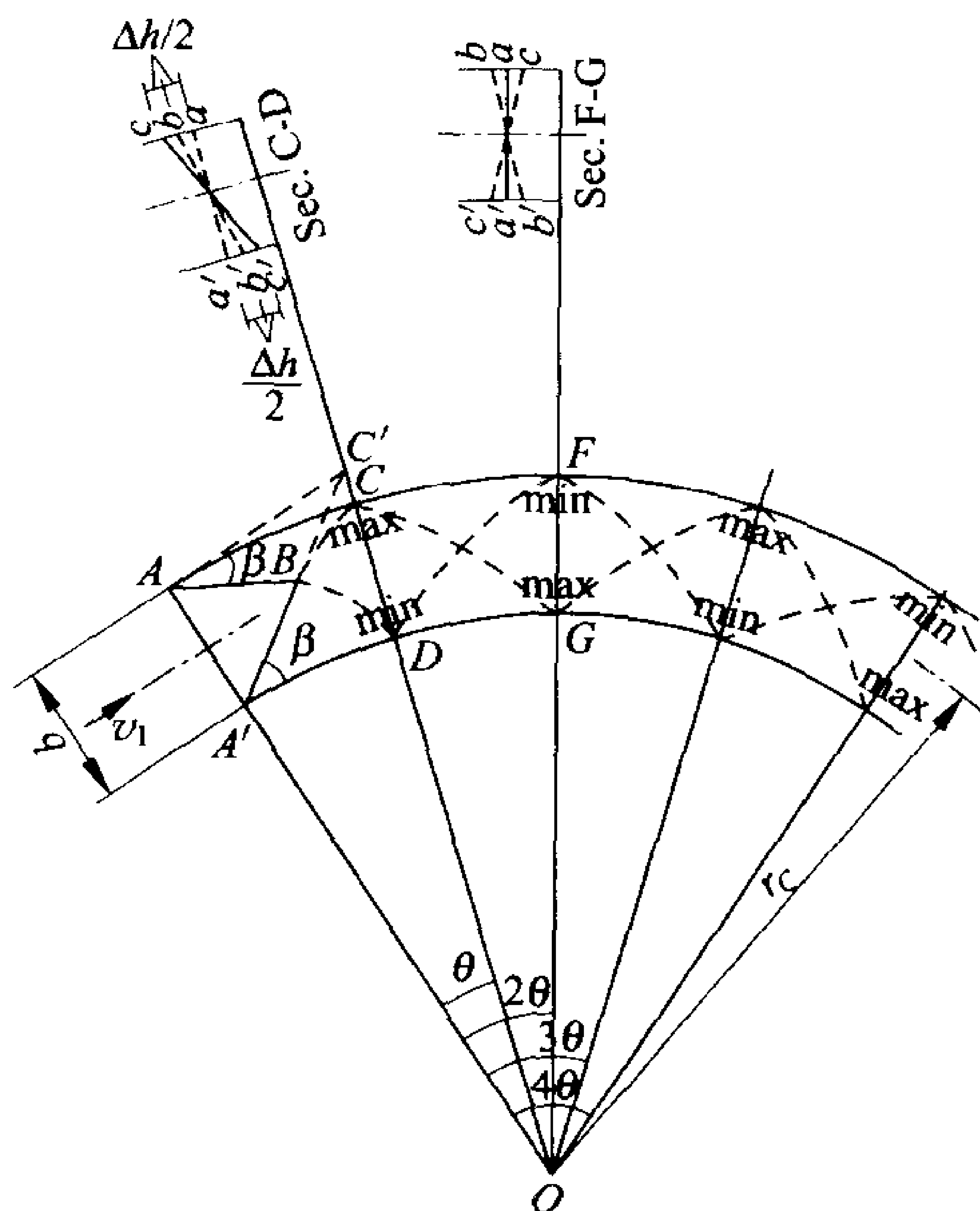


图 9-28　急流弯道水流[4]

的水面开始下降。内侧槽壁的 $A'D$ 段由于水流倾向于脱离凸曲面，水面不断下降。D 点以后则由于外侧槽壁引起的涨水波传播已到，水面回升。似此形成弯道中相互交义成菱形的交叉波并在槽壁形成高低相间的水深。实用上假设最大及最小水深点在一条径线上，例如 C 和 D 点均在 OC 径线上。θ 则表示干扰波的半个波长对应的角度，由图 9-28 中的几何关系可知

$$\tan\theta = \frac{AC'}{r_C + \frac{b}{2}}$$

$$AC' = \frac{b}{\tan\beta}$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{\left(r_C + \frac{b}{2}\right)\tan\beta} \tag{9-91}$$

纳普(Knapp Robert T.)和伊本(Ippen Arthur T.①②③④)建议用下式计算沿弯道槽壁处的水深 h。即

$$h = \frac{v_1^2}{g}\sin^2\left(\beta + \frac{\theta}{2}\right) \tag{9-92}$$

---

① Knapp Robert T. and Ippen Arthur T. Curvilinear flow of liquids with free surfaces at velocities above that of wave propagation. *proceedings of the 5th International Congress of Applied Mechanics*, *Cambridge*, *Mass.*: John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 531～536, 1938.

② Ippen Arthur T. Gas-wave analogies in open-channel flow. *Proceedings of the 2nd Hydraulics Conference*, *June* 1—4, 1942, *State University of Iowa*, *Studies in Engineering*, *Bulletin* 27, no. 400: 1943, 248～265.

③ Ippen Arthur T. Mechanics of supercritical flow, 1st paper in High-velocity flow in open channels. A symposium, *Transactions*, *American Society of Civil Engineers*, *vol.* 116, 268～295, 1951.

④ Knapp Robert T. Design of channel curves for supercritical flow. 2nd paper in High-velocity flow in open channels. A symposium, *Transactions*, *American Society of Civil Engineers*, 1951, vol. 116, 296～325.

计算时沿外侧槽壁 θ 采用正值，而沿内侧槽壁 θ 采用负值。图 9-28 中还绘出了 CD 断面和 FG 断面两个过水断面中的各种水面线。在第一个最大水深值出现的 CD 断面上，aa'表示如果明槽是直线明槽时断面中应有的水面线；bb'表示在缓流弯道中的水面线；cc'则是急流弯道中的水面线。由式(9-81)知缓流弯道中超高为 $\Delta h=\frac{v_1^2 b}{g r_C}$，因此 b 点较 a 点高$\frac{\Delta h}{2}$，而 b'点较 a'点低$\frac{\Delta h}{2}$，即$\frac{v_1^2 b}{2 g r_C}$。根据伊本和纳普的试验研究，C 点较 a 点高 Δh，较 b 点高$\frac{\Delta h}{2}$，而 C'点较 b'点低$\frac{\Delta h}{2}$，较 a'点低 Δh。也就是说在急流弯道中较之缓流弯道超高值增加了一倍。在下游的各最大水深点处均如此。

在 FG 断面，外侧槽壁为一最小水深点，此断面的实际水面线即为 aa'，因为由扩张波使水面下降的影响被急流弯道的超高所抵消。同样地，下游所有外侧槽壁最小水深点断面都是如此，其断面横向水面线与直线明槽中一样。这样，急流弯道中沿纵向水面变化有如波动，其半波长即 AC，接近为 $AC'=\frac{b}{\tan\beta}$，对应的中心角为 θ，而波长(wave length)为$\frac{2b}{\tan\beta}$，波幅(wave amplitude)即为$\frac{\Delta h}{2}=\frac{v_1^2 b}{2 r_C g}$。这些结果可用来粗估单曲率急流弯道中的水面变化。在弯道下游的直段中的流动，除弯道的影响以外，由于由弯道突然改变为直段，会产生新的干扰波，二者要统一考虑。

9.6 明槽水流非恒定流动

明槽中的流动，当其水深和流速都随时间改变时，称为明槽非恒定流动。由于流速和水深随时间改变，自然流量、过水断面面积

和水面高程都随时间改变。所有这些流动要素都不仅是流程 s 而且是时间 t 的函数。

非恒定流动都是一种波动现象。明槽非恒定流动是重力波，但它和同样也是重力波的海洋中的波浪却不同。波浪运动中水流质点基本上沿一定轨迹往复循环运动，几乎没有流量的传递，因而称为振动波(oscillating wave)。而明槽非恒定流中不仅水面波形向前传播，而且水流质点也向前移动，波形的传播是通过水流质点的位移来实现的，因而称为位移波(translatory wave)，或称输移波。

明槽非恒定流主要分为两种，即非恒定渐变流动(gradually varied unsteady flow)和非恒定急变流动(rapidly varied unsteady flow)。非恒定渐变流动波面曲率比较平缓，水深的变化为渐变性质，瞬时流线近于平行直线，垂向加速度可以忽略，压强按静水压强分布，沿程摩擦阻力必须加以考虑。这种流动中流动要素是流程 s 和时间 t 的连续函数，形成的波称为连续波(continuous wave)。非恒定急变流动中波面曲线曲率很大，瞬时波面陡峻，从而波表面为不连续面，水深和流量变化急剧，垂向加速度有重要作用而摩擦阻力则常可忽略。这种流动中流动要素不再是 s 与 t 的连续函数，从而形成的波称为不连续波(discontinuous wave)。洪水波和水电站缓慢调节或船闸或闸门的缓慢启闭所引起的非恒定流属于前者，而溃坝波(dambreak wave)、各种类型的断波(surge)均属于后者。

明槽非恒定流动的求解，大多应用数值方法。本节中将主要给出明槽非恒定流的基本方程式和讲述主要现象。数值解法可参考专门书籍。

9.6.1 非恒定渐变流动

基本方程式包括连续方程和运动方程。图 9-29 绘出了非恒

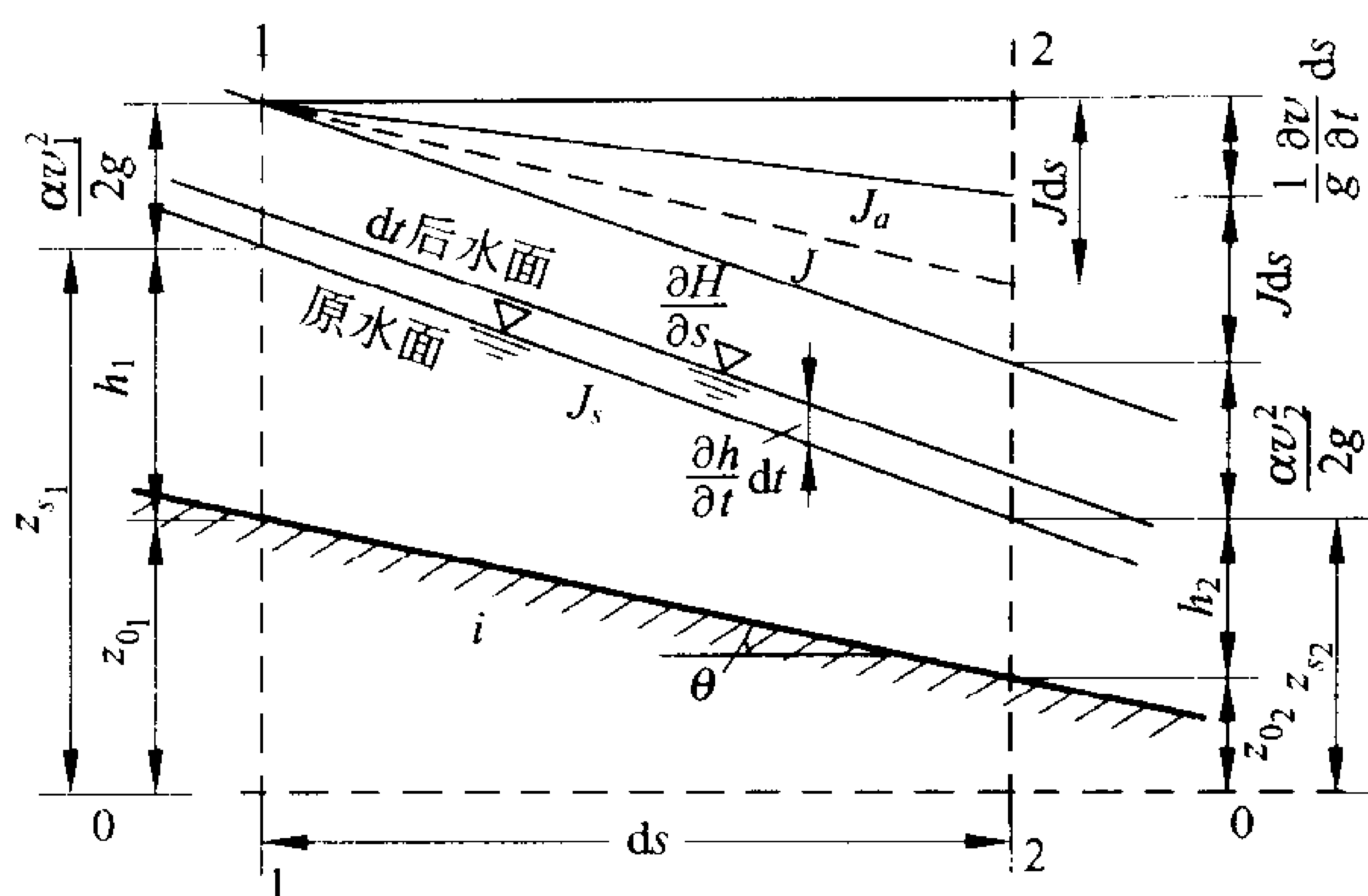


图 9-29　非恒定渐变流动

定流动的一个流段，在 9.1.3 节中已给出了明槽非恒定流动的连续方程为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=0 \tag{9-17}$$

由于 $Q=vA$，$\mathrm{d}A=B\mathrm{d}h$，所以连续方程也可写为

$$B\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial(vA)}{\partial s}=0 \tag{9-93}$$

对于矩形明槽，$A=Bh$，所以

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial v}{\partial s}+v\frac{\partial h}{\partial s}=0 \tag{9-94}$$

明槽非恒定渐变流动的运动方程可由牛顿第二定律 $\sum F=ma$ 出发来推导。设明槽底坡很小，由于是渐变流动过水断面上的压强分布可认为是静水压强分布，任一断面的测管水头即为水面高程 z_s。局部阻力可以忽略，阻力项只有沿程的床面摩擦阻力。设沿流动方向为 s，对于过水断面为 $\mathrm{d}A$ 的元流有

$$\rho\mathrm{d}s\mathrm{d}A\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial s}\right)=-\rho g\,\mathrm{d}A\mathrm{d}s\frac{\partial z'}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}s\mathrm{d}A-\tau\mathrm{d}P\mathrm{d}s$$

式中：u 为元流流速；z' 为元流相对基准面的高程；τ 为摩擦切应力；$\mathrm{d}P$ 为元流与周围流体接触长度。

如果把元流扩大到总流，忽略断面流速分布不均匀的影响而用断面平均流速 v 代表，则上式可写为

$$\frac{\partial z_0'}{\partial s}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p_0}{\partial s}+\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}\right)+\frac{\tau_0}{\gamma R}=0$$

式中：z_0'、p_0 分别代表断面平均高程及平均压强；τ_0 为水流与槽壁之间的平均摩擦切应力。

如果以水面高程 z_s 表示断面测管水头，$z_s=z_0'+\frac{p_0}{\gamma}$。可将上式写为

$$\frac{\partial z_s}{\partial s}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\tau_0}{\gamma R}=0 \tag{9-95}$$

式中：$\frac{\partial z_s}{\partial s}$ 为水面坡度 J_s。

$\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ 为流速水头坡度。

$\frac{\tau_0}{\gamma R}=J$。这式是在恒定均匀流动中，利用一个流段中各种作用力（包括压力、重力、摩阻力）的平衡关系可以导出

$$\tau_0=\gamma RJ \tag{9-96}$$

又由式(9-53)知 $J=\frac{v^2}{C^2R}$ 。因而 $\frac{\tau_0}{\gamma R}=\frac{v^2}{C^2R}$。

$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$ 是由于水流的非恒定性而产生的惯性项。$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\mathrm{d}s$ 为由惯性加速度而产生的水头损失，称为惯性水头 h_i(inertia head)，是非恒定流动中特有的水头损失。但是它与因摩阻力而产生的沿程水头损失不同，沿程水头损失将机械能转化为热能而耗散掉，惯性水头损失则因流速 v 的增加，仍以机械能的形式储存在整段水流中。式(9-95)由此可改写为

$$\frac{\partial z_s}{\partial s}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{v^2}{C^2R}=0 \tag{9-97}$$

由于断面总水头 $H=z_s+\frac{v^2}{2g}$，上式可写为

$$\frac{\partial H}{\partial s}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v^2}{C^2R}=0 \tag{9-98}$$

这就是明槽非恒定渐变流动的运动方程，说明在明槽非恒定渐变流动中，总水头坡度 $\frac{\partial H}{\partial s}$、惯性水头坡度 $Ja=\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$ 和摩阻坡度 $J=\frac{v^2}{C^2R}$，三者之和为零。

对于棱柱形明槽，以 z_0 表示槽底高程，则底坡 $i=-\frac{\partial z_0}{\partial s}$。断面水深为 h，则 $\frac{\partial z_s}{\partial s}=\frac{\partial z_0}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial s}$，式(9-97)又可写为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}+g\frac{\partial h}{\partial s}=g(i-J) \tag{9-99}$$

式(9-99)为棱柱形明槽非恒定渐变流动的运动方程式。在前几节中研究恒定的渐变流动或均匀流动时，总水头坡度与摩阻坡度相等，而在非恒定流动中必须注意惯性水头坡度的出现。如果把式(9-99)写为

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{J=i}_{\text{恒定均匀流动}}-\frac{\partial h}{\partial s}-\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s}}_{\text{恒定非均匀流动}}-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{非恒定非均匀流动}} \tag{9-100}$$

由式(9-100)可清楚地看出非均匀性和非恒定性在运动方程中增加的项目。

非恒定渐变流动的连续方程和运动方程最早由圣维南

(Saint-Venant)[①②]提出称圣维南方程组，这些方程现已被后人的很多研究工作、观察和试验所证实。但从数学上求解圣维南方程组并非易事，从而发展了大量的数值方法，读者可参考有关论著。

9.6.2 非恒定急变流动

在明槽中，非恒定急变流动的主要现象是断波。即由于流量在短时间内有较大的变化而引起明槽中水深的突然改变，形成水面在短距离内呈阶梯形的壅涨（或消落），并且这种变化以一定的速度传播。水坝突然溃决形成的溃坝波（dam break wave），潮水涨落在河道中形成的壅波（tidal bore），水电站的突然启闭在动力渠道中引起的壅波等都属于断波。水面升高时称为涨水断波或正断波（positive surge），水面降低时称为落水断波或负断波（negative surge），这两种断波都可以顺流或逆流传播。正断波在传播过程中可以保持一个稳定的波峰形状。当断波的波高较小时，类似一个行进的波状水跃。当波高增加，波动消失，断波具有阶梯形陡峭的波峰。负断波在传播过程中波峰的形状并不稳定。因为断波的上部比下部运动速度更快，因而波峰逐渐平坦。断波的形成可以理解为在无限短时段内由起始断面发生的一系列元波叠加的结果。元波的波速 c 为

$$c = v + \sqrt{g \frac{A}{B}} \tag{9-101}$$

---

① A. J. C. Barré de Saint-Venant . Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes (Theoretical and Practical Studies of Stream Flow). Paris, 1848

② A. J. C. Barré de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits (Theory of the nonpermanent movement of waters with application to the floods of rivers and to the introduction of the tides within their beds), *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1871, vol. 73, pp. 147～154 and 237～240

式中：v 为断面平均流速；A 为过水断面面积；B 为水面宽度。

元波的波速 c 随水深的增加而增加，以顺流断波为例，如果是正断波则水面不断涨高，因此后续元波的波速都稍大于前一个元波的波速。后波总能追及前波而最终形成阶梯式的波峰向下游运动。如图9-30(a)，对于负断波，则水面连续下降，后续的元波，其波速总是小于前一个元波的波速，当流量变化过程完毕的时刻就形成一个比较平坦的斜坡式的断波，并在向前移动的过程中逐渐平坦化，如图 9-30(b)。

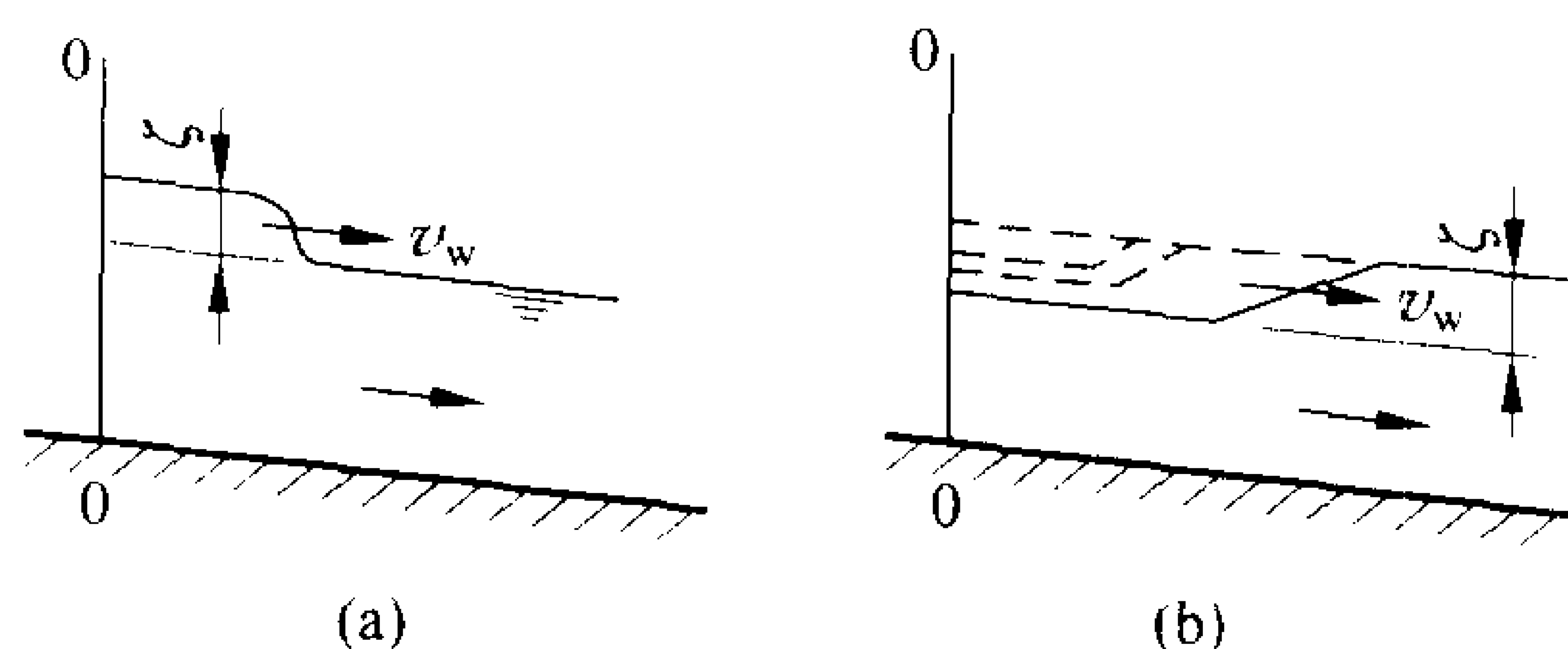


图 9-30 断波的形成[2]

断波波峰运动速度称为断波波速，与元波波速 c 不同，以 v_w 表示。当波峰到达某一断面时，就使该断面的流速以及相应的流量发生变化，把这一流量变化值称为波流量。下面推导断波的连续方程和动量方程，从而得到断波波速及波流量的计算公式。

设在缓坡明槽中，断波到达以前为恒定流动，流量 Q_0，水深 h_0，过水断面面积 A_0，水面宽度 B_0，断面平均流速 v_0。明槽中顺流正断波，波高为 ζ，以波速 v_w 向下游运动，如图 9-31。波峰到达后断面流速由 v_0 变为 v。忽略粘性阻力，假设正断波在前进过程中波形及波速均不改变，如果把坐标系置于断波上以 v_w 速度向下游移动，则非恒定流动对于移动坐标而言可作为恒定流处理。对移动坐标而言，流速将由 v_0，v 变为(v_0-v_w)，$(v-v_w)$。波峰到达后的过水断面面积由 A_0 增为 $A=A_0+\Delta A$，水面宽度由 B_0 变为

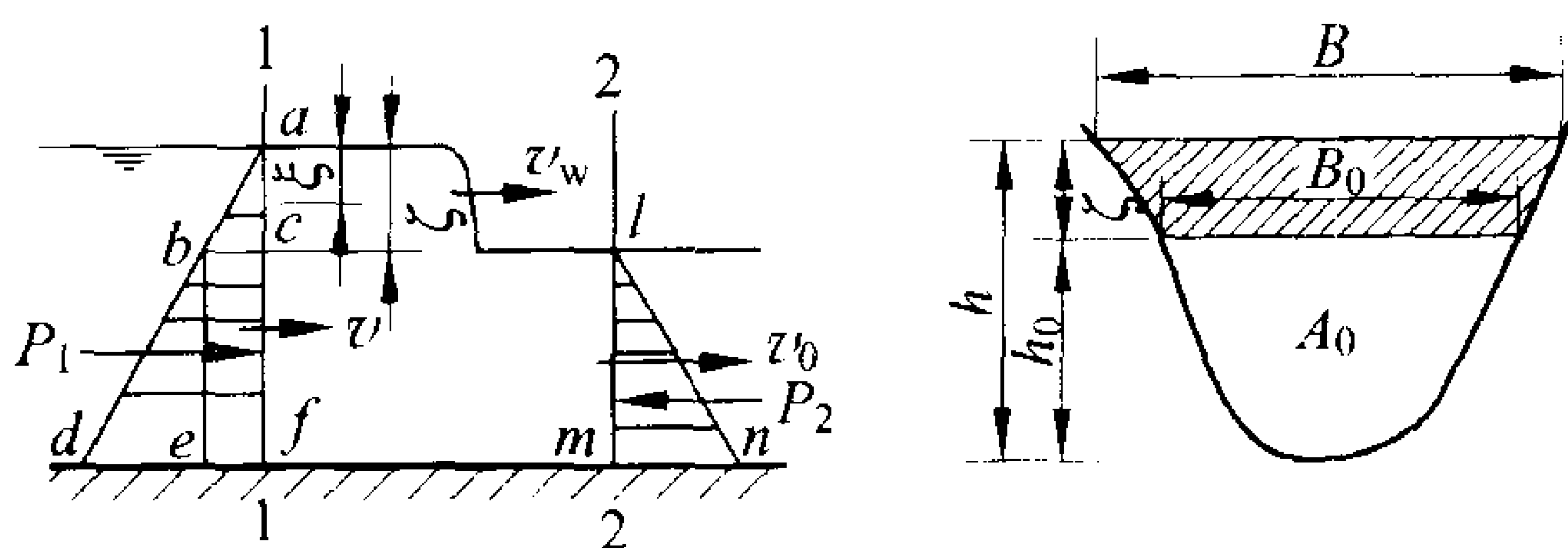


图 9-31　正断波[2]

B,对断波前后的 1-1 和 2-2 断面(见图 9-31)列出恒定流的连续方程,得

$$(v - v_w)A = (v_0 - v_w)A_0 \tag{9-102}$$

移项后得

$$vA - v_0 A_0 = Q - Q_0 = \Delta Q = v_w(A - A_0) \tag{9-103}$$

式中:ΔQ 为波流量;$A - A_0 = \Delta A = \dfrac{(B+B_0)}{2}\zeta$,$\zeta$ 为波高。所以

$$\Delta Q = v_w \Delta A = v_w \frac{(B + B_0)}{2}\zeta \tag{9-104}$$

式(9-104)表示波流量、波速与波高之间的关系。如断面流速变化以 Δv 表示,则 $\Delta v = v - v_0$,由式(9-102)得

$$\Delta v = \frac{(v_w - v_0)\Delta A}{A_0 + \Delta A} = \frac{(v_w - v)\Delta A}{A_0} \tag{9-105}$$

式(9-102)、式(9-103)、式(9-104)、式(9-105)为断波连续方程的不同形式。

在移动坐标系中取 1-1 和 2-2 两断面间的水体为控制体,应用恒定流的动量方程(9-24)推导断波的动量方程。由于距离很短,底坡平缓,可以忽略摩擦阻力及重力的作用,作用力只有压力差。即

$$P_1 - P_2 = \frac{\gamma}{g}[Q_0(v_0 - v_w) - Q(v - v_w)]$$

$$= \frac{\gamma}{g}[(v_0 - v_w)A_0(v_0 - v_w) - (v - v_w)A(v - v_w)]$$

$$= \frac{\gamma}{g}[(v_0 - v_w)^2 A_0 - (v - v_w)^2 A] \tag{9-106}$$

在断面 1-1 和 2-2 上压强近似为静水压强分布，则

$$P_1 - P_2 = \gamma(\zeta A_0 + \xi \Delta A) \tag{9-107}$$

式中：ξ 为 ΔA 的面积形心在波面以下的深度。两断面压力差可由图 9-31 中 $abef$ 四边形面积表示出来。于是式(9-106)写为

$$\gamma(\zeta A_0 + \xi \Delta A) = \frac{\gamma}{g}[(v_0 - v_w)^2 A_0 - (v - v_w)^2 A] \tag{9-108}$$

以连续方程(9-102)代入上式后，得

$$(v_0 - v_w)(v_0 - v)A_0 = g(\zeta A_0 + \xi \Delta A) \tag{9-109}$$

式(9-109)为断波的动量方程。将式(9-105)代入上式，得

$$\frac{(v_0 - v_w)^2 A_0 (\Delta A)}{A_0 + \Delta A} = g(\zeta A_0 + \xi \Delta A)$$

整理后得

$$v_w = v_0 \pm \sqrt{g\left(\frac{\zeta A_0}{\Delta A} + \zeta + \xi + \frac{\Delta A}{A_0}\xi\right)} \tag{9-110}$$

式(9-110)为任意断面棱柱形缓坡明槽中断波波速 v_w 的计算公式。

对于梯形断面的明槽流动，由于 $\Delta A = \zeta \frac{(B + B_0)}{2}$，$\xi = \frac{1}{2}\zeta$，所以断波波速公式简化为

$$v_w = v_0 \pm \sqrt{g\left(\frac{2A_0}{B + B_0} + \frac{3}{2}\zeta + \frac{(B + B_0)\zeta^2}{4A_0}\right)} \tag{9-111}$$

当断波的波高 ζ 较小($\zeta \ll h$)，上式括号内第三项可忽略，则得

$$v_w = v_0 \pm \sqrt{g\left(\frac{2A_0}{B + B_0} + \frac{3}{2}\zeta\right)} \tag{9-112}$$

对于矩形渠道，式(9-112)还可进一步简化为

$$v_w = v_0 \pm \sqrt{gh} \tag{9-113}$$

应用以上各式时，对顺流断波取"+"号，对逆流断波取"−"号。对正断波，波高 ζ 取正值，对负断波 ζ 取负值。当已知明槽中流量的突然变化，即可联解式(9-104)和(9-110)，求得波高 ζ 和波速 v_w，从而解决有关工程设计问题。

9.7 明槽水流运动的相似

明槽流动往往由于边界的复杂而难以求得数学方程的解析解。因而模型试验仍是解决明槽流动问题的重要手段。近年来电子计算机和数值方法的发展为解决明槽流动提供了另一个强有力的手段，但是终究还不能完全替代模型试验的方法。

明槽流动中作用于水流的作用力主要是重力，因此在设计模型时应遵循重力相似准则，由式(4-27)知流速比尺 λ_u 为几何比尺(长度比尺)λ_l 的平方根值，即

$$\lambda_u = \lambda_l^{\frac{1}{2}} \tag{4-27}$$

明槽流动中还应考虑阻力的相似。阻力是由水流的粘性产生的，第4章中已述及在一个模型中要求同时保证重力和粘性力的相似，即弗劳德数与雷诺数均在模型中与原型同量，是难以做到的。工程中遇到的明槽流动一般为紊流型态，特别是当流动为充分发展紊流时，即

$$Re = \frac{vR}{\nu} > 4000 \tag{9-114}$$

式中：R 为明槽水力半径。这时由摩阻力引起的沿程水头损失将与雷诺数无关，而只决定于固体壁面的相对粗糙(relative roughness)$\frac{k_s}{R}$，k_s 为壁面粗糙突起的高度。因而只要保证相对粗糙的相

同，则无须考虑雷诺数即可得到阻力的相似。

明槽流动中的谢才公式是对应于充分发展紊流的情况，由式(9-44)

$$\lambda_v = \lambda_C \lambda_R^{\frac{1}{2}} \lambda_J^{\frac{1}{2}} \tag{9-115}$$

由于① $\lambda_R = \lambda_l$；② 在模型与原型中摩阻坡度 J 是一样的，它是无量纲量，因此 $\lambda_J = 1$，当然对于变态模型(distorted model)，垂直方向的长度比尺与水平方向的长度比尺不同，这时各种坡度的比尺将不再是 1；③ 由重力相似知 $\lambda_v = \lambda_l^{\frac{1}{2}}$。因此代入式(9-115)得

$$\lambda_C = 1 \tag{9-116}$$

也就是模型与原型应有相同的谢才系数。由曼宁公式(9-46)，即

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} \tag{9-46}$$

可得在模型和原型中有

$$\lambda_C = \lambda_n^{-1} \lambda_R^{\frac{1}{6}}$$

而

$$\lambda_n = \lambda_l^{\frac{1}{6}} \tag{9-117}$$

模型中要保证糙率 n 与原型糙率相差 $\lambda_l^{\frac{1}{6}}$ 倍，才能保证明槽流动的阻力相似，在模型设计时可据此选择模型所使用的材料。实际上，模型材料的选择是有限度的。例如一般的水工建筑物为混凝土表面，n 值约在 0.013。而模型中即使选择最光滑的可用材料，如有机玻璃或刨光木板，其 n 值约为 0.009，于是这样制造的模型，其比尺为

$$\lambda_l = \left(\frac{0.013}{0.009}\right)^6 = 9$$

而一般溢流坝模型均须选择 40 以上的比尺。不过在一些水工建筑物模型中，例如闸、坝等，其摩阻损失在整个水流现象中影响不大，因此可以不必过高要求阻力的相似。但对于河流、渠道、水库、

隧洞等模型则阻力相似变得相对重要，就需要采用其他措施。

明槽流动的模型相似问题在实际工作中非常复杂，考虑的因素也很多，读者可参考专门书籍。

参 考 书 目

[1] 余常昭主编．清华大学水力学教研组编。水力学(下册)。北京：高等教育出版社，1996

[2] 余常昭。明槽急变流——理论和在水工中的应用。北京：清华大学出版社，1999

[3] 格拉夫，阿廷拉卡著。赵文谦，万兆惠译。河川水力学。成都：成都科技大学出版社，1997

[4] Chow Ven Te. Open Channel Hydraulics. Mc Graw-Hill Book Company Inc. 1959

[5] French Richard H . Open Channel Hydraulics. Mc Graw-Hill Book Company Inc. ,1985

[6] Henderson F M . Open Channel Flow . Macmillan Publishing Co. Inc. ,1966

[7] Rouse Hunter. Engineering Hydraulics. John Wiley & sons,Inc. 1950

[8] White Frank M. Fluid Mechanics . Mc Graw-Hill Book Company,1979

[9] Yalin M selim. Theory & Hydraulic Models. Macmillian Press Ltd. ,1971

第10章

波 浪 运 动

波动是自然界中在时间上和空间上两点之间传播信息的一种普遍存在的方式，而且在信息传播过程中介质本身并不一定发生移动，像声波、电磁波、水波等。本章的重点在于研究水波，特别是水面波，一般称之为波浪。水面受到扰动，这一扰动向外传播的现象就是波浪运动。对波浪运动的研究可以上溯到18世纪的拉格朗日，1845年英国人爱利(Sir George Biddell Airy，1801—1892)提出的微幅波理论为波浪运动力学奠定了基础。此后斯托克斯、开尔文、布辛涅斯克等都对波浪运动力学作出了重要贡献。1879年出版了兰姆(Sir Horace Lamb，1849—1934)的水动力学，(Hydrodynamics)这是波浪运动力学的经典名著。

波浪运动的力学理论在工程实践中具有重要意义。船舶和舰只的航行将受到波浪的阻力，海岸工程和海港设施均与波浪有密切的关系，海浪在海岸带引起海底泥沙的运动对工程设施、通航和近海生态环境都有重要影响。海洋资源的开发和利用，海上采油平台的设计，海底管道的铺设都须计算波浪荷载，军事工程中很多问题与海洋中的波浪运动有关。随着海洋开发事业的发展，波浪运动力学的重要性日益显著。

本章将主要讲述波浪运动的基本现象和研究波浪运动的基本理论，限于非粘性的理想流体和线性的微幅波理论。对于非线性

问题的有限振幅波和与粘性有关的波浪荷载等问题，读者可阅读有关波浪运动力学的专著。

10.1 概　　述

波浪运动是自然界中一种常见的现象。海洋、湖泊、水库中都存在波浪，甚至在一个平静的水面投掷一块小石块也会激起水面的波浪，并以石块入水点为中心，呈圆形地向四周传播。波动的产生首先需要有一个处于平衡状态的介质，还需要有破坏介质平衡的扰动力(disturbing force)和使介质恢复平衡态的回复力(restoring force)。本章中研究的水面波浪，可依扰动力的不同把波浪分成风生波、潮汐波、地震波、船行波等。根据回复力的不同性质对波浪分类也很重要。回复力中最重要的一种是重力，特别是对于水自由表面的波浪，这种波浪称为表面重力波(surface gravity wave)。重力波也存在于两种不同密度流体的分界面处而形成内波(internal wave)。第二种回复力是表面张力，这是由于水的自由表面具有表面张力特性。水面一旦受到扰动，重力和表面张力力图使水面恢复到原来的平衡态，并形成波浪传播出去。此外，水的压缩性虽然很小，但其弹性力仍是一种回复力，由弹性力引起的波如声波。由地球自转形成的柯氏力也是一种回复力。

波浪的主要特征参数有波高(wave height)H、波长(wave length)λ 和周期(wave period)T，见图 10-1。波浪在静水位(still water level，SWL)以上部分的顶点称为波峰(crest)也称波顶，在静水位以下部分的最低点称为波谷(trough)也称波底。波峰与波谷之间的垂直距离为波高 H。在波浪前进的方向上两个相邻的波峰或波谷之间的水平距离为波长 λ。两个相邻的波峰或波谷通过空间一固定点的时间差，或者说一个完整的波动过程所经历的

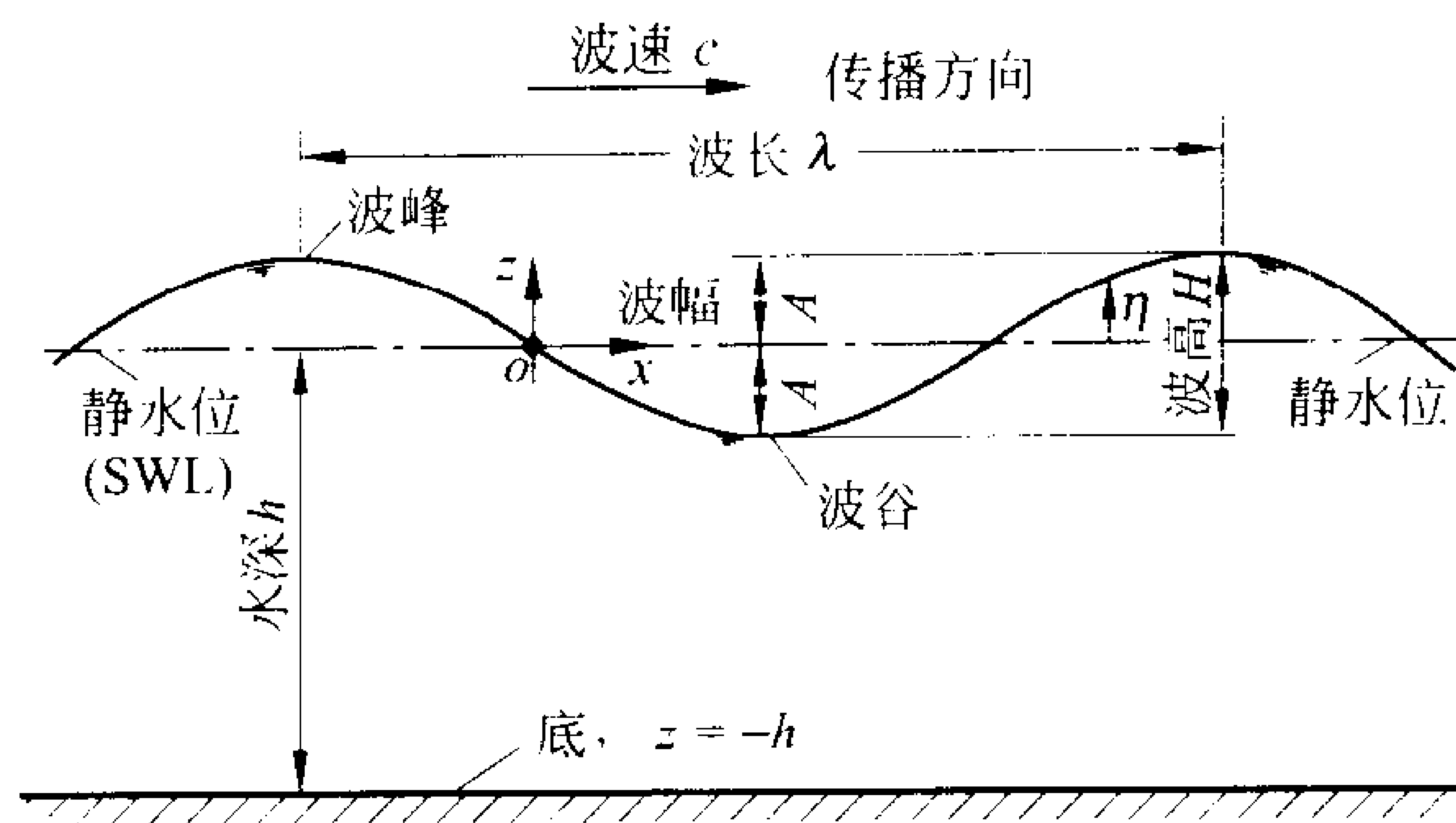


图 10-1 波浪的特征参数[①]

时间为周期 T。波高与波长之比$\frac{H}{\lambda}$称为波陡(wave steepness)。波形的平均线称为波浪中线(mean water level)，波浪中线超出静水位的高度 ζ_0 称为超高(wave set up)，在谐波中超高为零，波高的一半为波幅(amplitude)A。波在时间 T 所经过的距离为 λ，因此波的传播速度为

$$c=\frac{\lambda}{T} \tag{10-1}$$

c 称为波速(celerity)，由于它是波浪相位(phase)的传播速度，因此也称为相位速度(phase speed)。定义周期的倒数为频率 f(frequency)，表示单位时间内出现的波的次数，即

$$f=\frac{1}{T} \tag{10-2}$$

而定义单位距离内含有波长 λ 的个数为波数 n(wave number)，即

$$n=\frac{1}{\lambda} \tag{10-3}$$

所以也可称频率表示波在时间上的密度，波数表示波在空间

① 严恺，梁其荀. 海港工程. 北京：海洋出版社，1996

上的密度。

对于波陡很小的波动，一般选择正弦或余弦曲线来表示波形，这是最简单而又接近实际波形的一种表述。正弦曲线与余弦曲线间只是具有一个相位差$\frac{\pi}{2}$，而其性质一样，因此在波浪力学中均称为谐波(sinusoidal wave)，用余弦式的表示方式为

$$\eta = A\cos(t+\varepsilon) \tag{10-4}$$

式中：η 为波面偏离静水位的垂直距离；t 表示时间；ε 表示相差(phase shift)。

由于正弦波也可由绕圆周转动的点演示，因此可用 2π 分别代替式(10-2)及式(10-3)中的 1，于是得

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{10-5}$$

ω 表示单位时间绕过了多少弧度，量纲为 $\frac{\text{rad}}{\text{T}}$，称为圆频率(radian frequency)。

$$k = 2\pi n = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10-6}$$

k 表示单位距离内有多少弧度，一般波数都由此式表示，其量纲为 $\frac{\text{rad}}{\text{L}}$。L、T 分别代表长度和时间的量纲。

研究波浪力学时，常将坐标原点取于静水位，沿波传播方向的水平轴为 x 轴，与 x 轴铅垂向上为 z 轴，静水位处 $z=0$。于是式(10-4)可以写为更完整的形式，即

$$\eta(x,t) = A\cos(kx-\omega t) \tag{10-6$'$}$$

实际的波浪形状很复杂，并不是简单的正弦波，但是可以通过傅里叶分析，将波形分解为许多正弦波的组合。波浪运动中水深 h 是一个重要的因素。

10.2 波浪运动基本方程与边界条件

波浪力学里一般把流体假定为不可压缩的理想流体，基本方程为连续方程与欧拉方程。对于二维波浪运动，如果流动是无涡的，则流动存在流速势函数 ϕ 和流函数 ψ。流体质点速度 $\boldsymbol{u}$ 与流速势 ϕ 的关系仍如式(1-56)所示。

10.2.1 连续方程

不可压缩流体的连续方程为式(1-17)，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}=0 \tag{1-17}$$

如果波浪运动为无涡的，存在流速势函数 ϕ，$\boldsymbol{u}=\nabla\phi$，代入式(1-17)，得

$$\nabla^2 \phi=0 \tag{10-7}$$

式(10-7)说明波浪运动的流速势满足拉普拉斯方程，它是一个线性方程。对于二维无涡的波浪运动流函数 ψ 也满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2 \psi=0 \tag{10-8}$$

10.2.2 运动方程——欧拉方程

欧拉方程(2-61)为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho \boldsymbol{f}-\nabla p \tag{2-61}$$

当质量力只考虑重力时，$f=\nabla G, G=-gz$，流动为无涡，流体为正压，则伯努利方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi+\frac{p}{\rho}+gz=0 \tag{2-80}$$

从而可求得压强场 $p(x,y,z,t)$。

10.2.3 波浪运动的边界条件

波浪运动的控制方程式(10-7)，即流速势 ϕ 的拉普拉斯方程，它是椭圆形二阶偏微分方程，其边界条件应是在一个封闭边界上的狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet，1805—1859)条件或诺伊曼(Carl Cottfried Von Neumann，1832—1925)条件，如图10-2所示。设在底面 $z=-h(x,y,t)$ 上具有自由表面的水体，坐标系如图10-2置于原系平衡的静水面上，水面形成波浪而起伏不平。自由表面作为流动的一个边界具有两类边界条件：一是运动学条件，一是动力学条件。

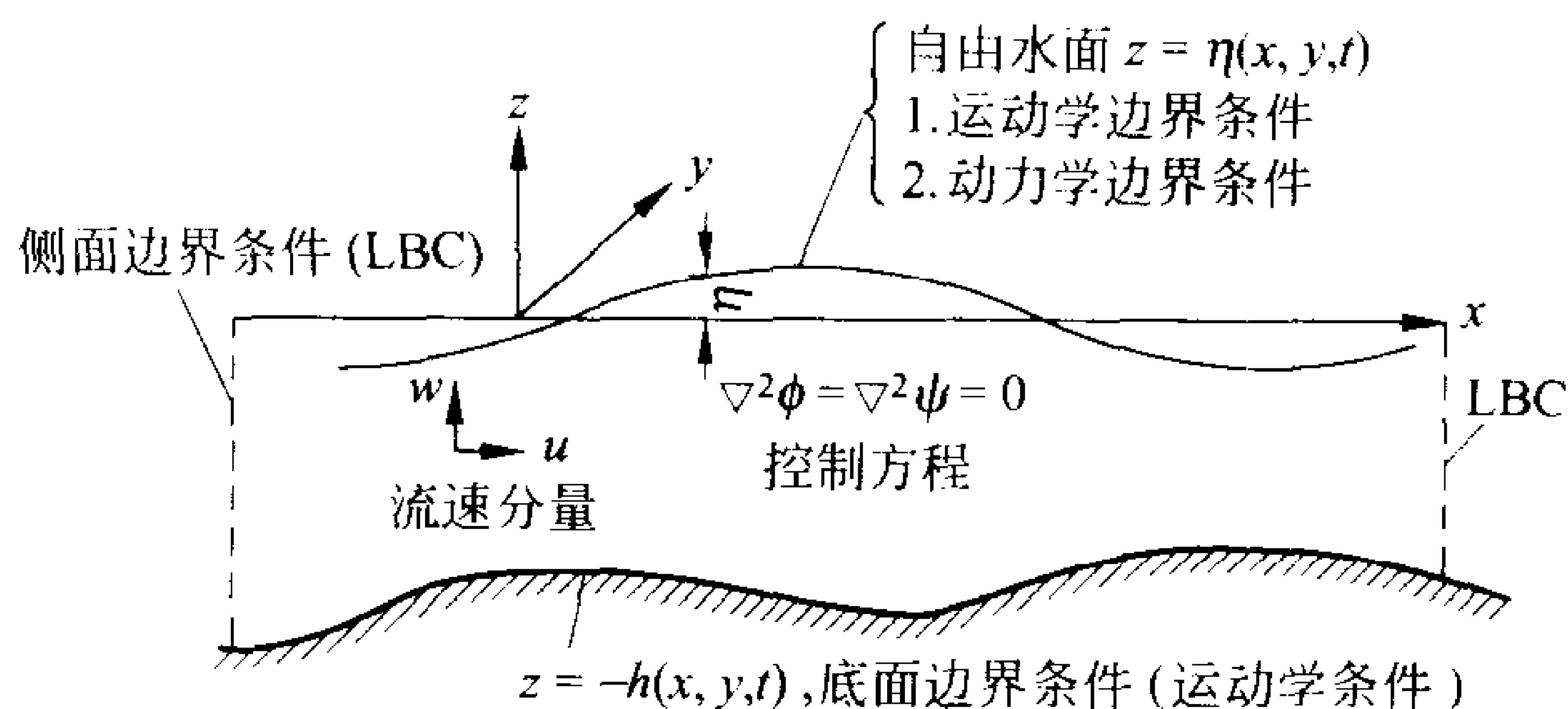


图 10-2 波浪运动的边界条件

首先研究自由水面的运动学边界条件。水波的自由表面是一个运动着的水面，它是由流体质点组成的流体面。运动学边界条件表明：组成自由水面的流体质点永远位于自由水面上，也就是说流体质点可以沿自由水面运动而不可能脱离或者说是穿透自由水面。因此边界条件与第二章讨论的固体壁面上理想流体运动的边界条件一样，只是边界面为流面而不是固体壁面，流面的特点是它可以容易地变形。将坐标系置于原静止水面，如图10-2所示，水波高度为 $\eta(x,y,t)$，则自由表面的方程为

$$z=\eta(x,y,t) \tag{10-9}$$

写为式(2-44)型式的边界面方程为

$$F(x,y,z,t)=z-\eta(x,y,t)=0 \tag{10-10}$$

位于自由表面的水质点可以有在水面切向运动的速度但不可能有穿透自由表面的运动，因此可以应用式(2-54)。即

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z-\eta)=0 \tag{10-11}$$

也可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(z-\eta)+\boldsymbol{u}\cdot\nabla(z-\eta)=0$$

欧拉坐标 x,y,z,t 为互相独立的，因此 $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}$，只有 $i=j$ 时，$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=1$，其他情况下($i\neq j$)，$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ 均为零，而且 $\eta=(x,y,t)$，η 只是 x,y,t 的函数而与 z 无关时，上式化简后得

$$-\frac{\partial\eta}{\partial t}+w-u\frac{\partial\eta}{\partial x}-v\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \tag{10-12}$$

或写为

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial z}\quad 当\ z=\eta(x,y,t) \tag{10-13}$$

这就是波浪运动自由表面的运动学条件。

其次研究水波自由表面的动力学条件。在自由表面上压强为大气压强，$p=p_a$。令 $p_a=0$，即只考虑相对压强，并不失去问题的普遍性。于是式(2-80)可写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+gz=0\quad 当\ z=\eta(x,y,t) \tag{10-14}$$

即为自由表面的动力学边界条件，或可写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+g\eta=0 \tag{10-15}$$

在自由表面上之所以有两个边界条件，运动学和动力学边界

条件，是因为自由表面的位置 $z=\eta(x,y,t)$ 是未知的，它是波浪运动的解的一部分。这是求解波浪运动的一大困难。而两个边界条件均为非线性更增加了求解的难度。

当表面波长很短(大约只有几个厘米的量级)，这时表面张力(surface tension)将在自由水面产生作用。设表面张力系数为 σ，则二维曲面单位宽度上作用的张力 T 为

$$T=\sigma \tag{10-16}$$

现考虑如图 10-3 所示一微段弯曲的水面 BC，水面上的作用力有大气压强 p_a，水面下的压强为 p，在径向，力的平衡为

$$2\sigma\sin\Delta\alpha\simeq2\sigma\Delta\alpha=(p-p_a)\mathrm{d}s$$

如曲率半径为 R，则 $\mathrm{d}s=2R\Delta\alpha$，于是得

$$(p-p_a)=\frac{\sigma}{R}=\sigma K \tag{10-17}$$

式中：K 为曲率，$K=\dfrac{1}{R}$，曲率中心位于流体一侧时 K 定义为正值。设曲面 $\mathrm{d}s$ 与水平轴夹角为 ζ，则由 B 至 C 与水平轴夹角减小了 $2\Delta\alpha$，可见：

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}s}=-\frac{2\Delta\alpha}{\mathrm{d}s}=-\frac{1}{R}=-K$$

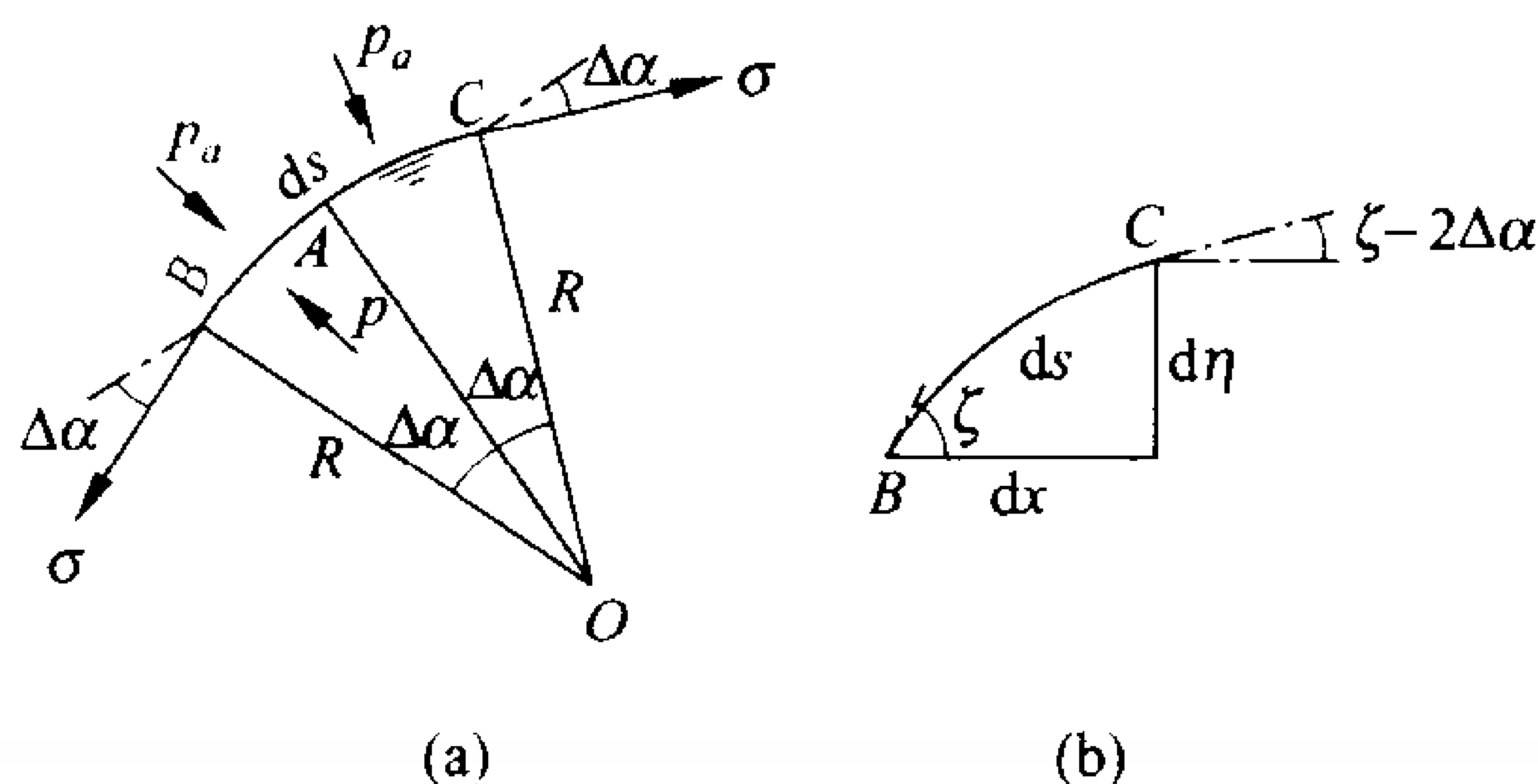


图 10-3　弯曲自由表面的动力条件[2]

又 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\eta^2$，所以

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]}$$

从图 10-3(b)可看出 $\tan\zeta=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$，微分之有

$$\sec^2\zeta\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2}$$

因 $\sec^2\zeta=1+\tan^2\zeta$，所以

$$K=-\frac{\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=-\frac{\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (10\text{-}18)$$

在自由表面上 $p_a=0$，由式(10-17)得 $p=\frac{\sigma}{R}=\sigma K$。伯努利方程式(2-80)可写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{\sigma K}{\rho}+gz=0 \quad 当\ z=\eta \qquad (10\text{-}19)$$

对于三维的情形，则

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{\sigma(K_1+K_2)}{\rho}+gz=0 \quad 当\ z=\eta(x,y,t) \qquad (10\text{-}20)$$

式中：K_1，K_2 为自由表面的主曲率，$K_1+K_2=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$。

底面作为固体边界，式(2-54)的边界条件为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z+h(x,y,t)]=0$$

通常认为底面为固定边界，h 与时间无关，所以

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \quad 当\ z=-h(x,y) \qquad (10\text{-}21)$$

如果底面为平面，$z=-h$，h 为常数（水深），则底面的边界条件为

底面处垂向速度$\left(w=\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)$为零，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}=0 \quad 当\ z=-h \tag{10-22}$$

侧面边界条件(lateral boundary condition，LBC)需要根据实际问题的物理本质确定。

在侧面边界上，波浪的周期性变化可以表现在时间上和空间上，分别由以下方程式表示：

$$\phi(x,t)=\phi(x+\lambda,t) \tag{10-23a}$$

$$\phi(x,t)=\phi(x,t+T) \tag{10-23b}$$

10.2.4 波浪运动的初始条件

对于不恒定运动应给出流动的初始条件，即 $\phi(x,y,z,0)$和$\eta(x,y,0)$。若波浪运动的不恒定性表现为周期性变化，即

$$\phi(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\phi(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \tag{10-24}$$

此式意味着在波浪的稳态解中时间因素和空间因素可以分离，因此只需求空间分量，则无需特别的初始条件，但是可以指定：在 x 方向传播的波在 $t=0$ 时，其一个波峰位于 $x=0$ 处。

10.3 微幅波理论

由上节可知：在求解波浪运动时一般可以假设流体是不可压缩的理想流体；流体运动为无涡运动，流速势函数 ϕ 满足拉普拉斯方程；线性的拉普拉斯方程是波浪运动的控制方程；由拉普拉斯方程解出流速势 $\phi(x,y,z,t)$后，可计算流速分布，并通过伯努利方程得到压强分布。问题在于求解拉普拉斯方程时，作为求解域边界的自由水面恰恰是求解的一个结果而不能予先确定，而自由水面边界条件又是非线性的，从而碰到很大的困难。解决问题的一

个途径是：认为波幅 A，流体质点的速度 $\boldsymbol{u}$ 及其导数等与其他特征尺度相比均为小量，从而使非线性边界条件线性化。对于很多波浪问题而言，这种假设是合理的，例如与水深或波长相比波幅为小量。

10.3.1 微幅波理论中的控制方程和边界条件

考虑等水深情况下的二维正弦水波。

1. 波浪运动的控制方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad 当 -\infty<x<\infty \quad -h<z<\eta, \tag{10-25}$$

2. 边界条件

(1) 在自由水面上

① 运动学条件

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad 当\ z=\eta(x,t) \tag{10-26}$$

② 动力学条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+gz=0 \quad 当\ z=\eta(x,t) \tag{10-27}$$

(2) 在底面

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \quad 当\ z=-h \tag{10-28}$$

对于微振幅波，ϕ 与 η 均为小量，可以令

$$\phi(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\phi_n(x,z,t) \quad 当\ \varepsilon\ll 1$$

$$\eta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\eta_n(x,t) \quad 当\ \varepsilon\ll 1$$

于是控制方程式(10-25)可以写为

$$\nabla^2\phi_n=0 \quad n=1,2,3,\cdots$$

底面边界条件式(10-28)可以写为

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial z}=0 \quad 当\ z=-h, \quad n=1,2,3,\cdots$$

自由水面运动学条件式(10-26)可以写为

$$\varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial t}+\varepsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t}+\cdots+\left[\varepsilon \frac{\partial \phi_1(x,\eta,t)}{\partial x}+\varepsilon^2 \frac{\partial \phi_2(x,\eta,t)}{\partial x}+\cdots\right]$$

$$\times\left(\varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial x}+\varepsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x}+\cdots\right)=\varepsilon \frac{\partial \phi_1(x,\eta,t)}{\partial z}$$

$$+\varepsilon^2 \frac{\partial \phi_2(x,\eta,t)}{\partial z}+\cdots \quad 当 z=\eta(x,t)$$

将此式展开，有

$$\varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial t}+\varepsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t}+\cdots+\varepsilon^2 \frac{\partial \phi_1(x,\eta,t)}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial x}+\cdots$$

$$=\varepsilon \frac{\partial \phi_1(x,\eta,t)}{\partial z}+\varepsilon^2 \frac{\partial \phi_2(x,\eta,t)}{\partial z}+\cdots \tag{10-29}$$

由于 η 为小量，$\phi_n(x,\eta,t)$可以在 $z=0$ 处被展开为泰勒级数，即

$$\phi_n(x,\eta,t)=\phi_n(x,0,t)+\eta\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial z}\right)_{z=0}+\frac{1}{2}\eta^2\left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z}\right)_{z=0}+\cdots \tag{10-30}$$

将式(10-30)代入式(10-29)，可得

$$\varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial t}+\varepsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t}+\cdots+\varepsilon^2 \frac{\partial \phi_1(x,0,t)}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial x}+\cdots=\varepsilon \frac{\partial \phi_1(x,0,t)}{\partial z}$$

$$+\varepsilon^2 \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1(x,0,t)}{\partial z^2}+\varepsilon^2 \frac{\partial \phi_2(x,0,t)}{\partial z}+\cdots \quad 当\ z=0 \tag{10-31}$$

按 ε 的次数分别得到

$$\varepsilon^1: \frac{\partial \eta_1}{\partial t}-\frac{\partial \phi_1}{\partial z}=0 \quad 当\ z=0 \tag{10-32a}$$

$$\varepsilon^2: \frac{\partial \eta_2}{\partial t}-\frac{\partial \phi_2}{\partial z}=-\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial x}+\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \quad 当\ z=0 \tag{10-32b}$$

$$\vdots$$

自由水面动力学条件式(10-27)可用同样方法处理，得

$$\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\cdots+\frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\cdots\right)\left(\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial z}+\cdots\right)$$
$$\times\left(\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial z}+\cdots\right)+\varepsilon g\eta_1+\varepsilon^2 g\eta_2+\cdots=0\quad 当\ z=\eta(x,t)$$

(10-33)

将 ϕ_n 在$(x,0,t)$展开为泰勒级数如式(10-30)，代入式(10-33)得

$$\varepsilon\frac{\partial\phi_1(x,0,t)}{\partial t}+\varepsilon^2\eta_1\frac{\partial^2\phi_1(x,0,t)}{\partial t\partial z}+\cdots+\varepsilon^2\frac{\partial\phi_2(x,0,t)}{\partial t}+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\frac{\partial\phi_1(x,0,t)}{\partial x}\right]^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\frac{\partial\phi_1(x,0,t)}{\partial z}\right]^2+\cdots$$
$$+\varepsilon g\eta_1+\varepsilon^2 g\eta_2+\cdots=0 \tag{10-34}$$

按 ε 的次数分别得到

$$\varepsilon^1:\ \frac{\partial\phi_1}{\partial t}+g\eta_1=0\quad 当\ z=0 \tag{10-35a}$$

$$\varepsilon^2:\ \frac{\partial\phi_2}{\partial t}+g\eta_2=-\eta_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t\partial z}-$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2\quad 当\ z=0 \tag{10-35b}$$

⋮

由 ε^1 的表示式给出波浪运动的线性理论即微幅波理论。微幅波理论可表述如下：

$$\nabla^2\phi=0\quad 当-\infty<x<\infty\quad -h<z<0 \tag{10-36}$$

边界条件为

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0\quad 当\ z=0 \tag{10-37}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+g\eta=0\quad 当\ z=0 \tag{10-38}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0\quad 当\ z=-h \tag{10-39}$$

其中自由水面(此处为 $z=0$)上的两个边界条件，即式(10-37)及

式(10-38)可以消去η而得到ϕ的一个变量的关系式为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \quad 当\ z=0 \tag{10-40}$$

求解压强场的伯努利方程(2-80),可用同样方法线性化,为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+gz+\frac{p}{\rho}=0 \tag{10-41}$$

10.3.2 微幅进行波

等水深水域微幅波的线性理论也称为爱利(Airy)理论。其控制方程和边界条件如上节所述。对于二维微幅进行波(progressive wave),可设

$$\phi=\phi(x,z,t)=X(x)Z(z)T(t) \tag{10-42}$$

从而使用分离变量法(separation of variables)来求解线性偏微分方程——拉普拉斯方程(10-36)。式中的$X(x)$为只依赖于变量x的某个函数,$Z(z)$只依赖于z而$T(t)$只依赖于时间t。由于ϕ在时间上是周期性的,因此可命$T(t)=e^{i\omega t}$。

因为ϕ在x轴上的解是周期性变化的,因此选择流速势函数ϕ为

$$\phi(x,z,t)=(A\sin kx+B\cos kx)(Ce^{kz}+De^{-kz})e^{i\omega t} \tag{10-43}$$

式中:A、B、C、D为任意常数,需要用边界条件确定其数值。

首先为满足周期性的要求,对式(10-43)进行分析。由式(10-23a)得

$$\begin{aligned}A\sin kx+B\cos kx &=A\sin k(x+\lambda)+B\cos k(x+\lambda)\\&=A(\sin kx\cos k\lambda+\cos kx\sin k\lambda)\\&\quad+B(\cos kx\cos k\lambda-\sin kx\sin k\lambda)\end{aligned} \tag{10-44}$$

只有当$\cos k\lambda=1$和$\sin k\lambda=0$时式(10-44)才能成立,所以必须要求$k\lambda=2\pi$,也就是说流速势函数ϕ要满足周期性变化,或(10-43)

中的 k 必须满足 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$。

其次利用底面的边界条件，当水深不变为 h，如式(10-39)所示，当 $z=-h$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0$。将式(10-43)的 ϕ 值代入式(10-39)，得

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=(A\sin kx+B\cos kx)(Cke^{-kh}-Dke^{kh})e^{i\omega t}=0$$

从而得

$$C=De^{2kh} \tag{10-45}$$

将式(10-45)代入(10-43)式得

$$\begin{aligned}\phi&=k(A\sin kx+B\cos kx)De^{kh}(e^{k(h-z)}+e^{-k(h+z)})e^{i\omega t}\\&=2kDe^{kh}(A\sin kx+B\cos kx)\operatorname{ch}k(h+z)e^{i\omega t}\end{aligned}$$

可将 $2kDe^{kh}$ 吸收到任意系数 A 和 B 中去，则流速函数 ϕ 可以写为

$$\phi=(A\sin kx+B\cos kx)\operatorname{ch}k(h+z)e^{i\omega t} \tag{10-46}$$

再次应用自由表面的边界条件式(10-40)，将式(10-46)的 ϕ 代入式(10-40)，于是得到一个很重要的关系式。即

$$\omega^2=gk\operatorname{th}kh \tag{10-47}$$

称为色散关系式(dispersion relation)。利用这一关系，对于在正 x 方向传播的波来说，有

$$\phi=G\operatorname{ch}k(h+z)e^{i(kx-\omega t)} \tag{10-48}$$

式中：G 为常数。波浪运动中如果不加说明，则一般只考虑 ϕ 中的实部。

最后由自由表面的动力学条件式(10-38)可求得波面 η，即

$$\begin{aligned}\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{z=0}&=i\,\frac{\omega}{g}G\operatorname{ch}(kh)e^{i(kx-\omega t)}\\&=i\,\frac{H}{2}e^{i(kx-\omega t)}\end{aligned} \tag{10-49}$$

式中：H 为波高。从而可得常数 G 为

$$G=\frac{Hg}{2\omega}\frac{1}{\operatorname{ch}kh} \tag{10-50}$$

将 G 值代入式(10-48)可得流速势函数 ϕ 为

$$\phi=\frac{Hg\operatorname{ch}k(h+z)}{2\omega\operatorname{ch}kh}e^{i(kx-\omega t)} \tag{10-51}$$

由此式可见流速势函数 ϕ 表示为 x,z,t 的函数,其数值与波高 H,波数 k,水深 h,频率 ω 等因素有关。

由式(10-51)表示的 ϕ 代表进行波,是水面波浪运动的一种基本的类型。由波速 $c=\frac{\lambda}{T}$ 的定义可得

$$c=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k} \tag{10-52}$$

波以波速 c 向右传播时,$kx-\omega t$ 将维持不变,因此 η 也维持不变,即波浪维持形状不变。例如当 $t=0$ 时 $x=x_0$,$kx-\omega t=kx_0$,而当 $t=t$ 时,$x=x_0+ct$,则 $kx-\omega t=k(x-ct)=kx_0$,可见 $kx-\omega t$ 保持为常数不变,从而说明在传播过程中 ϕ 值也保持不变。如果 ϕ 是 $(kx+\omega t)$ 的正弦或余弦函数,则 c 必为负值,即波浪自右向左传播。$(kx-\omega t)$ 称为波浪的相位函数(phase function)。$(kx-\omega t)$ 中若时间 t 保持不变 x 增加一个 $\frac{2n\pi}{k}=n\lambda$ 时 η 值保持不变,而若 x 保持不变 t 增加一个 $\frac{2n\pi}{\omega}=nT$ 时 η 值也保持不变,由此可进一步理解波长 λ 和周期 T 的含义,n 为 $-\infty\rightarrow\infty$ 之间的整数。相位函数表示的是在相邻波峰之间波的一个位置。

10.3.3 微幅进行波的特性

上节导出了等水深微幅进行波的流速势函数 ϕ 如式(10-51),由此式出发可以得到微幅进行波的一些特性,而这些特性在工程实践中是很有用的。

1. 波面

波面由式(10-49)所确定,这里取正号,与 $-A\sin(kx-\omega t)$ 只

有相位差而波形不变。其波面为

$$\eta=A\sin(kx-\omega t) \tag{10-53}$$

式中：$A=\frac{H}{2}$为波幅；k 为波数；ω 为圆频率。

由式(10-53)可见等水深微幅进行波为一正弦波。当然如果用余弦波表示则与正弦波相差 90°。波面沿 x 轴为一正弦曲线，波面的最高点波峰位于 $z=A$ 处，而波面的最低点即波谷位于 $z=-A$处，波高 $H=2A$。在 x 坐标为某一定数时，通过该点的波随时间的变化也是正弦变化，波面在$-A$ 与 A 之间变化。

2. 色散关系

式(10-47)所表示的色散关系式中，由于 $c=\frac{\omega}{k}$，所以可得

$$c^2=\frac{\lambda^2}{T^2}=\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{g}{k}\mathrm{th}kh \tag{10-54}$$

或者写为

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\mathrm{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \tag{10-55}$$

式(10-55)为波速与波长的关系。由色散关系式(10-47)还可以得到

$$\lambda=\frac{g}{2\pi}T^2\mathrm{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \tag{10-56}$$

根据波长 λ 与水深 h 的对比关系可以将波分为浅水波和深水波，这两种波的运动规律不同，色散关系也不同。

(1) 浅水波

当$\frac{h}{\lambda}\ll 1$，也就是说$\frac{\lambda}{h}\gg 1$，这时发生的波称为浅水波(shallow water waves)或称为长波(long wave)。由于 $\mathrm{th}x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$，当令 $x=\frac{h}{\lambda}\ll 1$ 时，$\mathrm{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)=\frac{2\pi h}{\lambda}$，得

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\text{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}\simeq\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}=\sqrt{gh} \tag{10-57}$$

式(10-57)说明对于长波其波速 c 等于$\sqrt{gh}$，只与水深 h 有关。

(2) 深水波

当$\frac{h}{\lambda}\gg1$，即当$\frac{\lambda}{h}\ll1$时的波为深水波(deep water wave)。对于深水波，海底对波浪的影响可以忽略，此时 $kh\geqslant1$，$\text{th}kh\to1.0$，从而深水波波速 c_0 为

$$c_0=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}=\sqrt{\frac{g}{k}} \tag{10-58}$$

由式(10-58)可见深水波的波速与水深无关，只决定于$\sqrt{\frac{g}{k}}$。也就是说只与波长有关。令深水波的波长为 λ_0，由式(10-56)得

$$\lambda_0=\frac{g}{2\pi}T^2\,\text{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)\simeq\frac{gT^2}{2\pi} \tag{10-59}$$

因此一般可用下式表示任意水深时的波长。即

$$\lambda=\lambda_0\,\text{th}kh \tag{10-60}$$

还可以把波速 c 表示为

$$c=c_0\sqrt{\text{th}kh} \tag{10-61}$$

可见一定周期的波当进入浅水区域时它们的波速会降低。

式(10-49)所表示的进行波中当相位函数 $kx-\omega t$ 为某一固定数值，也就是说当 k 与 ω 为常数，这种波称为单色行进波。式(10-47)、式(10-54)、式(10-56)是色散关系的不同形式。之所以称为色散关系式是表明当进行波包含了很多不同波长的波时，不同波长的波浪分量将由于它们的波速不同而在传播过程中互相离散(dispersion)。由此可见浅水波是非色散的，而深水波则是色散波。

在深水和浅水中波的色散关系式是不同的，分别为

在深水中$\frac{h}{\lambda}\gg 1$，有

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}kh \simeq gk \tag{10-62}$$

在浅水中$\frac{h}{\lambda}\ll 1$，有

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}kh \simeq gk^2 h \tag{10-63}$$

一般情况下可以按以下分区划分深水波与浅水波：

$$\left.\begin{array}{lll} kh<\frac{\pi}{10} & 即\frac{h}{\lambda}<\frac{1}{20} & 为浅水波（长波）\\ \frac{\pi}{10}<kh<\pi & 即\frac{1}{20}<\frac{h}{\lambda}<\frac{1}{2} & 为中等水深 \\ kh\geqslant\pi & 即\frac{h}{\lambda}\geqslant\frac{1}{2} & 为深水波（短波）\end{array}\right\} \tag{10-64}$$

波速随波长的变化关系如图 10-4 所示。图中还绘出了在深水和浅水中波速的近似公式如虚线所示。

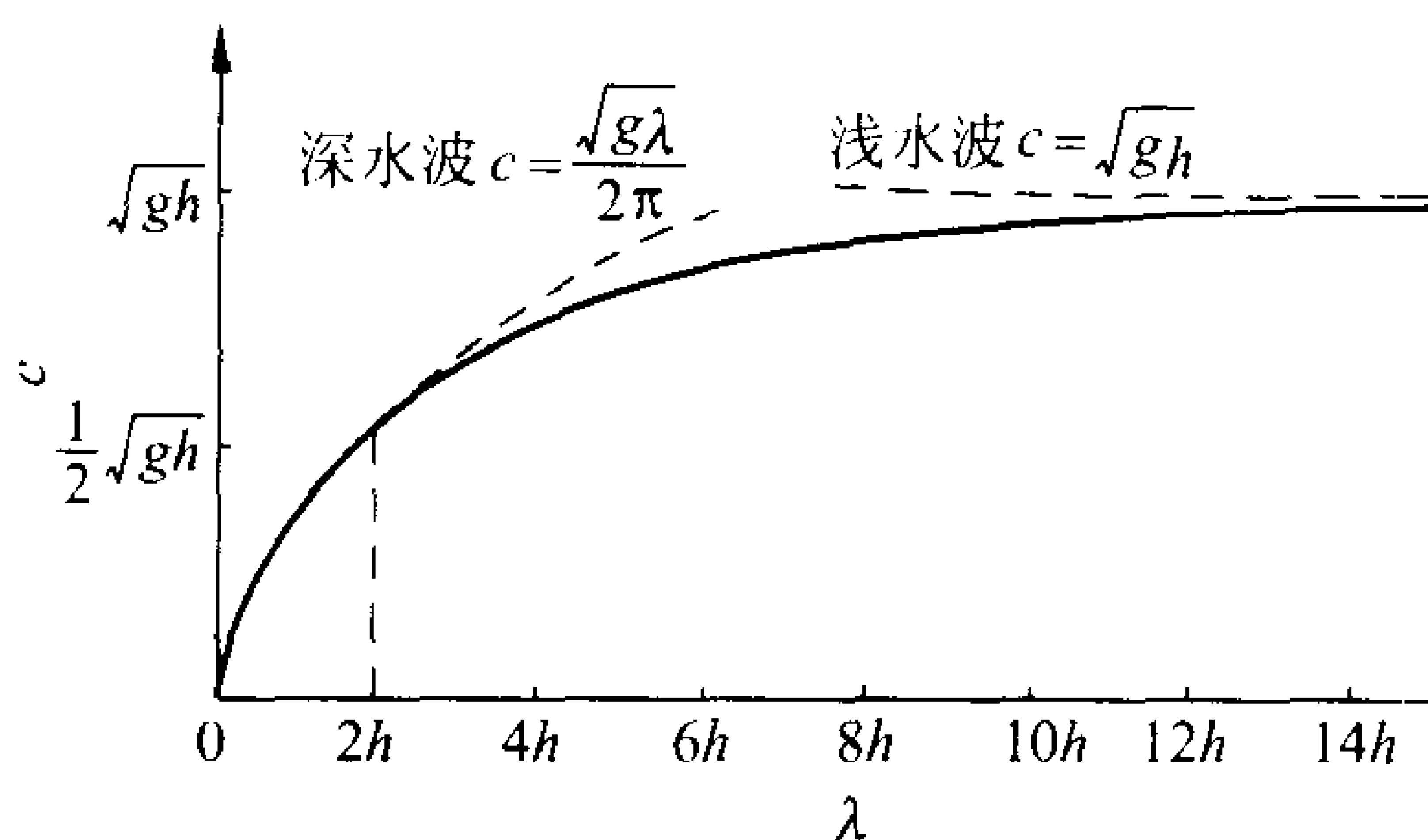


图 10-4　波速与波长关系[7]

3. 流函数

微幅进行波的流函数 ψ 可以由式(10-51)的流速势函数 ϕ 通过柯西-黎曼条件式(6-25)得出。即

$$\psi(x,z,t) = -\frac{Hg\,\mathrm{sh}k(h+z)}{2\omega\,\mathrm{ch}kh}\sin(kx-\omega t) \tag{10-65}$$

如果使坐标系跟随波浪运动，则可得到对于动坐标系而言的一个

恒定的流函数形式。即

$$\psi(x,z)=Cz-\frac{Hg\text{sh}k(h+z)}{2\omega\text{ch}kh}\sin kx \qquad (10\text{-}66)$$

Cz 代表叠加上去的一个均匀流。

4. 水流质点运动

由流速势 ϕ 可求得波浪运动中的速度场。即

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=-k\frac{Hg\text{ch}k(h+z)}{2\omega\text{ch}kh}\sin(kx-\omega t) \qquad (10\text{-}67)$$

$$w=\frac{\partial\phi}{\partial z}=k\frac{Hg\text{ch}k(h+z)}{2\omega\text{ch}kh}\cos(kx-\omega t) \qquad (10\text{-}68)$$

由上两式可见：在某一固定位置处，x 方向的水流质点速度 u 较 z 方向水流质点速度 w 滞后 90°；水平速度 u 的最大和最小值发生在$(kx-\omega t)=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots$，即在波峰和波谷位置；垂直速度 w 的最大和最小值却发生在$(kx-\omega t)=0,\pi,\cdots$，这里为原平衡水面$z=0$处。图 10-5 中分别绘出了四个相位，即 $x=0,\frac{\lambda}{4},\frac{\lambda}{2},\frac{3}{4}\lambda$ 处流速 u 和 w 的分布。在 $x=0,\frac{\lambda}{2}$处 u 为零而在 $x=\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4}$处 w 为零。

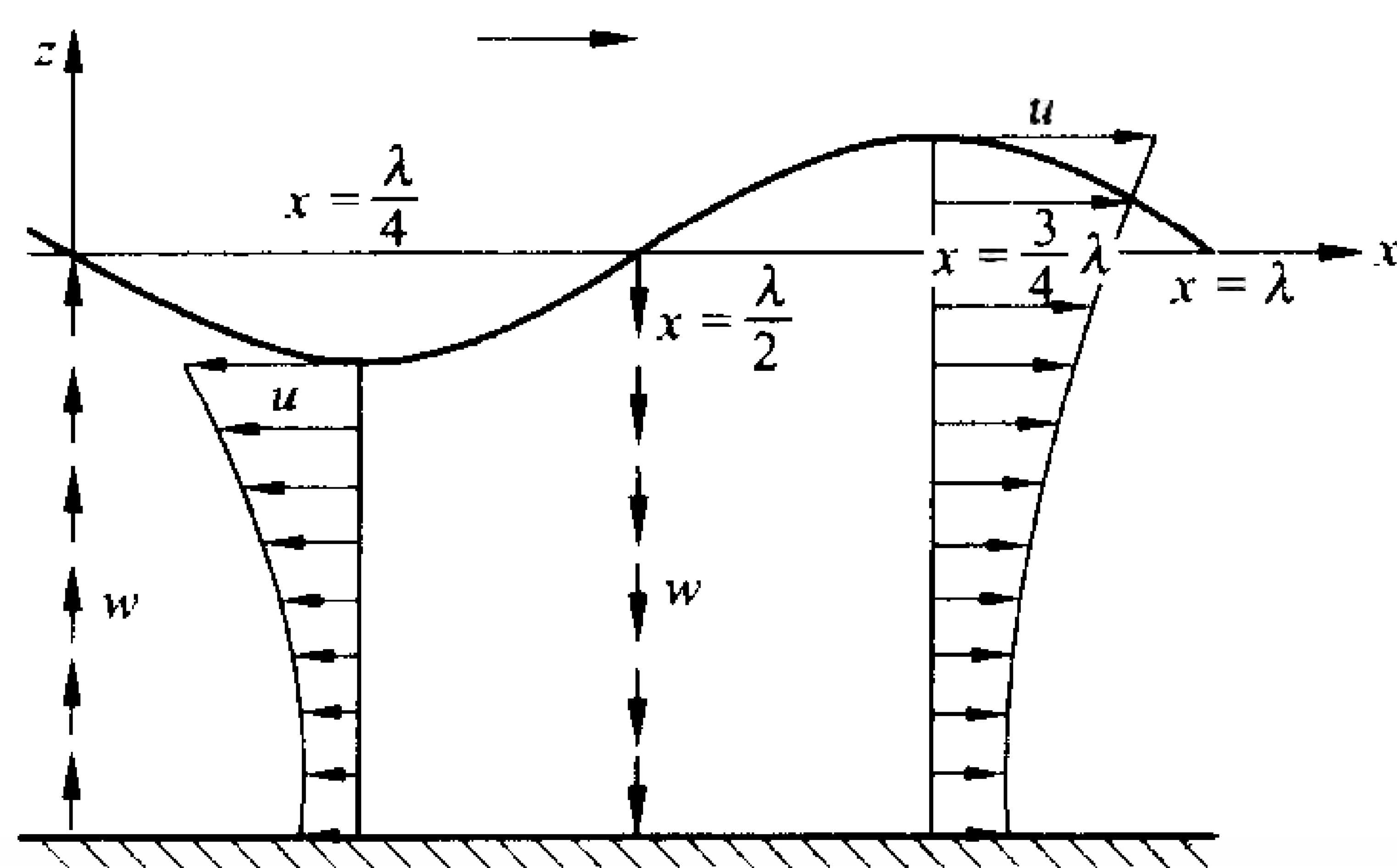


图 10-5 进行波中的流速分布

求得流速后可以进一步得出水流质点的运动轨迹。设流场中

一点 $\boldsymbol{x}_0(x_0,z_0)$ 为水流质点的平均位置，或者说它的平衡位置。在波浪的压力下流体质点将由 $\boldsymbol{x}_0$ 运动到 $\boldsymbol{x}_1(x_1,z_1)$ 处。在线性理论中可以认为 $\boldsymbol{x}_1$ 点处的流速与 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的流速相差为二阶小量因而可忽略不计。在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 处的流速为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=u\boldsymbol{e}_x+w\boldsymbol{e}_z$$

$$=-k\frac{Hg\,\mathrm{ch}k(h+z_0)}{2\omega\mathrm{ch}kh}\sin(kx_0-\omega t)\boldsymbol{e}_x$$

$$+k\frac{Hg\,\mathrm{sh}k(h+z_0)}{2\omega\mathrm{ch}kh}\cos(kx_0-\omega t)\boldsymbol{e}_z$$

位移 $(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)$ 可由上式积分得到

$$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_0^t\left[-k\frac{Hg\,\mathrm{ch}k(h+z_0)}{2\omega\mathrm{ch}kh}\sin(kx_0-\omega t)\boldsymbol{e}_x\right.$$

$$\left.+k\frac{Hg\,\mathrm{sh}k(h+z_0)}{2\omega\mathrm{ch}kh}\cos(kx_0-\omega t)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{d}t$$

$$=-k\frac{Hg\,\mathrm{ch}k(h+z_0)}{2\omega^2\mathrm{ch}kh}\cos(kx_0-\omega t)\boldsymbol{e}_x$$

$$-k\frac{Hg\,\mathrm{sh}k(h+z_0)}{2\omega^2\mathrm{ch}kh}\sin(kx_0-\omega t)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\xi\boldsymbol{e}_x+\zeta\boldsymbol{e}_z$$

由于是在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 处，所以在 $x=x_0,z=z_0$ 处，令

$$a=\frac{kHg}{2\omega^2\mathrm{ch}kh}\mathrm{ch}k(h+z_0) \tag{10-69a}$$

$$b=\frac{kHg}{2\omega^2\mathrm{ch}kh}\mathrm{sh}k(h+z_0) \tag{10-69b}$$

消去时间参数 t，可得

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\zeta^2}{b^2}=1 \tag{10-70}$$

由于 $\operatorname{ch}k(h+z_0)>\operatorname{sh}k(h+z_0)$（见图 10-6），所以 $a>b$，即式(10-70)表示一个椭圆方程。也就是说水波中流体质点的近似轨迹为一椭圆，长轴为 $2a$，短轴为 $2b$，长轴在水平方向。随着位置 z_0 向水下增加，质点轨迹椭圆的压缩系数 $\frac{b}{a}$ 减小。

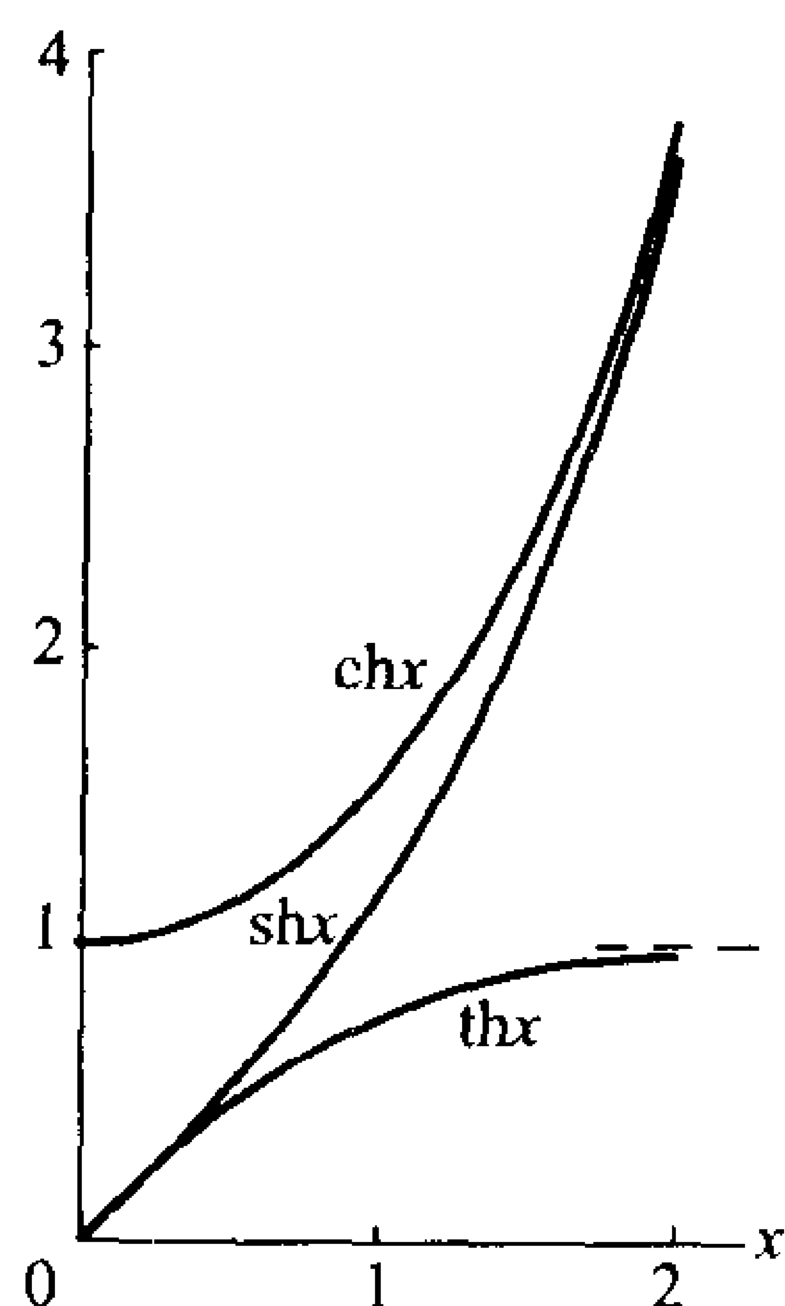


图 10-6 shx，chx 和 thx 的曲线，虚线为当 $x\to\infty$ 时 thx 的渐近线[5]

在平衡水面，即 $z_0=0$ 处的水流质点的位移轨迹——椭圆的短轴 b，可将色散关系式(10-47)代入式(10-69b)得到

$$b=\frac{H}{2}\frac{kg}{\omega^2}\operatorname{th}kh=\frac{H}{2} \tag{10-71}$$

式(10-71)说明这时质点轨迹在 z 方向最高为 $\frac{H}{2}$ 而最低为 $-\frac{H}{2}$，也就是说这些水流质点组成了水波的自由表面，不会有其平衡位置比 $z=0$ 更高的水流质点存在。

对于浅水波 $\left(\frac{h}{\lambda}<\frac{1}{20}\right)$，利用浅水的近似做法，$\operatorname{ch}kh\simeq 1$，$\operatorname{th}kh=kh$，并应用色散关系可得

$$a=\frac{H}{2}\frac{gk}{\omega^2}=\frac{H}{2}\frac{1}{kh}=\frac{H\lambda}{4\pi h}=\frac{HT}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} \tag{10-72a}$$

$$b=\frac{H}{2}\frac{\operatorname{sh}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}=\frac{H}{2}\left(1+\frac{z_0}{h}\right) \tag{10-72b}$$

在推导(10-72a)时用到了 $\frac{\lambda}{T}=c=\sqrt{gh}$。由此式可看出 a 与质点位置 z 无关，即沿水深上下，轨迹椭圆的长轴不变。由(10-72b)看出 b 值与质点位置 z 有关，当 $z_0=0$ 时 $b=\frac{H}{2}$，当 $z_0=-h$ 时 $b=0$。

水流质点轨迹如图 10-7(a)所示。

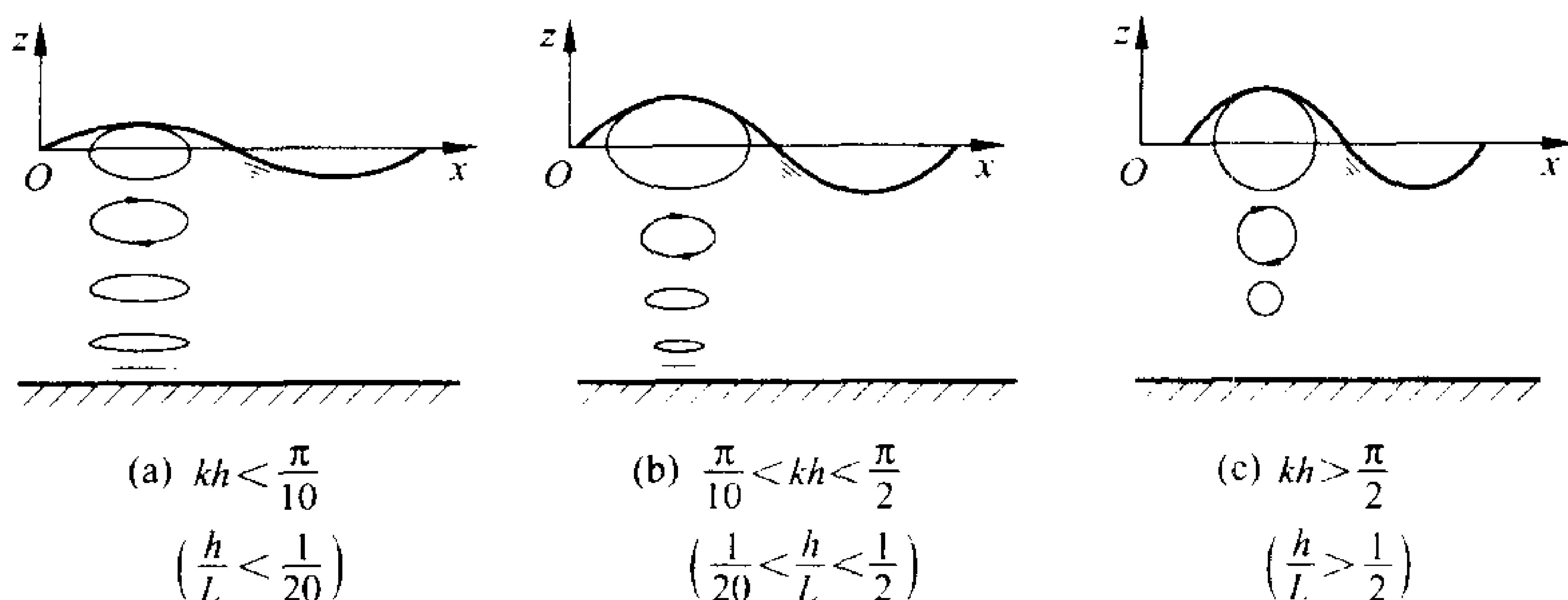


图 10-7 不同水深情况下水流质点的轨迹[3]

对于深水波$\left(\frac{h}{\lambda}\geqslant\frac{1}{2}\right)$，轨迹椭圆的长短轴可化简为

$$a=\frac{H}{2}e^{kz_0} \tag{10-73a}$$

$$b=\frac{H}{2}e^{kz_0}=a \tag{10-73b}$$

由上两式可见在波浪传播中水流质点的运动轨迹为圆，如图 10-7(c)所示，而且圆的半径与其所在位置 z_0 呈指数关系，随深度变小。当 $z_0=-\frac{\lambda}{2}$时 $a=b=e^{-\pi}$，此时圆半径只有水表面圆半径的 4 %，可以忽略。图 10-7(b)表示中等水深的情况。

对流速求导可以得到加速度分量，这里由于只考虑线性项，因此只保留当地加速度而牵移项为二阶项可忽略。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{H}{2}\omega^2\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{sh}kh}\cos(kx-\omega t) \tag{10-74}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{H}{2}\omega^2\frac{\mathrm{sh}k(h+z)}{\mathrm{sh}kh}\sin(kx-\omega t) \tag{10-75}$$

这里应用了色散关系 $\omega^2 = gk\text{th}kh$。

5. 波压分布

微幅进行波中的压强分布可由伯努利方程式(10-41)求得，这里考虑的是相对压强，$p_a=0$；流速势函数 ϕ 由式(10-51)给出。

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$= -\rho g z - \rho g \frac{H}{2} \frac{\text{ch}k(h+z)}{\text{ch}kh} \sin(kx - \omega t) \qquad (10\text{-}76)$$

式中：第一部分($-\rho g z$)为静水压强，即使没有波浪运动，这一项也仍然存在；第二部分是由于波浪运动而产生的动水压强，也称为净波压。如果在式(10-76)中令

$$K_p(z) = \frac{\text{ch}k(h+z)}{\text{ch}kh} \qquad (10\text{-}77)$$

则式(10-76)可以写成

$$p = -\rho g z - \rho g \frac{H}{2} K_p(z) \sin(kx - \omega t) \qquad (10\text{-}78)$$

$K_p(z)$称为"压强感应系数"(pressuse-responee function)。在平衡水深($z=0$)以下时 $K_p(z)$总是小于 1.0。动水压强是由两方面原因所构成：一是由于波动而使水面发生变化，从而改变了压强分布；另外一方面的原因是在波动中出现铅垂方向的加速度，而垂向加速度与水面的波动相位相差 π。图 10-8 绘出了自由表面波下面的压强分布图，特别标明了由动水压强导致的压强分布。压强感应系数随水深变化，在平衡水面 $z=0$ 处，$K_p(z)$有最大值为 1.0，而在海底 $z=-h$ 时 $K_p(z)=\dfrac{1}{\text{ch}kh}$。

6. 波能量

波浪运动中的能量包括势能和动能。势能的变化是由于水面的波动使波浪下面的水体偏离了原来的平衡状态而引起的。动能

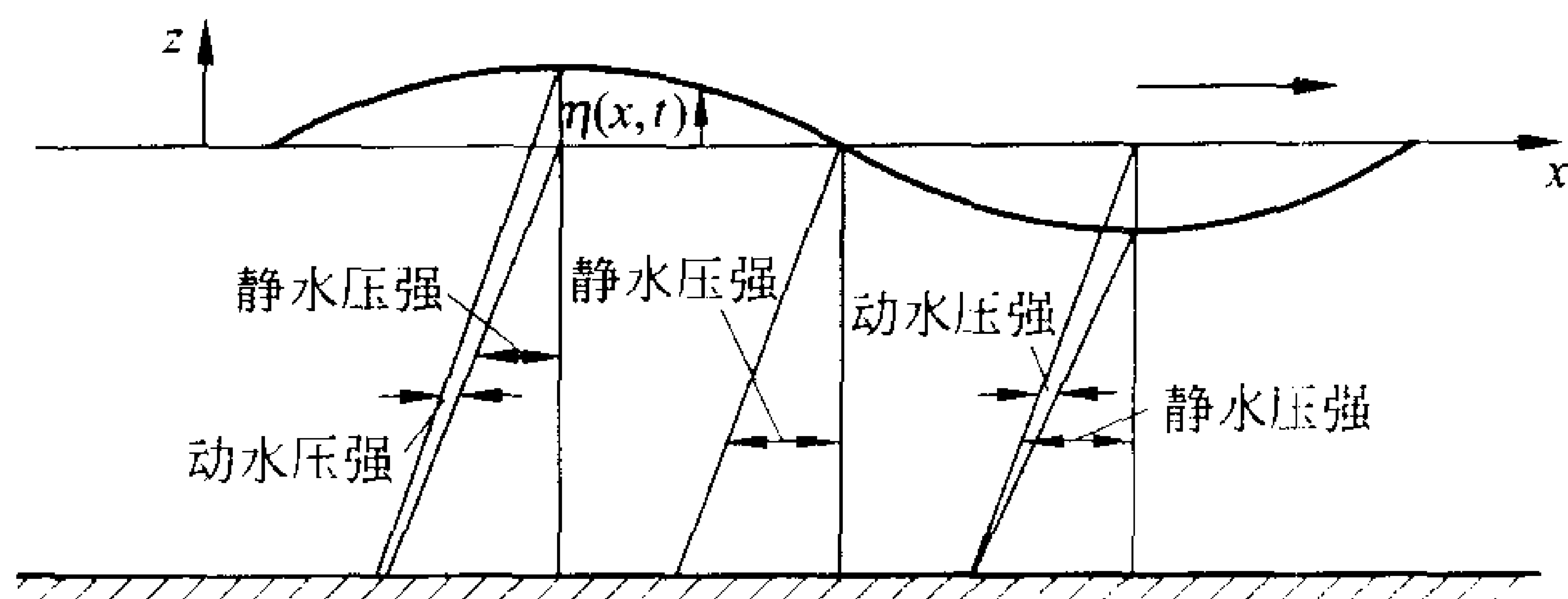


图 10-8 波浪作用下压强分布[3]

是由于在波浪的影响下整个流场中的流体质点都在运动，从而具有动能。

在单位宽度的二维重力波中，每一个波长里由于波浪运动而产生的流体势能（potential energy，PE）的增值（与平衡水体相比较）为

$$
\begin{aligned}
PE &= \int_0^{\eta} \mathrm{d}z \int_0^{\lambda} \mathrm{d}x(\rho g z)^{①} \\
&= \frac{1}{2}\rho g \int_0^{\lambda} \eta^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\rho g \int_0^{\lambda} \left(\frac{H}{2}\right)^2 \sin^2(kx - \omega t)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 \lambda
\end{aligned} \tag{10-79}
$$

在上式推导中应用了式(10-53)中 η 的公式。

在同样波长中其动能（Kinetic energy，KE）为

$$KE = \frac{1}{2}\rho \iiint_V (\nabla\phi)^2 \mathrm{d}V$$

---

① 注意这里 $\mathrm{d}z$ 的积分上下限为 $0 \rightarrow \eta$，如果是全部水体的势能则积分限为 $-h \rightarrow \eta$。当未出现波浪时，原平衡水体其势能则为 $\int_0^{\lambda}\int_{-h}^{0}(\rho g z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$。

由于$\nabla^2\phi=0$,所以此式可写为

$$KE=\frac{1}{2}\rho\iiint_V \nabla\cdot(\phi\,\nabla\phi)\mathrm{d}V$$

根据附录Ⅰ.15 高斯公式,得

$$KE=\frac{1}{2}\rho\iint_S(\phi\,\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{2}\rho\iint_S\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

左右两个侧面上$\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial n}$大小一样,方向相反,互相抵消。在底部$z=-h$的面上$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$。因此$\iint_S\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S$中只有自由表面上$\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial n}$的贡献,而在线性理论中为$z=0$的面上$\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0}$的贡献,注意是单位宽度,因此上式可写为

$$KE=\frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0}\mathrm{d}x$$

将式(10-51)的ϕ值代入上式,得

$$KE=\frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\frac{Hg}{2\omega}\cos(kx-\omega t)\left[\frac{Hgk}{2\omega}\,\frac{\mathrm{sh}kh}{\mathrm{ch}kh}\cos(kx-\omega t)\right]\mathrm{d}x$$

引用色散关系式$\omega^2=gk\mathrm{th}kh$,则

$$KE=\frac{1}{2}\rho g\left(\frac{H}{2}\right)^2\int_0^\lambda\cos^2(kx-\omega t)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\rho g\left(\frac{H}{2}\right)^2\lambda \qquad (10\text{-}80)$$

由式(10-79)及式(10-80)可见:在微幅进行波中一个波长的水体所具有的势能与动能相等,均为$\frac{1}{4}\rho g\left(\frac{H}{2}\right)^2\lambda$,而总能量则为

$$E_\lambda=PE+KE=\frac{1}{2}\rho g\left(\frac{H}{2}\right)^2\lambda \qquad (10\text{-}81)$$

单位长度流体的平均动能和平均势能均为$\frac{1}{4}\rho g\left(\frac{H}{2}\right)^2$，总能量为$E$称为波能(wave energy)，即

$$E = \frac{1}{2}\rho g\left(\frac{H}{2}\right)^2 \tag{10-82}$$

波能只与波幅$A=\frac{H}{2}$的平方有关而与水深无关。

微幅进行波在行进过程中由于水流质点的运动轨迹均为封闭的曲线，因此波的传播并没有质量的输送，但是水波却沿其传播方向输送能量，否则的话波也就不会传播。能量的输送率称为能量通量(energy flux)E_f。在微幅进行波中任取一垂直断面，则在一个波浪周期T的时间内该断面上动水压强$\boldsymbol{p}_{\mathrm{d}}$所做的功应为向断面另一侧水体输送的能量，当然能量的输送是在波浪进行的方向。设一个周期的功为W，则

$$W = \int_0^T\int_{-h}^0 \boldsymbol{p}_{\mathrm{d}} \cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{10-83}$$

则能量通量E_f为

$$E_f = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^0 \boldsymbol{p}_{\mathrm{d}} \cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{10-84}$$

将式(10-76)中压强的动水压强部分及式(10-67)中流速u代入上式，可得

$$\begin{aligned}
E_f &= \frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^0\left[\rho g\,\frac{H}{2}\,\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\sin(kx-\omega t)\right] \\
&\quad \times\left[k\,\frac{H}{2}\,\frac{g}{\omega}\,\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\sin(kx-\omega t)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^0\rho g\left(\frac{H}{2}\right)^2\omega\,\frac{\mathrm{ch}^2 k(h+z)}{\mathrm{ch}kh\,\mathrm{sh}kh}\sin^2(kx-\omega t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
&= \frac{\rho g\omega}{4k}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{2kh+\mathrm{sh}2kh}{\mathrm{sh}2kh}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}\rho g H^2 \ \frac{\omega}{k}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{2kh}{\text{sh}2kh}\right)\right] \tag{10-85}$$

式中：$\frac{1}{8}\rho g H^2=\frac{1}{2}\rho g A^2$ 表示波浪单位长度的总能量 E；$\frac{\omega}{k}=c$ 为波速；令$\frac{1}{2}\left(1+\frac{2kh}{\text{sh}2kh}\right)=n$ 代表波速的一个系数。式(10-85)可写为

$$E_f = Enc \tag{10-86}$$

式中：nc 即表示波能输送的速度。

下节会看到 nc 为波群的群速度。系数 n 对于深水和浅水情况取值不同，深水中 $n\to\frac{1}{2}$ 而浅水中 $n\to 1$。所以在深水中波能的传播速度只有波速的一半；在浅水中则波能的传播速度与波速相同。这是因为浅水中波为非色散波的原因。

10.4 微幅波的叠加

上节讨论微幅波时已知流体运动存在满足拉普拉斯方程的势函数 ϕ，因此可以采用势函数叠加的方法解决某些波浪运动问题。

10.4.1 驻波

当一微幅波在等水深水域中行进，如在 $x=b$ 处有一垂直墙，则微幅波被直墙反射而形成与入射波(incident wave)反方向的反射波(reflective wave)。定义反射波的波幅$\frac{H_r}{2}$与入射波的波幅$\frac{H_i}{2}$的比值 $C_r=\frac{H_r}{H_i}$为反射系数(reflection coefficient)。对于完全反射(perfect reflection)，$C_r=1$。又假设反射波的频率与波数与入射波相同。此时流速势函数为入射波和反射波流速势函数之和。

设入射波流速势函数 ϕ_1 为

$$\phi_1 = A\frac{g}{\omega}\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\cos(kx-\omega t) \tag{10-51}$$

$$\eta_1 = A\sin(kx-\omega t) \tag{10-53}$$

反射波流速势函数 ϕ_2 为

$$\phi_2 = A\frac{g}{\omega}\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\cos(kx+\omega t) \tag{10-87}$$

$$\eta_2 = A\sin(kx+\omega t) \tag{10-88}$$

入射波与反射波叠加后形成的波为驻波(standing wave)或称立波,其流速势 ϕ 为

$$\phi = \phi_1+\phi_2 = 2A\frac{g}{\omega}\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\cos kx\cos\omega t \tag{10-89}$$

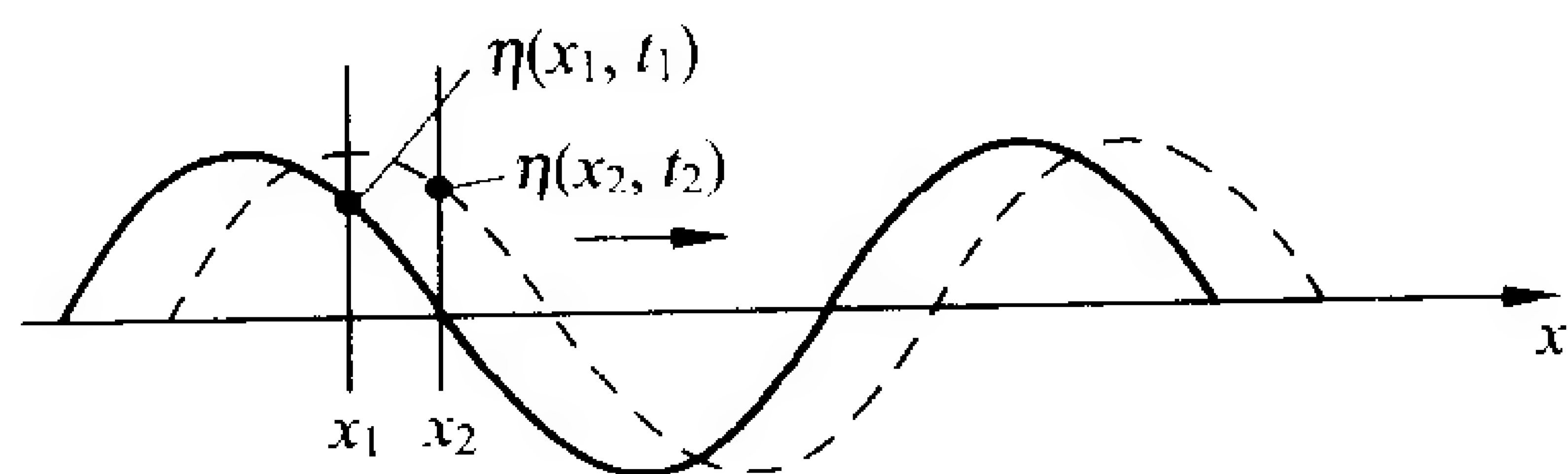
叠加后的波形为

$$\eta = \eta_1+\eta_2 = 2A\cos kx\sin\omega t \tag{10-90}$$

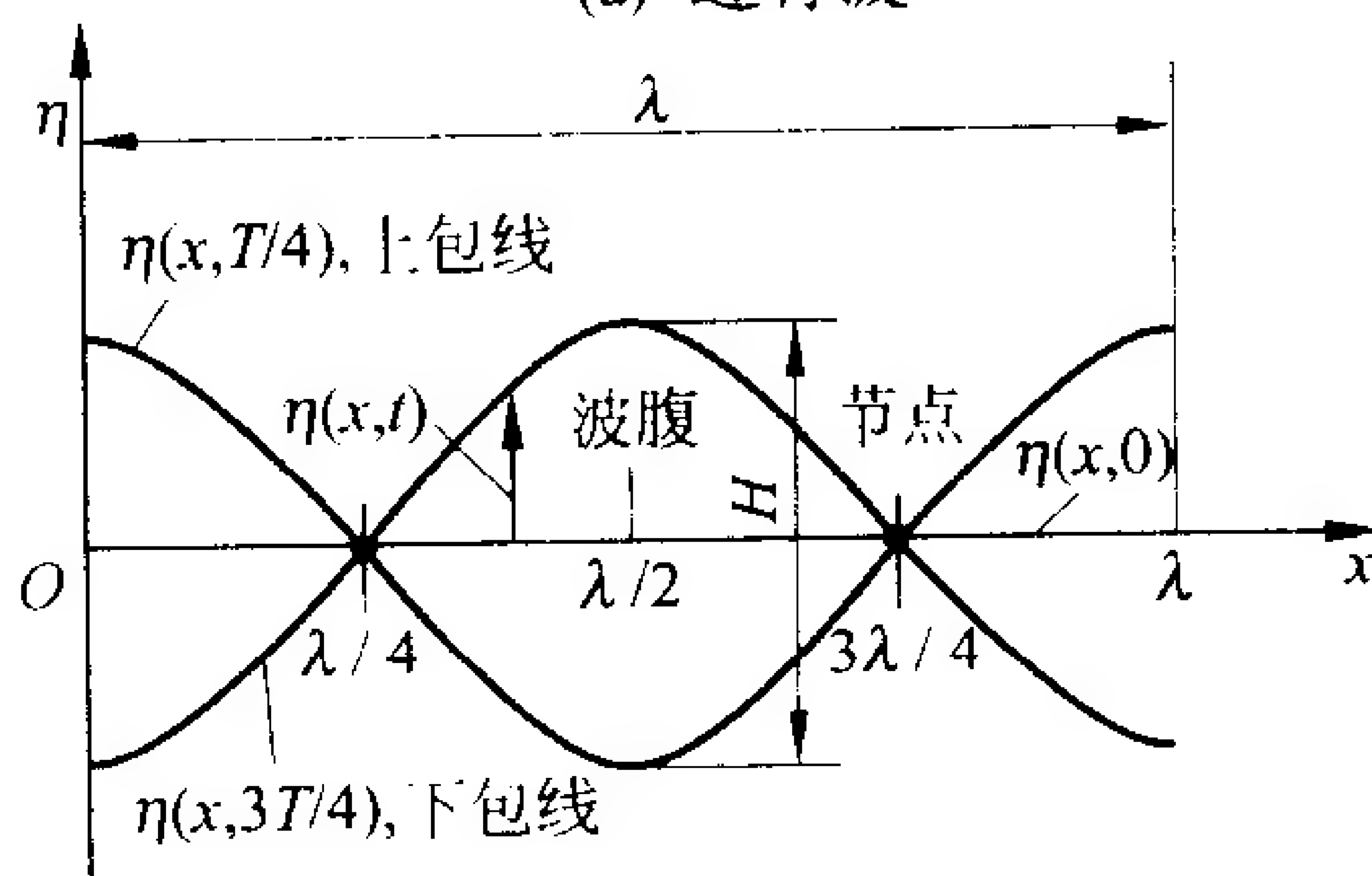
对于任意固定时间,例如 $t=t_1$,驻波表面为一余弦曲线,其波幅为 $2A\sin\omega t_1$。对于任意固定位置,例如 $x=x_1$,驻波表面随时间呈简谐变化。对于 $kx=\frac{(2n+1)\pi}{2}$,$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的点,η 在任何时刻都是零,也就是说这些点永远位于平衡水面($z=0$)处,这些点称为节点(nodes)。而对于 $kx=n\pi$ 的点,该点处在任何时间都是水面位移最大的点称为波腹(anti-nodes)。当 $\sin\omega t=\pm1$,即 $t=\frac{(2n+1)T}{4}$时 $\eta=\pm2A\cos kx$ 表示振幅达到最大值。波腹处的最大值为入射波波幅 A 的两倍。驻波已经失去了进行波的特性,并不在 x 方向传播而只是原地上下振荡。图 10-9 绘出了驻波与进行波可资比较。

通过式(6-25)的柯西-黎曼条件可由驻波的势函数式(10-89)求得驻波的流函数 ψ,即

$$\psi = -2A\frac{g}{\omega}\frac{\mathrm{sh}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\sin kx\cos\omega t \tag{10-91}$$

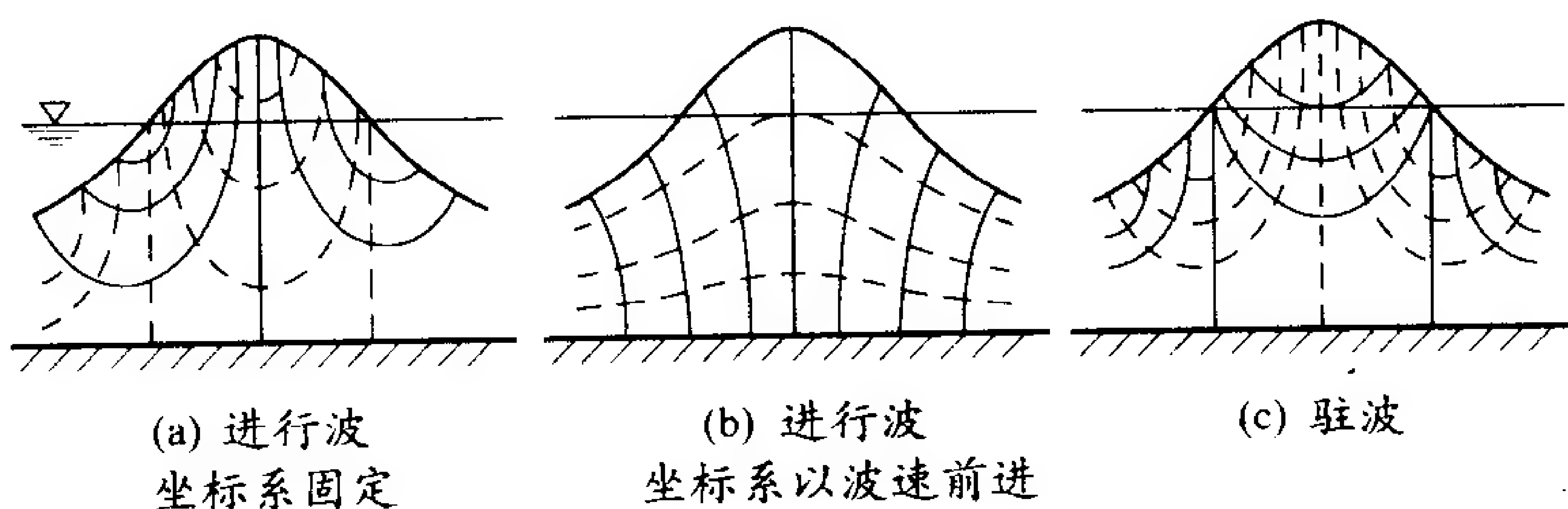


(a) 进行波



(b) 驻波(C_r=1.0)

图 10-9 驻波与进行波的比较[3]



(a) 进行波
坐标系固定

(b) 进行波
坐标系以波速前进

(c) 驻波

等势线(实线——)流线(虚裂线- - - -)

图 10-10 波浪运动的等势线与流线[3]

图 10-10 绘出了进行波和驻波的等势函数线(等势线)和流线。

驻波下面水质点的流速可从流速势函数 ϕ 导出,即

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=-2A\frac{gk}{\omega}\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\sin kx\cos\omega t$$

$$=-2A\omega\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{sh}kh}\sin kx\cos\omega t \qquad (10\text{-}92)$$

$$w=\frac{\partial\phi}{\partial z}=2A\frac{gk}{\omega}\frac{\mathrm{sh}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\cos kx\cos\omega t$$

$$=2A\omega\frac{\mathrm{sh}k(h+z)}{\mathrm{sh}kh}\cos kx\cos\omega t \qquad (10\text{-}93)$$

与进行波的情况相似，驻波中流速也随距底面高度的增加而增加，u 的最大值发生在节点断面而 w 的最大值发生在波腹断面，如图 10-11所示。在节点断面 $w=0$ 而在波腹 $u=0$。

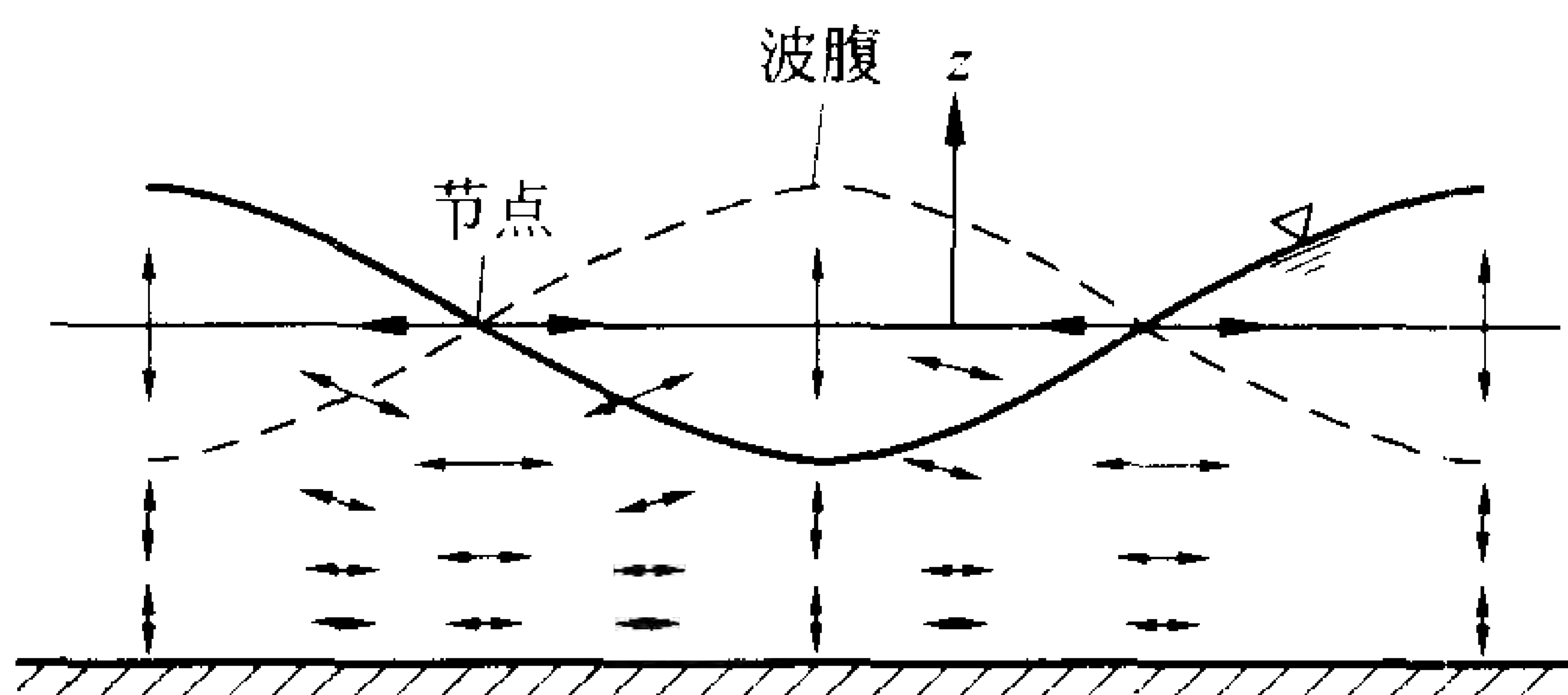


图 10-11　驻波中水流质点流速分布[3]

由式(10-92)及式(10-93)可看出水平与垂直流速之间并无相位差，因此在某些时间如当 $t=\frac{T}{4}$时，水平瞬时流速与垂直瞬时流速可同时为零，全部水体为静止状态，这时波能全部为势能；而在某些时间如当波面处于平衡水面时波能全部为动能。前面在 $x=b$处设一垂直墙，此墙处的边界条件应为

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=b}=0$$

由此可见垂直墙的位置应为 $kx=kb=n\pi$，n 为整数。因此$b=\frac{n}{2}\lambda$，也就是说垂直墙应位于波腹处。

驻波中水流质点的运动轨迹可用与进行波中同样的方法求得。设平衡位置为 $\boldsymbol{x}_0$ 的水流质点在波浪压力作用下移动到 $\boldsymbol{x}_1$ 点。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t} &= \nabla\phi\big|_{x=x_0} \\ &= u\boldsymbol{e}_x + w\boldsymbol{e}_z \\ &= -2A\omega\frac{\operatorname{ch}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\sin kx_0\cos\omega t\boldsymbol{e}_x \\ &\quad + 2A\omega\frac{\operatorname{sh}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\cos kx_0\cos\omega t\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

位移 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ 可由上式积分给出，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0 &= \int_0^t\Big[-2A\omega\frac{\operatorname{ch}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\sin kx_0\cos\omega t\boldsymbol{e}_x \\ &\quad + 2A\omega\frac{\operatorname{sh}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\cos kx_0\cos\omega t\boldsymbol{e}_z\Big]\mathrm{d}t \\ &= -2A\frac{\operatorname{ch}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\sin kx_0\sin\omega t\boldsymbol{e}_x \\ &\quad + 2A\frac{\operatorname{sh}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\cos kx_0\sin\omega t\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{10-94}$$

令

$$a_1 = -2A\frac{\operatorname{ch}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\sin kx_0 \tag{10-95}$$

$$b_1 = 2A\frac{\operatorname{sh}k(h+z_0)}{\operatorname{sh}kh}\cos kx_0 \tag{10-96}$$

于是有

$$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0 = a_1\sin\omega t \tag{10-97}$$

$$z_1-z_0 = b_1\sin\omega t \tag{10-98}$$

由上两式可见驻波中水流质点在平衡点附近做直线振荡。质点振荡的振幅和斜率随平衡点的位置(x_0,z_0)而变化。

斜率为

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} = \frac{b_1}{a_1} = -\frac{\mathrm{sh}k(h + z_0)}{\mathrm{ch}k(h + z_0)}\frac{\cos kx_0}{\sin kx_0}$$

$$= -\mathrm{th}k(h + z_0)\cot kx_0 \qquad (10\text{-}99)$$

振幅为

$$(a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}} = 2A\frac{1}{\mathrm{sh}kh}[\mathrm{ch}^2k(h + z_0)\sin^2 kx_0$$

$$+ \mathrm{sh}^2k(h + z_0)\cos^2 kx_0]^{\frac{1}{2}} \qquad (10\text{-}100)$$

振动的频率都是 ω。例如在水底，$z_0 = -h$，质点轨迹的斜率为 0，因此水流质点均是水平振动，其振幅为 $\left|-2A\frac{\sin kx_0}{\mathrm{sh}kh}\right|$。在波峰和波谷处 $x_0 = n\frac{\lambda}{2}$，斜率为 $\pm\infty$，因此水流质点是垂直振动。在节点处 $x_0 = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$，斜率为 0，水流质点作水平振动。图 10-11 同样表示了水流质点振动的情况。

驻波下面水体中的压力分布仍由线性化的伯努利方程式(10-41)求得，其中流速势函数由式(10-89)给出。即

$$p = -\rho gz - \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$= -\rho gz + 2\frac{H}{2}\rho g\frac{\mathrm{ch}k(h + z)}{\mathrm{ch}kh}\cos kx\sin\omega t \qquad (10\text{-}101)$$

压强感应系数 $K_p(z)$ 为

$$K_p(z) = \frac{\mathrm{ch}k(h + z)}{\mathrm{ch}kh}$$

与式(10-77)进行波的压强感应系数相同。压强 p 为

$$p = -\rho gz + 2\frac{H}{2}\rho gK_p(z)\cos kx\sin\omega t \qquad (10\text{-}102)$$

由式(10-102)可以看出：在节点下面压强只有静压强($-\rho gz$)；动压强与水面波有相同的相位。作用在垂直墙上的波压力可由积分墙上压强分布得到

$$F=\int_{-h}^{0}\left[-\rho g z+2\rho g\frac{H}{2}\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\cos kx\sin\omega t\right]\mathrm{d}z$$

$$=\rho g\frac{h^2}{2}+2\frac{H}{2}\rho g h\frac{\mathrm{th}kh}{kh}\cos kx\sin\omega t \tag{10-103}$$

由式(10-103)可见作用在墙上的波荷载为静水荷载加一个振动的动水荷载项。最大的荷载是当 $t=\frac{(4n+1)T}{4}$ 时，这时波幅等于 $H=2A$。

10.4.2 不完全驻波

上节讨论的驻波是当入射波被垂直墙完全反射时产生的现象，反射波的波幅和周期与入射波完全相同。在自然界或工程设施中，更通常的现象是反射并非完全反射，而是一部分入射波的波能被垂直墙所吸收或者有部分波能穿透垂直墙(如果墙不是完全不透水的)，例如防波堤(breakwater)或海墙(seawall)。这时入射波的波高为 H_i 而反射波波高则为 H_r，二者不同 $C_r<1.0$。而且反射波与入射波之间还会存在相位差 δ。得到的入射波与反射波叠加后的水面波为

$$\eta=\frac{H_i}{2}\sin(kx-\omega t)+\frac{H_r}{2}\sin(kx+\omega t+\delta) \tag{10-104}$$

这种波称为不完全驻波(partial standing wave)。其流速势函数 ϕ 为

$$\phi=\frac{g}{\omega}\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh}\left[\frac{H_i}{2}\cos(kx-\omega t)+\frac{H_r}{2}\cos(kx+\omega t+\delta)\right] \tag{10-105}$$

不完全驻波的水面如图 10-12 所示。式(10-104)所表示的水面波可以改写为

$$\eta=\frac{H_i}{2}(\sin kx\cos\omega t-\cos kx\sin\omega t)$$

$$+\frac{H_r}{2}[\sin(kx+\delta)\cos\omega t+\cos(kx+\delta)\sin\omega t]$$

$$=I(x)\cos\omega t+F(x)\sin\omega t \tag{10-106}$$

式中：

$$I(x)=\frac{H_i}{2}\sin kx+\frac{H_r}{2}\sin(kx+\delta) \tag{10-107a}$$

$$F(x)=\frac{-H_i}{2}\cos kx+\frac{H_r}{2}\cos(kx+\delta) \tag{10-107b}$$

由式(10-107)可见 η 是两个驻波的和。对于任意位置 x 可找到 η 的最大值和最小值，从而可以连接成为水面的上下包线(envelope)，如图 10-12 中的点线(………)。对于不完全驻波不存在真正意义上的节点。

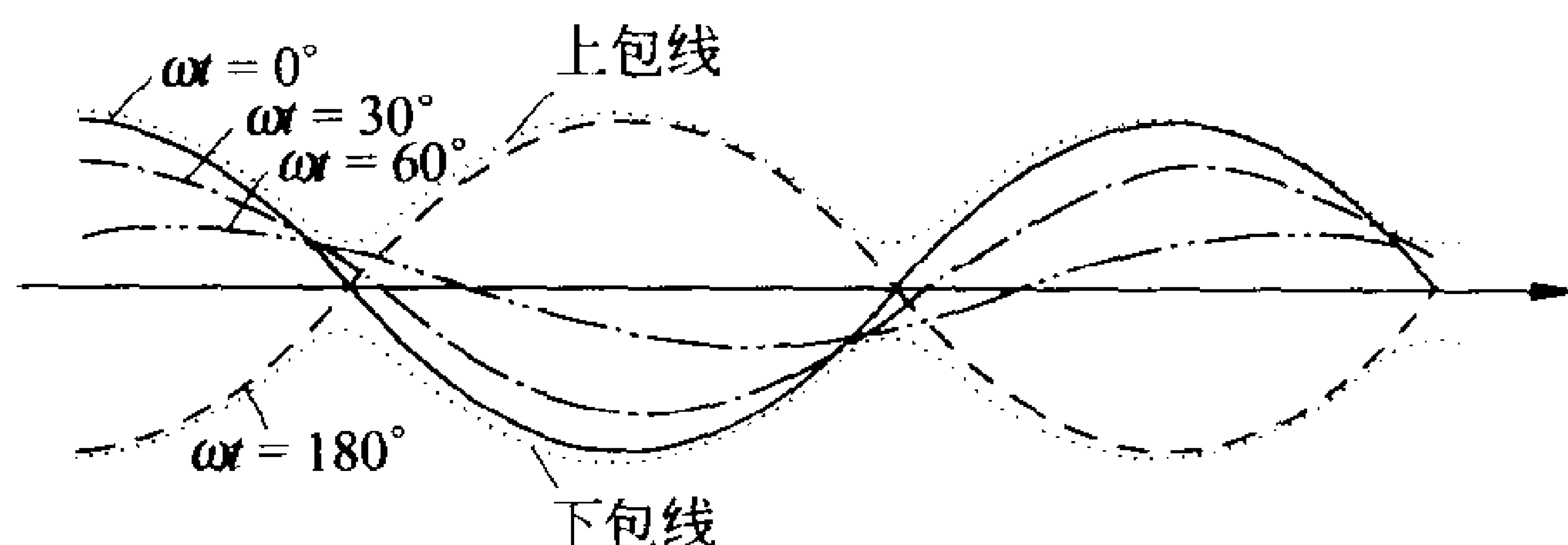


图 10-12　不完全驻波的瞬时水面线及包线($C_r<1.0$)[3]

10.4.3　波群

当考虑两个单色进行波时，如果两个波列的波幅相同而波数相差一小量 Δk，相应的频率相差为小量 $\Delta\omega$，即

$$\eta_1=A\sin(kx-\omega t)=A\sin\theta$$

$$\eta_2=A\sin[(k+\Delta k)x-(w+\Delta\omega)t]$$

$$=A\sin(\theta+\Delta\theta)$$

式中：θ 为波的相位函数。

两个波叠加后为

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_1 + \eta_2 \\
&= 2A\sin\frac{1}{2}[(\theta+\Delta\theta)+\theta]\cos\frac{1}{2}[(\theta+\Delta\theta)-\theta] \\
&= 2A\cos\frac{1}{2}(\Delta kx-\Delta\omega t)\sin\left[kx-\omega t+\frac{1}{2}(\Delta kx-\Delta\omega t)\right] \\
&= 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin(kx-\omega t)\left[1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\theta}{\theta}\right] \\
&= A_0\sin(kx-\omega t)
\end{aligned} \tag{10-108}$$

因为$\frac{\Delta\theta}{\theta}\ll 1.0$，所以式中的 A_0 为

$$A_0 = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \tag{10-109}$$

A_0 表示由两个波幅相同，波数与频率十分接近的进行波所组成的波群或称波包(wave group)的波幅。如果两个单色的波列其相位相同，即 $\Delta k=0$，$\Delta\omega=0$，那么这两个波列叠加后其波幅为 $2A$，为两个单独波列波幅相加。但是由于两个波列的相位差，使得在叠加过程中当两个波正好同步则波得到加强，当两个波不同步时则会互相抵消，有如光的干涉现象，从而其波幅 $2A$ 被 $\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$所调制(modulate)，形成如图 10-13 所示的波群。这种波也称为调幅波(amplitude modulated wave)。由式(10-108)知，波群的相位函数并未改变，因此波群内每个波的波速 c 仍为$\frac{\omega}{k}$。波群波幅的包线如图 10-13 虚线所示其形状也是一种简谐波动。由式(10-109)知这个波的波数为$\frac{\Delta k}{2}$而频率为$\frac{\Delta\omega}{2}$，因此它的波长 λ_g 为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{4\pi}{\Delta k} \tag{10-110}$$

而其周期 T_g 为

$$T_g = \frac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{4\pi}{\Delta\omega} \tag{10-111}$$

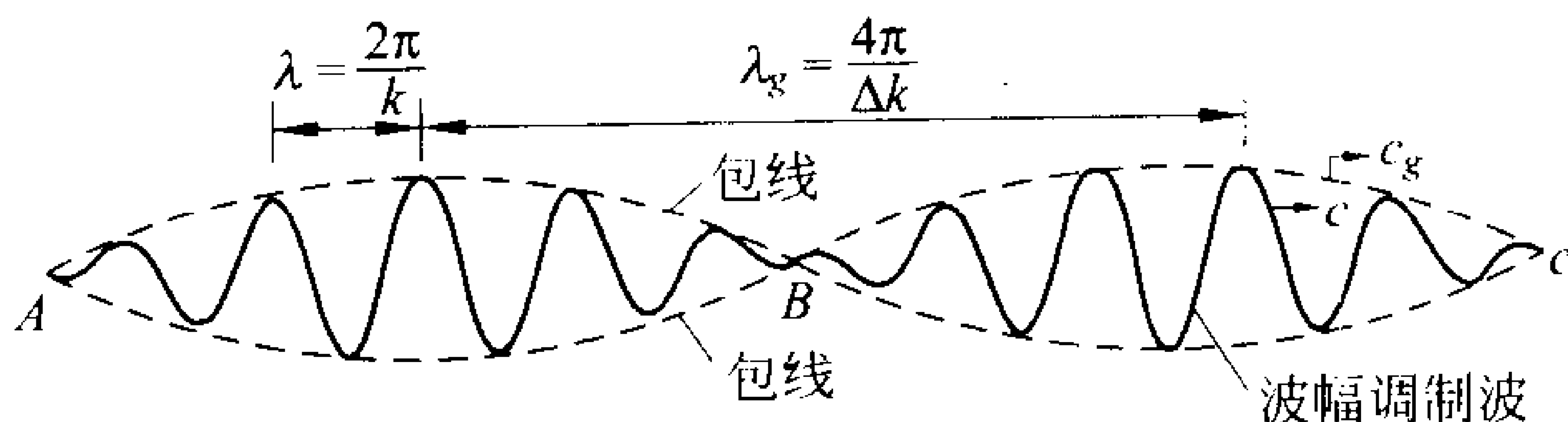


图 10-13　波群[3]

这里需要注意的是波群或波幅调制波是一个实实在在存在的波动水面，而波群的外包线只是从更宏观的角度看它也是一种波动，如图10-13中的虚线所示，而这个虚线并不是真正的水面。波群包线以速度 c_g 传播，称 c_g 为群速度(group volocity)。由定义

$$c_g = \frac{\lambda_g}{T_g} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

得

$$c_g = \lim_{\substack{\Delta k\to 0\\ \Delta\omega\to 0}} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

对于微幅波，存在式(10-47)的色散关系为

$$\omega^2 = gk\,\text{th}kh \tag{10-47}$$

对式(10-47)求导得

$$\partial\omega\frac{d\omega}{dk} = g(\text{th}kh + kh\,\text{sech}^2 kh)$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\,\frac{g}{\omega}\text{th}kh\left(1 + \frac{kh\,\text{sech}^2 kh}{\text{th}kh}\right)$$

因式中 $\frac{g}{\omega}\text{th}kh=c$，所以

$$\frac{d\omega}{dk} = c\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\text{sh}2kh}\right)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\text{sh}2kh}\right) = nc \tag{10-112}$$

c_g 群速度指的是波群外包线的传播速度。与 10.3.3 节第 6 项波能量式(10-86)相比较,群速度的数值与波能量的传播速度完全一致。图 10-13 中 A,B,C 等点处波幅为零,这些点也称为节点,但是它们与驻波的节点有所不同。驻波的节点,其位置固定而波群的外包线的节点则随着波群外包线也以 c_g 速度向前传播。节点断面没有能量的传递,因此波能量只能以节点传播速度即群速度传播。

深水重力波由式(10-112)可以算出其波群速度 c_g 为其相位速度 c 的一半,即 $c_g=\frac{1}{2}c, c_g<c$。而表面张力波中 $c_g=\frac{3}{2}c, c_g>c$。当 $c>c_g$,在波群外包线内传播的波群似乎是从一个节点处出现,向前传播到下一个节点处消失。反之,当 $c<c_g$,则外包线中的波群对于外包线而言则是从一个节点处出现向反方向传播至上游节点处消失。

浅水波中可由式(10-112)得到其波群速度 c_g 与相位速度 c 相等,$c_g=c=\sqrt{gh}$,为非色散波。对于一个线性的非色散波列,其水波形状不随时间而改变,所有各种波长的波其相位速度相同,并不离散。事实上,所有的非色散波,其波群速度与相位速度相同。

如果波群不是由两个而是由多个单色进行波叠加而成,可以用 $A(k)e^{i(kx-\omega t)}$ 来表示一个进行波,波幅 A 是波数 k 的函数。如波数 k 为任一实数,则叠加后的波可写为

$$\eta(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i(kx-\omega t)}dk \tag{10-113}$$

叠加后按式(10-113)所示的这样一个波的集体称为波束(wave packet)。$A(k)$称为波幅谱(amplitude spectrum)。如果是平面波(plane wave),波并非只是沿一个固定坐标 x 轴方向传播而是与 x 轴成一倾角 θ 的方向传播,这时的波可写为

$$\eta(x,y,t)=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{-\infty}^{\infty}A(k,\theta)\exp[-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)+i\omega t]dk \tag{10-114}$$

式中的 $A(k,\theta)$称为方向谱。η与$A(k)$或$A(k,\theta)$之间是傅里叶变换和反变换的关系。

10.5 水波的反射、折射和绕射

和其他波动现象一样，水波同样有反射(reflection)、折射(refraction)和绕射(diffraction)的现象，而且这些现象在海洋和海岸工程中有着重要的意义。

10.5.1 水波的反射

10.4.1节讨论驻波时已经研究了当波浪前进方向与建筑物直墙垂直时反射波与入射波的关系。本节将讨论当波列与直墙斜交时波浪的反射。设波列沿与 x 轴成倾角 α 的斜线传播如图10-14所示。波数 k 可看作是一个向量 $\boldsymbol{k}$，其 x,y 方向的分量分别为

$$k_x = k\cos\alpha \tag{10-115a}$$

$$k_y = k\sin\alpha \tag{10-115b}$$

$\boldsymbol{k}$ 的方向与波峰线垂直也就是说沿波传播的方向，其值$|\boldsymbol{k}|=\dfrac{2\pi}{\lambda}$。

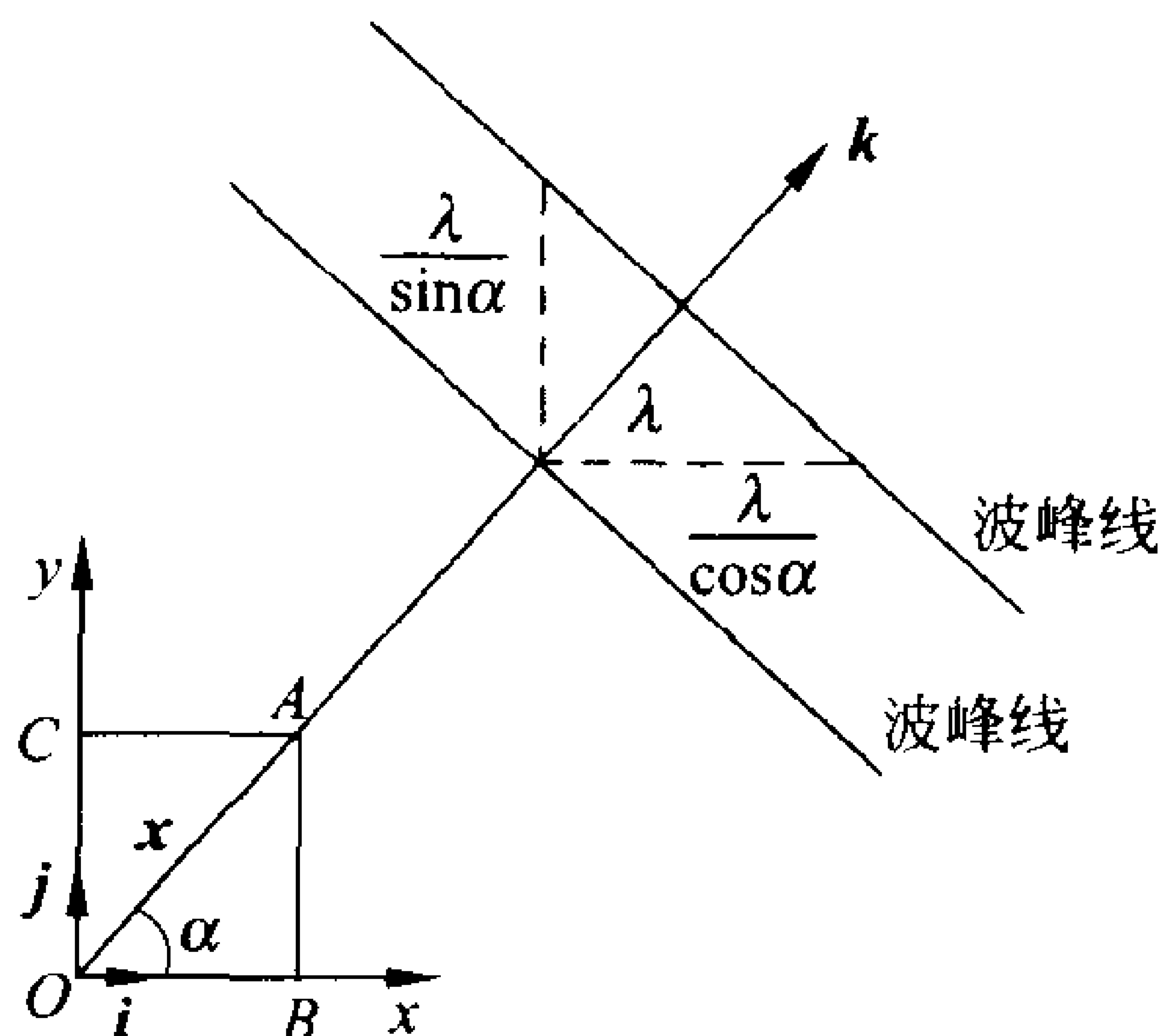


图10-14 平面波[7]

$\boldsymbol{k}$ 为一平面向量，在 z 轴没有分量。由图可以看出波长在 x 方向为$\dfrac{\lambda}{\cos\alpha}$，在 y 方向为$\dfrac{\lambda}{\sin\alpha}$，所以 λ 不是向量。波面表示式(10-53) $\eta=A\sin(kx-\omega t)$中的 kx 应为

$$kx\cos\alpha+ky\sin\alpha=k_x x+k_y y=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} \tag{10-116}$$

因此平面微幅波的流速势函数为

$$\phi=\frac{Hg\ \mathrm{ch}k(h+z)}{2\omega\ \mathrm{ch}kh}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{10-117}$$

而波面方程式则为

$$\eta=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t) \tag{10-118}$$

平面波的色散关系与微幅进行波的并无变化，即

$$\omega^2=gk\,\mathrm{th}kh \tag{10-47}$$

只不过式中 $k=(k_x^2+k_y^2)^{\frac{1}{2}}$。图 10-15 中直墙位于 x 轴上，入射波射线与 x 轴成 α 角，水波的反射中反射角与入射角相等。入射波可表示为

$$\begin{aligned}\eta_i&=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\\&=A\sin(kx\cos\alpha+ky\sin\alpha-\omega t)\end{aligned} \tag{10-119}$$

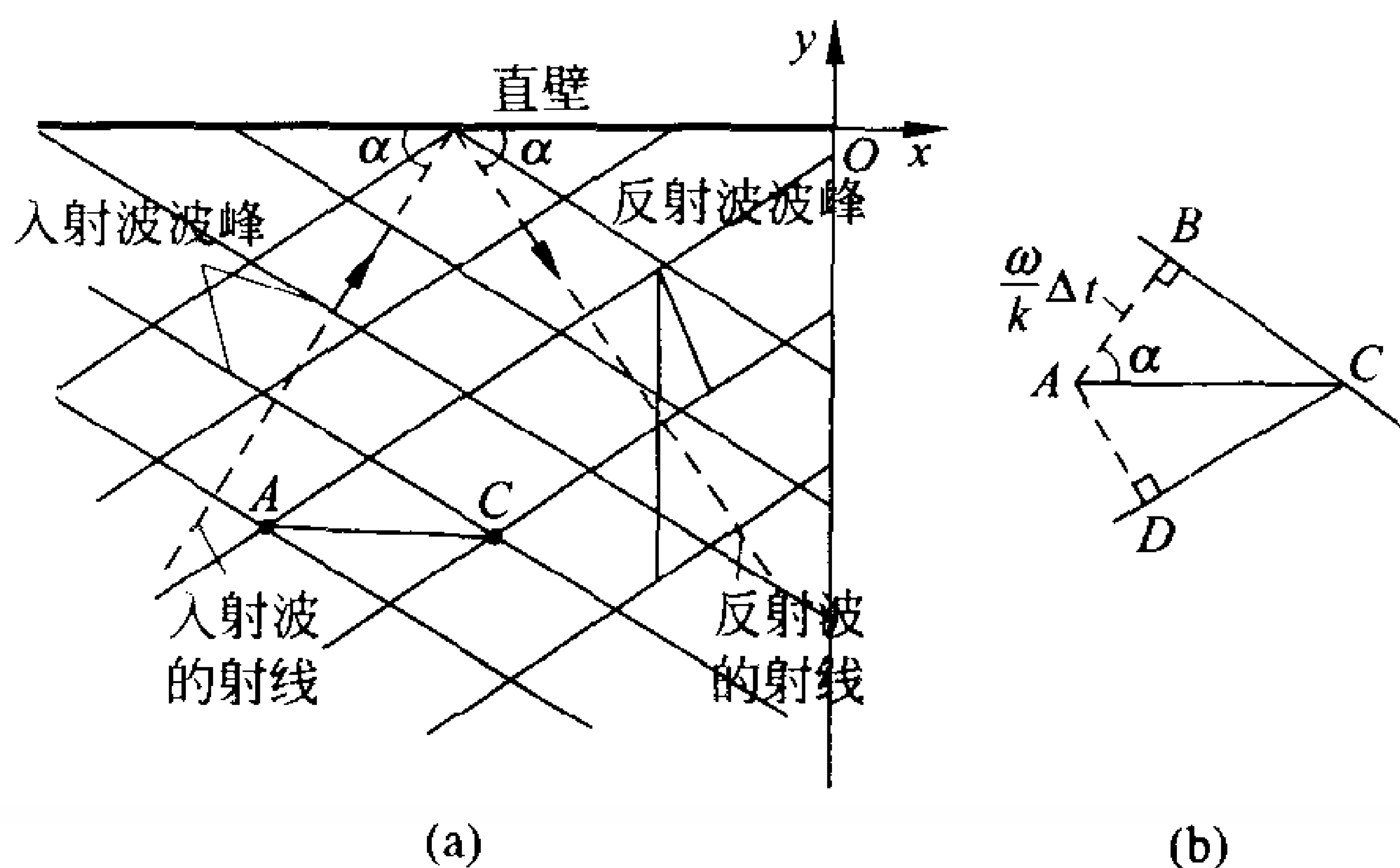


图 10-15　平面波的反射[10]

则反射波可表示为

$$\eta_r = A\sin(kx\cos\alpha - ky\sin\alpha - \omega t) \tag{10-120}$$

这里假设反射后波幅保持不变即反射系数 C_r 为 1.0。随着时间的增加反射波向正 x 和负 y 的方向传播。入射波和反射波的叠加可由三角公式导出，即

$$\begin{aligned}\eta &= A\sin(kx\cos\alpha + ky\sin\alpha - \omega t) \\ &\quad + A\sin(kx\cos\alpha - ky\sin\alpha - \omega t) \\ &= 2A\cos(ky\sin\alpha)\sin(kx\cos\alpha - \omega t)\end{aligned} \tag{10-121}$$

这是一个波幅在 y 方向被 $\cos(ky\sin\alpha)$ 调制了的沿 x 轴方向进行的波列，也就是说波的传播方向与直墙平行，波速可由式(10-121)看出 $c=\dfrac{\omega}{k\cos\alpha}$，波幅为 $2A\cos(ky\sin\alpha)$，决定于入射波波幅 A，波数 k，入射角 α 和 y 方向的位置。当 A,k,α 一定时，沿 y 轴波幅呈余弦曲线变化。由 $\cos(ky\sin\alpha)=0$ 可求出波幅为零的 y 位置为一组平行于 x 轴的直线，在这些平行线上波幅永为零，为节点线。由 $\cos(ky\sin\alpha)=\pm 1.0$ 给出了与直墙的平行线，包括直墙本身($y=0$)，是波幅最大或最小的连线，即波腹。为了与波峰无限长的平面波相区别，这种波称为短峰波(short-crested wave)。由图 10-15(b)绘出叠加波波峰 A 与 C 的连线，BC 为入射波波峰，DC 为反射波波峰。在时段 Δt 内，入射波前进的距离为 $AB=\dfrac{\omega}{k}\Delta t$ 而叠加后的波峰前进距离为 $AC=\dfrac{AB}{\cos\alpha}=\dfrac{\omega}{k}\dfrac{\Delta t}{\cos\alpha}$，可见其波速为$\dfrac{\omega}{k\cos\alpha}$与式(10-121)所示一致。

如果反射系数 C_r 不等于 1.0，则反射波的波幅将为 C_rA，与入射波不同，所得波的叠加更为复杂。

反射波与入射波叠加后的势函数在 y 方向求导可以证明直墙处($y=0$)由波浪引起的与直墙垂直的法向流速为零，满足直墙不透水的边界条件。

10.5.2 水波的折射

波浪接近岸边时,水深将逐渐变浅,使得波浪运动发生很多变化,特别是波浪的主要特征例如波高和波长将发生变化,这一过程称为波浪浅化(wave shoaling)。

仍考虑平面波,设平面波以 $\eta=\frac{H}{2}\cos\Omega$ 表示,H 为波高,Ω 为相位函数,是一标量函数,例如在 x 方向的进行波中 $\Omega=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t$。当 $\Omega=2n\pi$,n 为整数,是波峰线。上节中已定义平面波的波数 $\boldsymbol{k}$ 为一向量,是相位函数的梯度。即

$$\boldsymbol{k}=\nabla\Omega \tag{10-122}$$

波浪沿波浪射线(wave ray)的方向传播。波浪射线为水平线,沿此线上各点波数向量总是与它相切,因此波浪射线的定义与流线相似。由相位函数可定义波的频率为

$$\omega=-\frac{\partial\Omega}{\partial t} \tag{10-123}$$

把式(10-122)和式(10-123)代入下列恒等式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Omega)+\nabla\left(-\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)=0 \tag{10-124}$$

即可得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial t}+\nabla\omega=0 \tag{10-125}$$

方程式(10-125)称为波数守恒(conservation of crests)方程。此式表明波数向量的时间变化率必须由波的圆频率的空间变化所平衡。如果波浪场是恒定的,也就是说波数向量不随时间而变化,则 $\nabla\omega=0$,即波的频率在空间上也没有变化。即使水深发生变化,频率 ω 仍维持常数。因此,由色散关系式(10-47)可知:当水深变浅,波数 k 的数值将增加,从而使波长 λ 和波速 c 变小,所以越接近岸边波浪的传播越慢。

对式(10-122),取 $\boldsymbol{k}$ 的旋度,可知

$$\nabla\times\boldsymbol{k}=\nabla\times(\nabla\Omega)=0 \tag{10-126}$$

这一波数为无旋的条件表明曲线积分 $\int\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与路径无关。即

$$\int\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int\nabla\Omega\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int\mathrm{d}\Omega$$

因此无旋表明相位函数在空间上对于每个时间 t 是惟一确定的,即为空间上的单值函数。

在图 10-14 中波浪射线与 x 轴成 α 角,$\boldsymbol{k}=k\cos\alpha\boldsymbol{i}+k\sin\alpha\boldsymbol{j}$。$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴及 y 轴方向的单位向量。于是由无旋条件式(10-126)可得

$$\frac{\partial(k\sin\alpha)}{\partial x}-\frac{\partial(k\cos\alpha)}{\partial y}=0 \tag{10-127}$$

一般设 x 坐标为向岸方向(onshore direction),即与海岸线垂直的方向而 y 坐标为沿岸方向(longshore direction)。沿海岸线(y 方向)的波浪各种要素假设无变化,也就是说沿海岸地形等高线均为平行直线的海岸线,则此方程式简化为

$$\frac{\mathrm{d}(k\sin\alpha)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{10-128}$$

即

$$k\sin\alpha=\text{常数} \tag{10-129}$$

式(10-129)表明波数在沿海岸方向的投影为一常数。以 ω 除式(10-129),得

$$\frac{\sin\alpha}{c}=\text{常数} \tag{10-130}$$

将深水中波浪的各种要素作为研究趋近海岸波浪的一个参考值,(深水中各物理量均以下标 0 表示),则

$$\frac{\sin\alpha}{c}=\frac{\sin\alpha_0}{c_0} \tag{10-131}$$

也可写为

$$\frac{c}{c_0}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} \tag{10-132}$$

上式称为斯奈尔定律(snell law),最初是在几何光学中研究光的折射时得到的有关折射的一个基本定律,由此可见在水波运动中斯奈尔定律同样适用。此定律表明波浪传播方向的变化与波速变化的关系。当波浪接近岸边时水深变浅波速减小,因此根据斯奈尔定律当海岸带地形等高线为与海岸平行的直线时,波浪传播方向即波浪射线与 x 轴交角 α 将越来越小,最后使波浪射线与海岸线垂直,从而使波峰线与海岸线平行。波浪赖以传播的介质——水的深度的改变,改变了波的传播速度,并进而改变波的传播方向,这种现象就是水波的折射。图 10-16 表示在海底等高线两侧波浪传播中所发生的折射。图中①区为水深较深的区域,波浪经过海底等高线进入水深较浅的区域②。由深水向浅水前进的波,波速将减小,由斯奈尔定律$\frac{c_1}{c_2}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$可得 $\alpha_2<\alpha_1$,即 α 角也将减小。α 角表示波峰浅与等高线的夹角,也就是波向线与 x 轴的夹角。从而波浪传播方向有了改变。

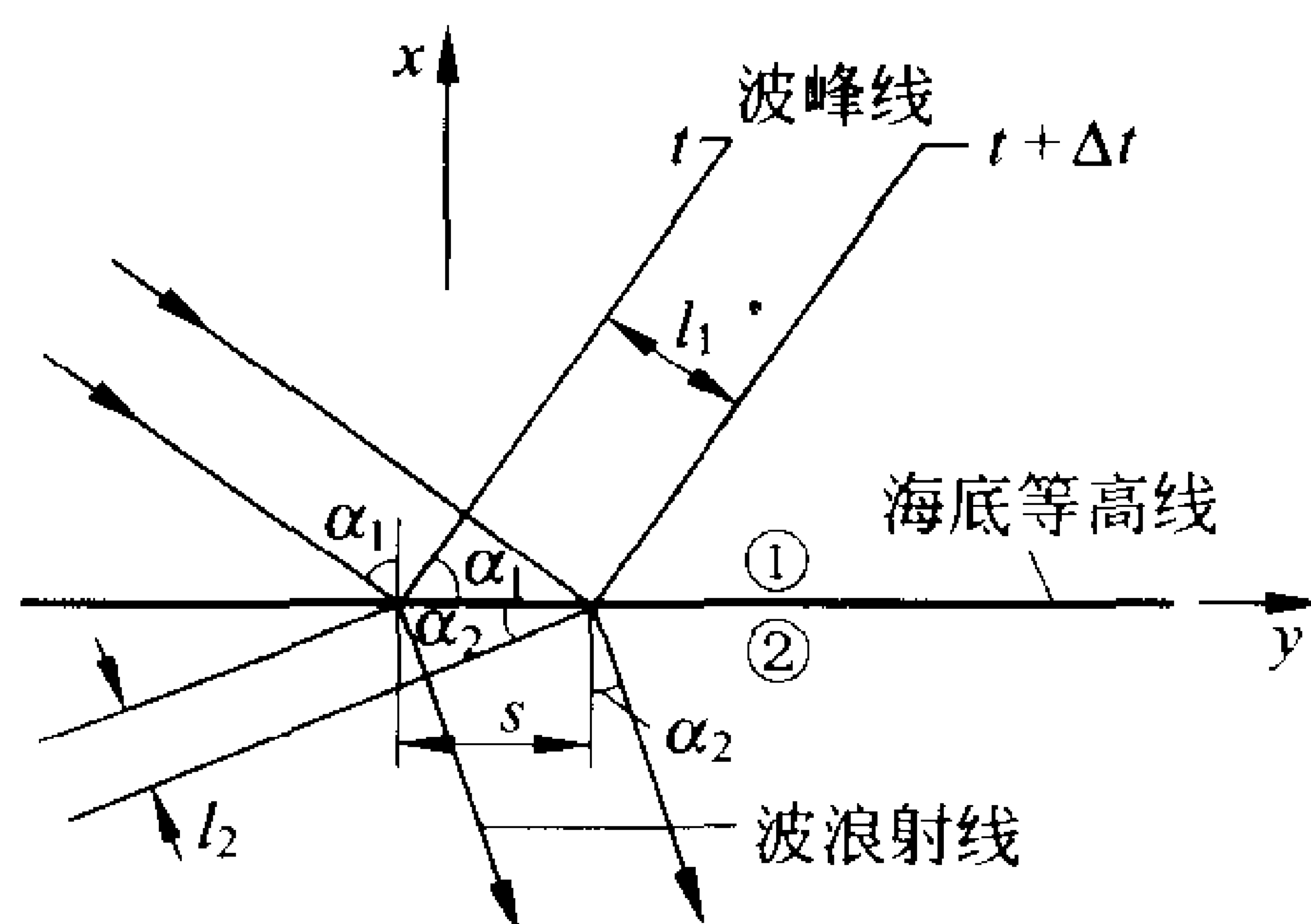


图 10-16　波浪的折射[10]

图 10-17 为一近岸波浪折射的例子,波浪在趋近岸边前在深水中其传播方向是波浪射线与 x 轴的夹角为 α_0。由于接近岸边,水深逐渐变浅,波浪方向逐渐改变。设海岸带坡度均匀,岸边线为

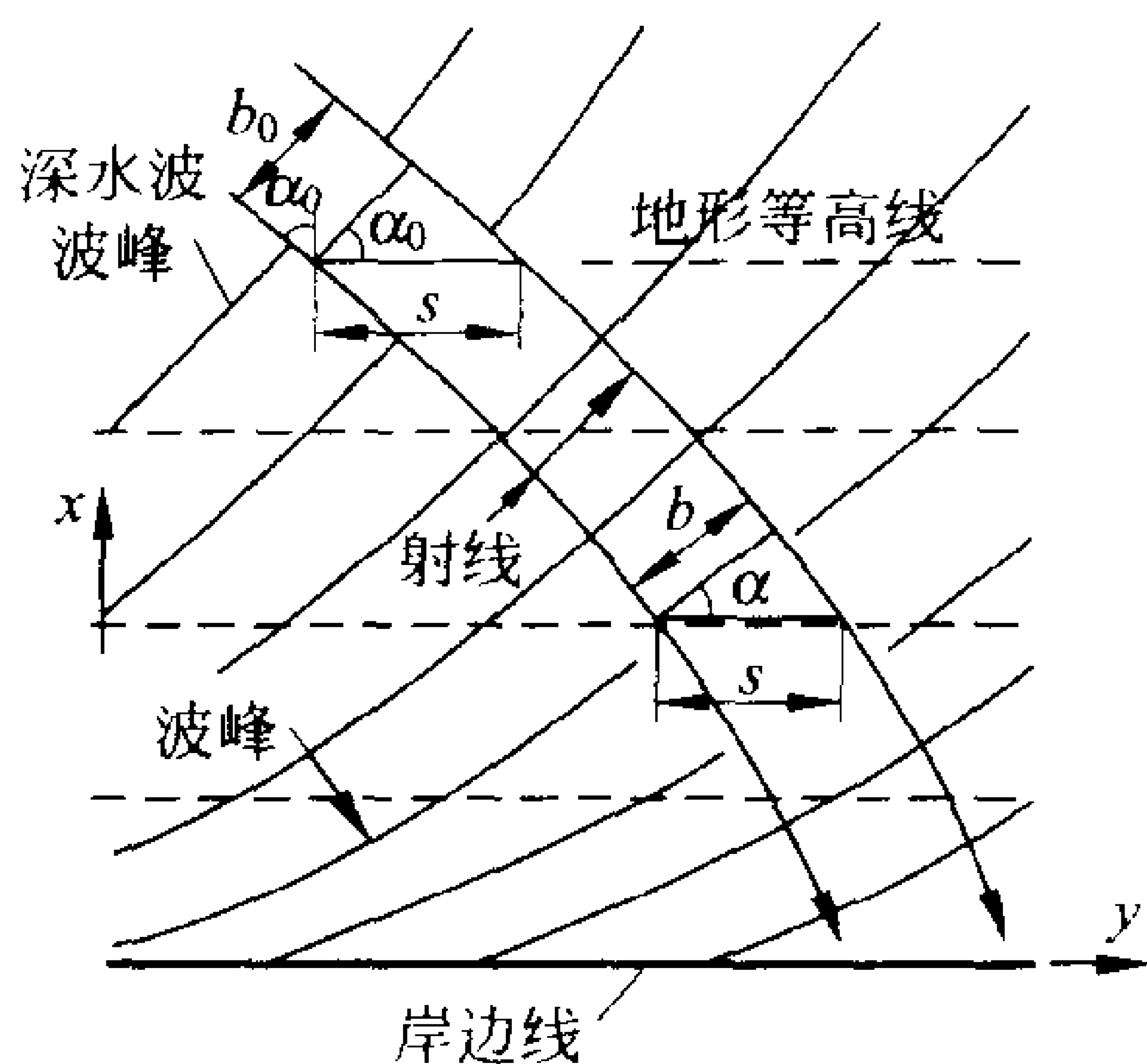


图 10-17　波浪浅化[10]

沿 y 轴的直线。

在深水中 thkh→1.0，由式(10-58)，式(10-59)得

$$c_0=\frac{gT}{2\pi},\quad \lambda_0=\frac{gT^2}{2\pi},\quad k_0=\frac{4\pi^2}{gT^2} \tag{10-133}$$

对于恒定波浪场，频率 ω 在空间上保持不变，因而

$$ck=c_0k_0=\omega=\text{常数} \tag{10-134}$$

色散关系式为

$$\omega^2=gk\,\text{th}kh=gk_0=\text{常数} \tag{10-135}$$

由式(10-134)，式(10-135)可得

$$\frac{c}{c_0}=\frac{k_0}{k}=\frac{\lambda}{\lambda_0}=\text{th}kh \tag{10-136}$$

与式(10-132)比较可得

$$\frac{c}{c_0}=\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}=\text{th}kh \tag{10-137}$$

由式(10-133)，式(10-135)可得

$$kh\,\text{th}kh=4\pi^2\frac{h}{gT^2} \tag{10-138}$$

图 10-17 中有两条波浪射线指向岸边，沿岸边 y 方向不同地点处的两条射线应该完全相同(当岸边为直线，地形等高线均与岸边平

行时，不同 y 值地点近岸区域的折射情况应该相同）。可以看作一条射线是另一射线在 y 方向平移了一个距离 s，于是图 10-17 中在 x 轴上不同地方两条射线在 y 方向的距离为常数 s，即

$$\frac{b}{\cos\alpha}=\frac{b_0}{\cos\alpha_0}=s=\text{常数} \tag{10-139}$$

$$\frac{b}{b_0}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} \tag{10-140}$$

将式(10-137)代入式(10-140)，得

$$\frac{b}{b_0}=\left(\frac{1-\sin^2\alpha_0\,\mathrm{th}^2kh}{\cos^2\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-141}$$

现在来考虑趋向岸边波浪波高的变化。假定能量不发生横向转移①，可以认为两条射线之间的能量保持不变。沿波峰线和沿波浪射线均取单位长度水体内的波浪能量为 $\frac{1}{2}\rho gA^2=\frac{1}{8}\rho gH^2$，则在两条射线间不同位置处的波浪能量通量为

$$\frac{1}{8}\rho gH^2c_gb=\frac{1}{8}\rho gH_0^2c_{g0}b_0=\text{常数} \tag{10-142}$$

式中：下标为 0 者均系指深水中的量。

$$\frac{H}{H_0}=\left(\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c_{g0}}{c_g}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-143}$$

在深水中已知 $c_{g0}=\frac{1}{2}c_0$，c_0 为深水中波速。而较浅的水中 $c_g=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{2kh}{\mathrm{sh}2kh}\right)$，因此有

$$\frac{c_{g0}}{c_g}=\frac{c_0}{c\left(1+\frac{2kh}{\mathrm{sh}2kh}\right)} \tag{10-144}$$

---

① Battjes J A. Refraction of water wave, J of Waterways and Harbour Div. ASCE, 1968 vol94, No. WW4: 437～452

将式(10-136)中$\frac{c_0}{c}=\frac{1}{\text{th}kh}$，代入式(10-144)得

$$\frac{c_{g_0}}{c_g}=\frac{2\text{ch}^2 kh}{2kh+\text{sh}2kh} \tag{10-145}$$

将式(10-141)及式(10-145)代入式(10-143)，可得$\frac{H}{H_0}$的关系为

$$\frac{H}{H_0}=\left(\frac{1-\sin^2\alpha_0\,\text{th}^2 kh}{\cos^2\alpha_0}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{2\text{ch}^2 kh}{2kh+\text{sh}2kh}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-146}$$

式(10-143)中：$\left(\frac{c_{g0}}{c_g}\right)^{\frac{1}{2}}$项表示因为水深变浅而引起的波高的变化，因此称$\left(\frac{c_{g0}}{c_g}\right)^{\frac{1}{2}}$为浅化系数(shoaling coefficient)，以 K_s 表示；$\left(\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$为折射过程对波高的影响，称之为折射系数(refraction coefficient)，用 K'_r 表示。于是式(10-143)也可表示为

$$\frac{H}{H_0}=K'_r K_s \tag{10-147}$$

由式(10-135)有

$$kh\,\text{th}kh=k_0 h \tag{10-148}$$

和式(10-133)$k_0=\frac{4\pi^2}{gT^2}$。在浅水波的条件下式(10-146)又可写为

$$\frac{H}{H_0}=\left[\frac{1-4\pi^2\frac{h}{gT^2}\sin^2\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}\right]^{-\frac{1}{4}}\left(16\pi^2\frac{h}{gT^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \tag{10-149}$$

由式(10-149)计算得到$\frac{H}{H_0}$与$\frac{h}{gT^2}$和$\frac{h}{\lambda_0}$的关系如图 10-18 所示。

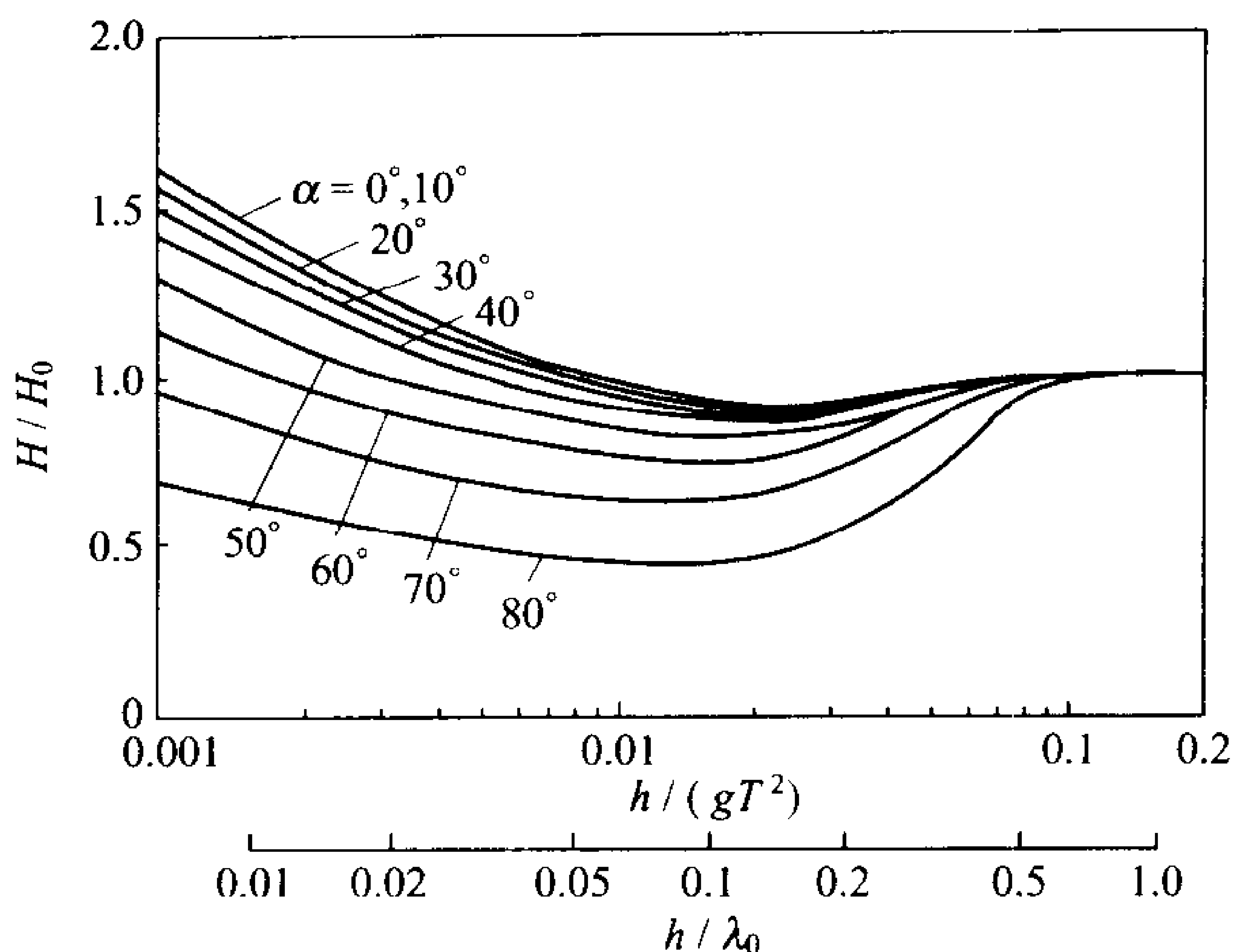


图 10-18 $\frac{H}{H_0}$和$\frac{h}{gT^2}$或$\frac{h}{\lambda_0}$关系[10]

10.5.3 水波的绕射

在波列传播中遇到垂直障碍物时，波浪可以从端部绕过障碍物传播到障碍物背后的几何阴影区(geometric shadow)，这个现象称为波的绕射。这一现象在研究防波堤、小的岛屿和大型离岸建筑物背后的波浪运动时有重要意义。

设一防波堤为半无限长垂直刚性不透水薄墙，自 $x=0$ 处向正 x 方向延伸至无穷。一个波列自 $y<0$ 处向正 y 方向传播，由于绕射现象，在防波堤背后 $y>0$，$x\geqslant 0$ 的区域也有波浪存在。如图 10-19 所示。

求解波浪绕射问题，仍考虑水为不可压缩理想流体的无涡流动，流速势函数 ϕ 必须满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{10-36}$$

且假定为微幅进行波，即波高足够小，从而非线性项可忽略。水域

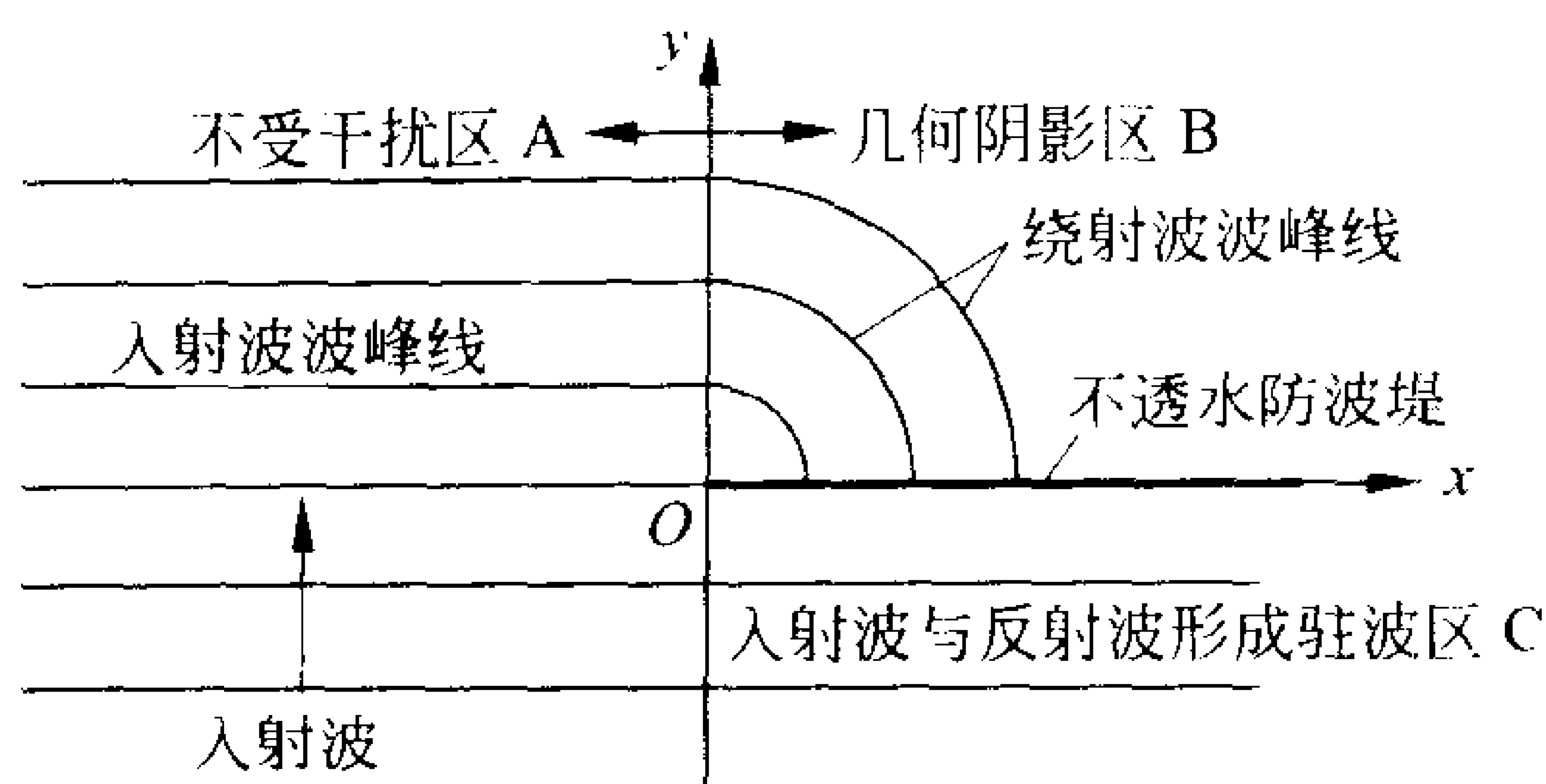


图 10-19　水波绕射[3]

中水深 h 不变为常数。控制方程式(10-36)所需满足的边界条件为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial \phi}{\partial z}=0 \qquad 当\ z=0 \qquad (10\text{-}40)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}=0 \qquad 当\ z=-h \qquad (10\text{-}39)$$

此外直墙上垂向分速必等于零，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \qquad 当\ x\geqslant 0 \quad y=0 \qquad (10\text{-}150)$$

对于波浪绕射问题还有一个特殊的边界条件，即辐射条件(radiation condition)。这一条件最初由佐默费尔德(Sommerfeld A.，1949)①提出，后来由斯托克(Stoker J. J.，1957)②应用于水波问题中。

辐射条件就是为了使方程式(10-36)的解是惟一的，要求势函数在无穷远处应满足的条件。这里设入射波流速势函数为 ϕ_0，

① Sommerfeld A. Partial Differential Equations in physics. New York: Academic Press，1949

② Stoker J J. Water waves Interscience. New York，1957

则在图 10-19 中左侧 $x \to -\infty$ 处由于波动不受直墙的影响，$\phi = \phi_0$。图 10-19 右侧下半平面的无穷远处($x \to +\infty, y<0$)因反射波和入射波叠加而形成如 10.4.1 节所讨论的驻波。第一象限无穷远处($x \to +\infty, y>0$)的波动完全是由绕射而引起的，而且越靠右方波动越趋微弱，当 $x \to +\infty$ 时可设 $\phi = 0$。

拉普拉斯方程(10-36)的解可设为以下形式：

$$\phi(x,y,z) = Z(z)F(x,y)e^{i\omega t} \tag{10-151}$$

式中：

$$Z(z) = \mathrm{ch}k(h+z) \tag{10-152}$$

式(10-151)表示一个符合底面边界条件式(10-39)的速度势函数依赖于铅垂坐标 z 的关系。而 $F(x,y)$ 是坐标 x，y 的一个复变函数。将式(10-151)代入拉普拉斯方程(10-36)得到有关 $F(x,y)$ 的亥姆霍兹方程(Helmholtz equation)，该方程为

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F(x,y) = 0 \tag{10-153}$$

由 $\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{z=0}$ 可得

$$\eta = -\mathrm{i}\,\frac{\omega}{g}F(x,y)\mathrm{ch}kh e^{i\omega t} \tag{10-154}$$

根据平面上的边界条件可确定函数 $F(x,y)$。首先，在直墙不透水防坡堤面由式(10-150)得

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \text{当 } 0<x<+\infty \quad y=0 \tag{10-155}$$

对于 $x<0$ 的区域，应该只有在正 y 方向的入射波，所以

$$F(x,y) = Ae^{-iky} \qquad \text{当 } x \to -\infty \tag{10-156}$$

佐默费尔德①得到 $F(x,y)$ 的解为

$$F(x,y)=\frac{1+\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{-iky}\int_{-\infty}^{\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}u^2}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{iky}\int_{-\infty}^{\beta'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}u^2}\mathrm{d}u\right)$$

(10-157)

其中 β,β' 及 r 定义为

$$\beta^2\equiv\frac{4}{\lambda}(r-y),\quad \beta'^2\equiv\frac{4}{\lambda}(r+y),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad(10\text{-}158)$$

β 与 β' 的符号在各不同象限区域按图 10-20 规定选用。

图 10-21 表示了入射波为正 y 方向时在防波堤附近形成的绕射现象。图中绘出了波峰线和绕射系数的等值线。绕射系数(coefficient of diffraction) K_d 定义为一点处的最大波高与入射波波高之比。由图10-21看出防波堤的几何阴影区($x\geqslant0$, $y>0$)所有波高均小于入射波波高的一半，$x=0$ 的线为 K_d 等于 0.5 的线，这些都是由绕射现象造成的。在防波堤端部有一较窄的带状区其波高比入射波波高略大，K_d 可达 1.1。波峰线反映了相位函数的变化，在堤端以外相位差很小，波峰线维持平行，保持入射波的状况。在防波堤背面，相位差随 x 的增大而加大，波峰线基本上都是以防波堤端部为中心的圆弧。

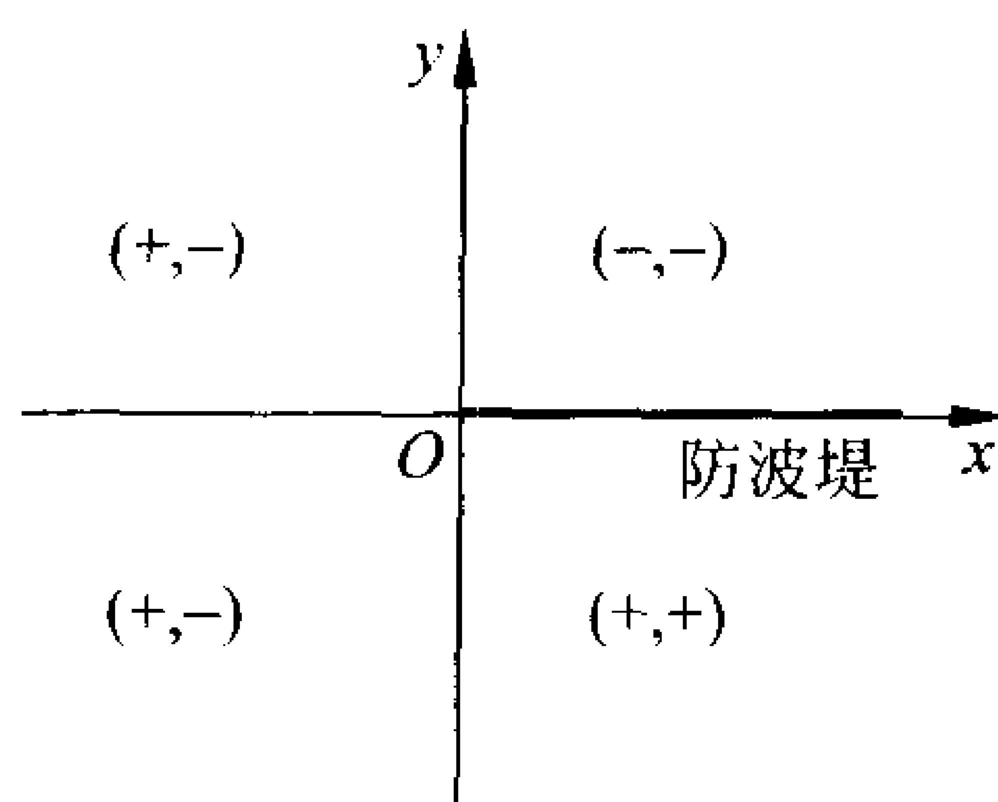


图 10-20 (β,β')符号规定[7]

如果入射波与防波堤成一角度，为斜向入射波，如图 10-22 所示。设入射波与防波堤成 θ_0 角，则可由图看到 A,B,C 三个区域：区域 A 为基本上不受防波堤影响的区域($\theta_0<\theta<2\pi-\theta_0$)；区域 B 为防波堤的保护区，即几何阴影区($0<\theta<\theta_0$)；区域 C 则为入射波和防波堤反射波形成为 10.5.1 节所述的波浪运动的区域。

① Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction Math. Ann. , 1896 vol 47: 317～374

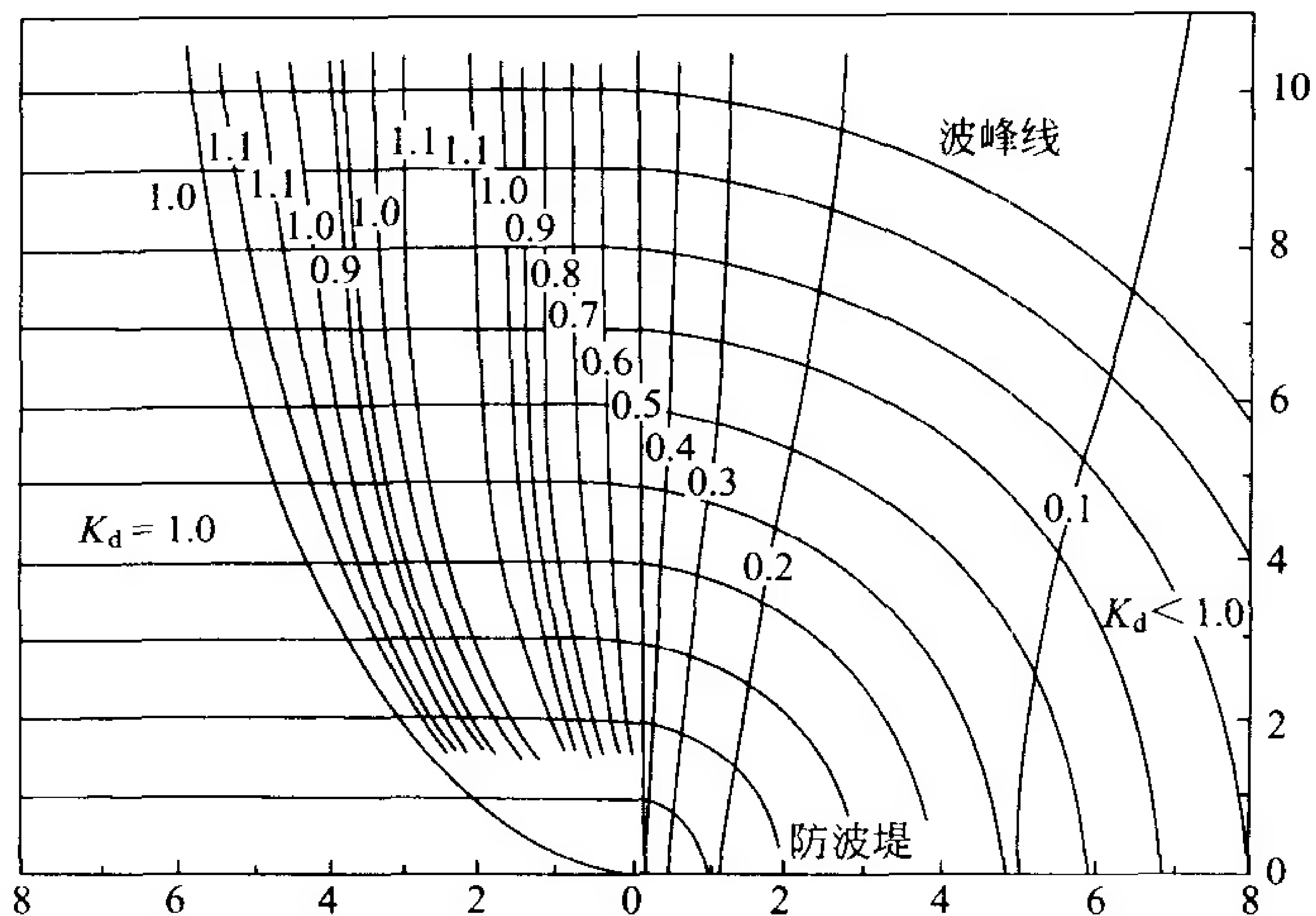


图 10-21　防波堤附近的绕射系数等值线图①

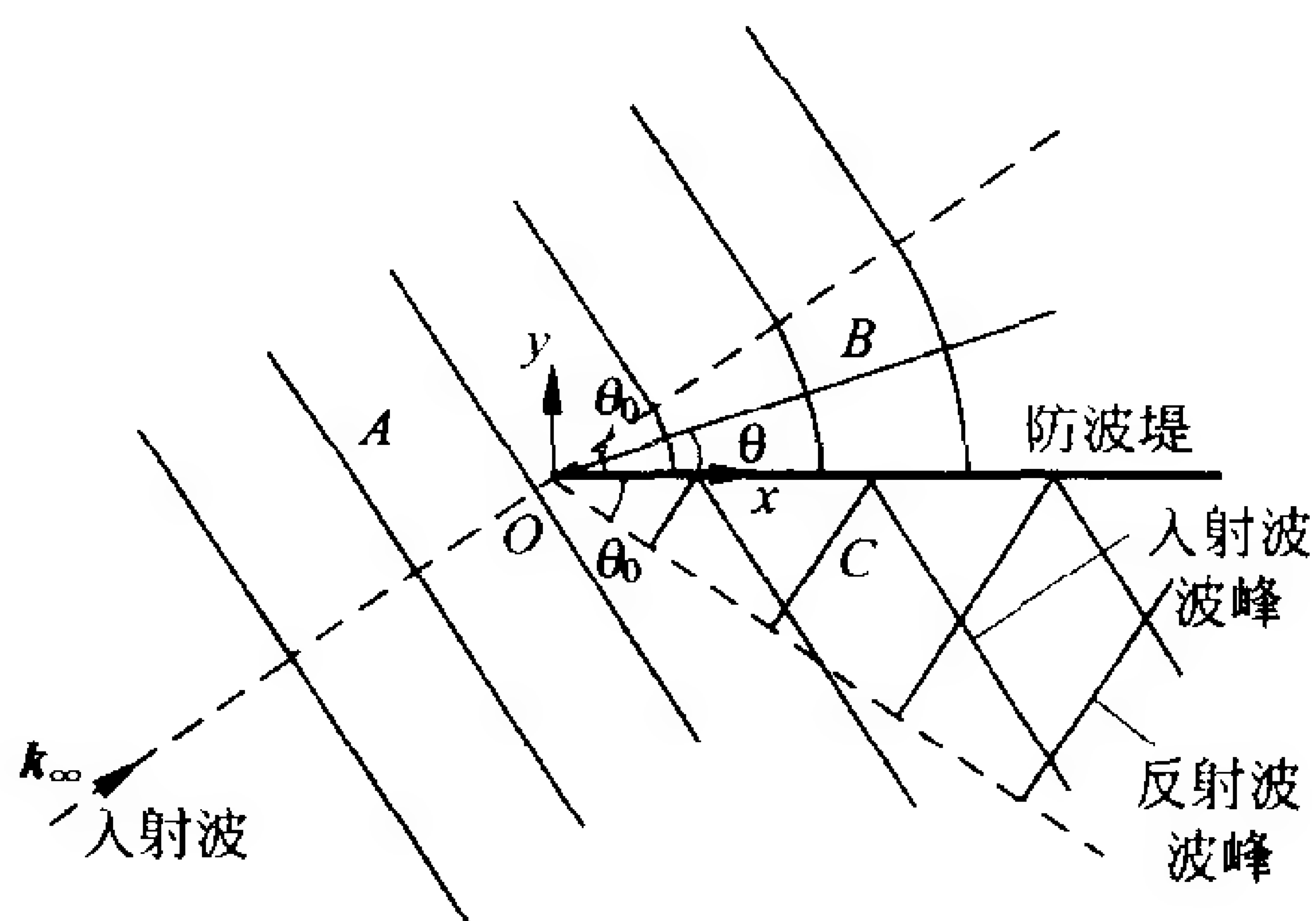


图 10-22　斜向入射波的绕射

① Penney W G and Price A T. The Diffraction Theory and Sea Waves and the Shelter Afforded by Breakwaters. Phil. Traus Royal Society, Ses. A 244, 1952, No. 882: 236～253

图 10-23 为一入射波方向与防波堤呈 30°角度时绕射波的情形，在几何阴影区，绕射系数 $K_d<0.5$。

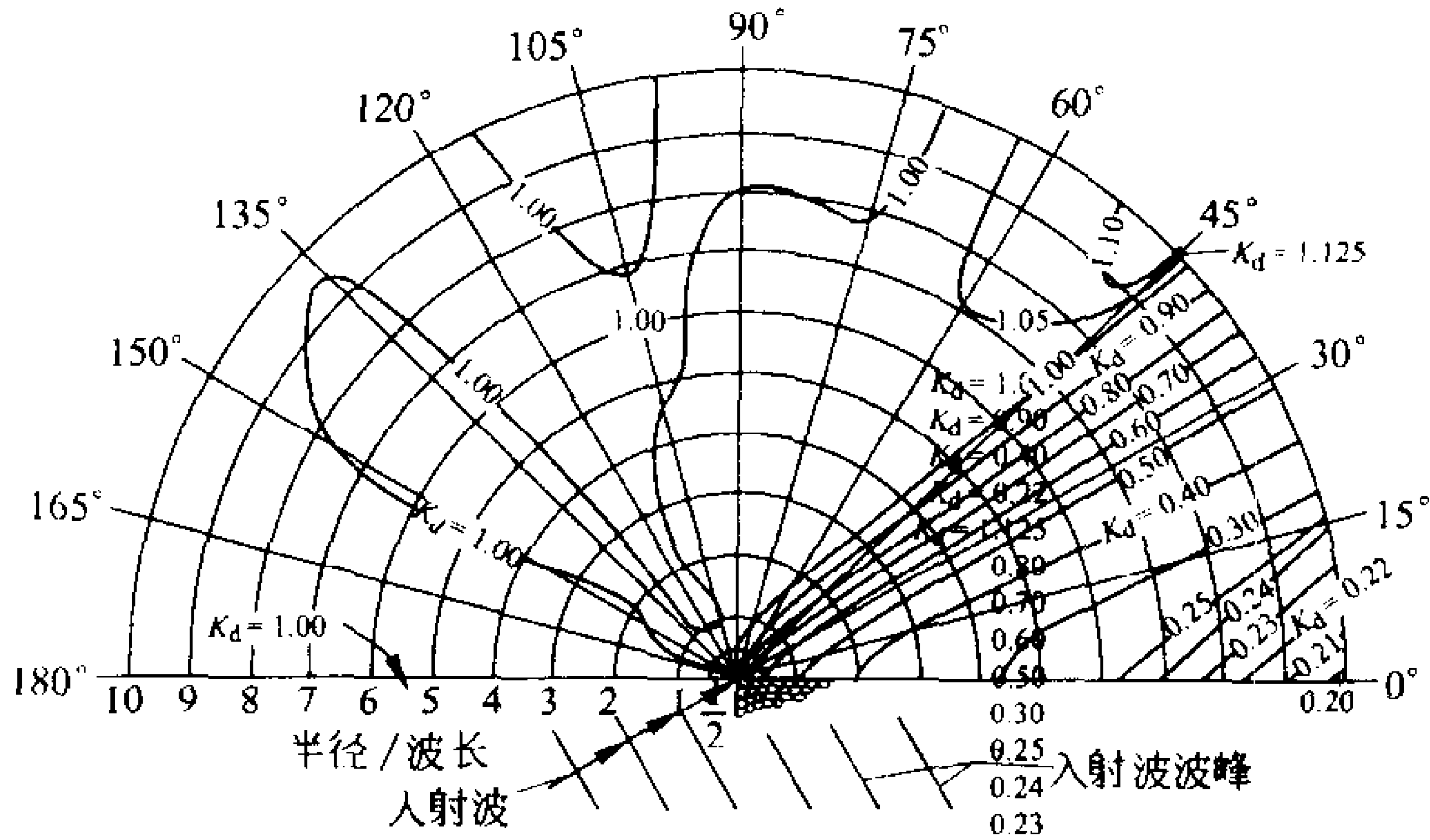


图 10-23　30°斜向入射波绕射中绕射系数 K_d 等值线图①

10.6 恒定流动中的波

此前所讨论的波浪都是一种非恒定现象，由波浪引起水流质点的运动随时间而变化。本节中讨论一种恒定的情形，流动中各点的流动都是恒定的，尽管水面呈现出正弦变化的波浪型态，但是它并不随时间改变，例如波峰所处的空间位置是固定不变的，从而形成恒定的波纹(wave pattern)。这种情况的一个简单的例子是在一恒定流动中一个二维的位置固定的障碍物所引起流动的变化，如图 10-24 所示。障碍物可以是一个台阶，或者是二维圆柱体或任何形状二维物体置于底面或水中以至水面。如果是物体在静水中或水面上以匀速 v 运动会发生同样的情形。

① Wiegel R L. Diffraction of waves by a semi-infinite breakwater. J. Hydraulves Div. ASCE, 1962 vol. 88, No. HY1: 27～44

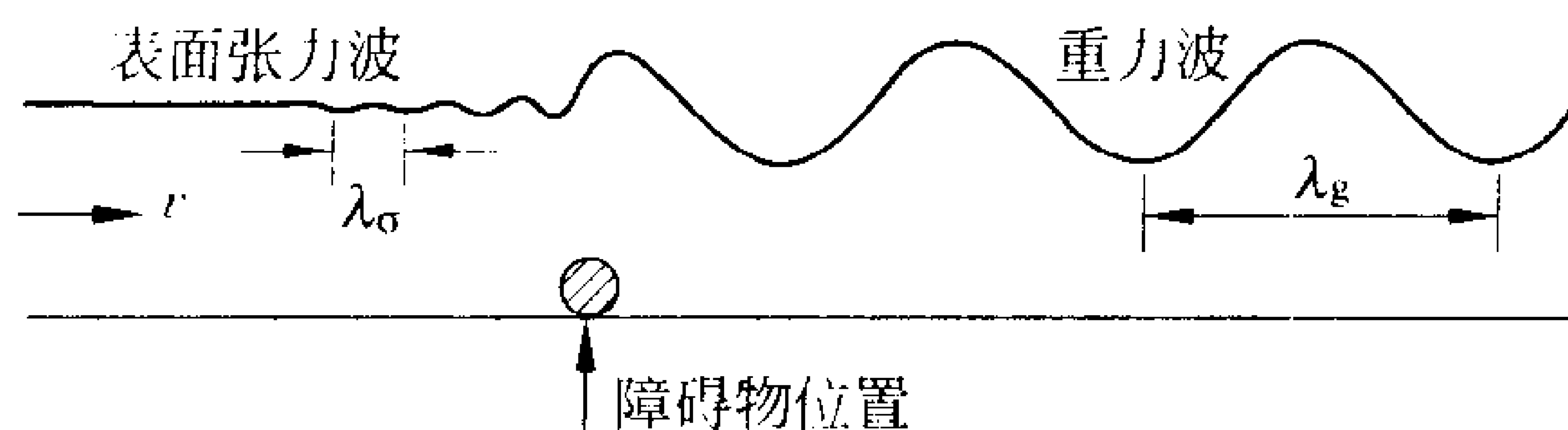


图 10-24 恒定水流中障碍物产生的水面波[5]

由障碍物导致的水面波，其波形将以波速 c 向上游传播，即

$$c=v \tag{10-159}$$

这时波浪形状的传播速度与来流流速大小相等方向相反，水面的波形变化将在原地形成恒定的波纹而不再传播。

对于此类问题，其控制方程式和边界条件仍如 10.2 节所述。如果考虑微幅波，并涉及表面张力则控制方程为

$$\nabla^2\phi=0 \quad 当 -\infty<x<\infty \quad -h<z<0 \tag{10-36}$$

而自由表面边界条件为

$$运动学条件 \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad 当\ z=0 \tag{10-37}$$

$$动力学条件 \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\sigma K}{\rho}+g\eta=0 \quad 当\ z=0 \tag{10-160}$$

式中：K 为水面曲率。对式(10-18)$K=-\dfrac{\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$线性化后，其曲率应为 $K=-\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$。式(10-160)改写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+g\eta=0 \quad 当\ z=0 \tag{10-161}$$

对于 $\eta=A\cos(kx-\omega t)$的进行波，则$\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=-Ak^2\cos(kx-\omega t)=-k^2\eta$，因此式(10-161)可以写为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\left(\frac{\sigma k^2}{\rho}+g\right)\eta=0 \quad 当\ z=0 \tag{10-162}$$

由这样的自由表面条件而导出的色散关系式为

$$\omega^2=\left(g+\frac{\sigma k^2}{\rho}\right)k\,\mathrm{th}kh \tag{10-163}$$

对于深水情况，则 thkh→1.0，于是

$$\omega^2=\left(g+\frac{\sigma k^2}{\rho}\right)k \tag{10-164}$$

由于波速 $c=\frac{\omega}{k}$，可知考虑表面张力后有

$$c=\left[\frac{\left(g+\frac{\sigma k^2}{\rho}\right)}{k}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10-165}$$

在一个问题中由 g 所代表的重力作用和由 $\frac{\sigma k^2}{\rho}$ 所代表的表面张力作用所占比重可能不同。如果 $\frac{\sigma k^2}{\rho}\ll g$，则可以忽略表面张力作用，波动为重力波(gravity wave)；反之，如果 $\frac{\sigma k^2}{\rho}\gg g$，则表面张力将起主要作用，是表面张力波(capillary wave)。因此可以将 $\frac{\sigma k^2}{\rho}\simeq g$ 作为一个限界，从而可得到限界情况下的波数 k_m，即

$$k_m=\left(\frac{\rho g}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-166}$$

于是当 $k\ll k_m$ 则波动将是纯粹的重力波。由 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 的定义得到限界的波长 λ_m，即

$$\lambda_m=\frac{2\pi}{k_m}=2\pi\left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-167}$$

当波动的波长 $\lambda\ll\lambda_m$ 则为表面张力波。对于水而言，表面张力系数 $\sigma=0.074$N/m(N 为牛顿)，$\rho=1000$kg/m^3，可以算出

$$k_m = 360\text{m}^{-1}, \quad \lambda_m = 0.017\text{m} \tag{10-168}$$

同样可以算出一个限界的波速 c_m。由于 $\frac{\sigma k_m{}^2}{\rho} = g$，代入式(10-165)，得

$$c_m = \left(\frac{2g}{k_m}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.23\text{m/s} \tag{10-169}$$

图 10-25 中绘出了深水中波速 c 与波长 λ 的关系。图中分别表示表面张力波中 $c = \left(\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ 和重力波中 $c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$。两种波的界限在 $\lambda = \lambda_m$ 点，相应于 λ_m 的波速为最小波速 c_m。由图还可以看出当 $\lambda < \frac{1}{4}\lambda_m$，重力影响可以忽略，在水中这一数值为 $\lambda < 4\text{mm}$。

下面对图 10-24 中的流动再进一步分析。深水中波速随波长而改变，必须有一种波长的波，其波速与来流流速相等，满足式(10-159)的要求才能形成恒定的波纹。由图 10-25 可看出：当 $v < c_m$ 时不会有波出现，这时障碍物所形成的扰动很快将消失掉；如果 $v = c > c_m$，则会出现两种波，其波长分别为 λ_σ 和 λ_g，它们分别代表表面张力波和重力波。深水波为色散波，波能量的传播速度为群速度 c_g，与波速 c 不相等。由式(10-112)已知

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kh}{\text{sh}2kh}\right) \tag{10-112}$$

深水时 $kh \gg 1$，因此 $\frac{2kh}{\text{sh}2kh} \to 0$，得

$$c_g = \frac{1}{2}c \tag{10-170}$$

即重力波群速度为波速的一半。表面张力波中由于式(10-164)有 $\omega^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho}$ 和式(10-165)有 $c = \left(\frac{\sigma k}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$，所以

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma k}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}c \tag{10-171}$$

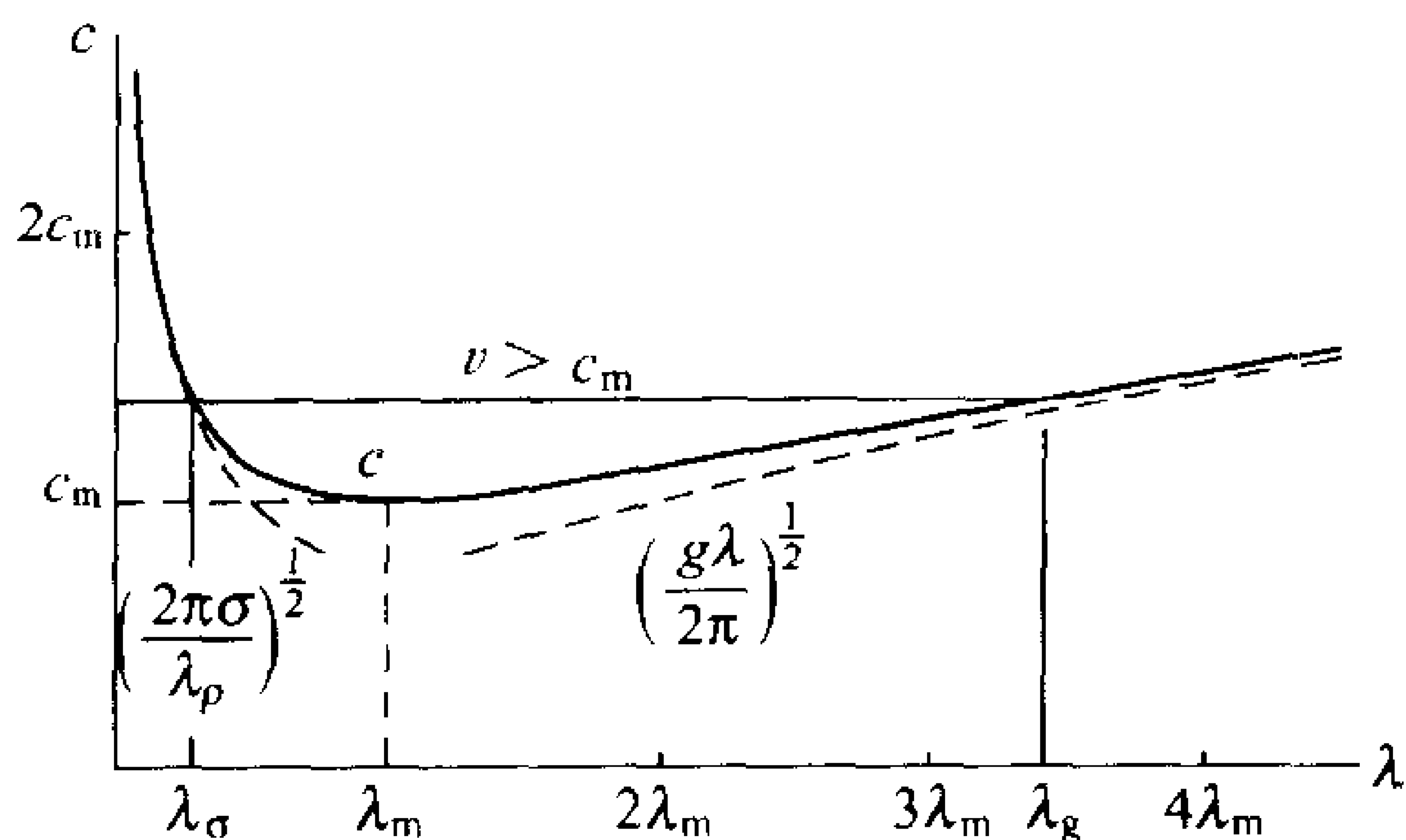


图 10-25　深水中波速与波长关系

群速度为波速的 1.5 倍。

对于恒定水流中由障碍物所产生的波（或者是物体在静水中作匀速运动所产生的波），当 $v>c_m$ 时，是由表面张力波和重力波两种性质不同的波所组成。重力波由于其波能的传播速度只有水流流速 v 的一半，因此波的能量均被水流带到障碍物的下游；反之表面张力波则由于其波能传播速度为水流速度 v 的 1.5 倍，因此向上游传播。在障碍物的上下游形成两种不同性质的波：重力波中波能衰减很慢，因此它可以传播到下游相当远处；而波长较短的表面张力波则由于衰减很快，在上游不远处就因波能消失而不复存在，如图 10-24 所示。实用上，只有障碍物下游的重力波是重要的，因为当水流流速 $v \gg 0.23\text{m/s}$ 时，由图 10-25 可见相应的表面张力波波长 λ_σ 将越来越小。一个有相当尺寸的障碍物是难以产出这样小波长波浪的。只有当障碍物很小或水流流速很低的情况才有可能。一般说来障碍物的纵向尺寸与所产生波浪的波长是相应的。

10.7 船行波与兴波阻力

10.7.1 船行波

上节中研究了由二维物体在恒定水流中产生的恒定波纹现象，本节则研究更一般的情形。假如在水中运动的物体为一有限宽度的三维物体，例如广阔水域中航行的船舶。由船舶运动所产生的波浪即船行波（ship waves），一般多出现在船后一个楔形的水域中。在这一水域中产生的波可以有各个方向和不同的波速。对于某一波速为 c 的波必然可以找到一个相应的波浪传播角或简称波角 θ 使 $c=v\cos\theta$，从而在沿 θ 射线方向出现相对于船舶运动的恒定波纹，v 为船舶航行速度。

利用式(10-114)表示所有可能出现的波，该式为

$$\eta(x,y,t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\infty}^{\infty}A(k,\theta)\exp[-\mathrm{i}k(x\cos\theta+y\sin\theta)+\mathrm{i}\omega t]\mathrm{d}k \tag{10-114}$$

当选择随船运动的动坐标系，船后楔形水域的波纹区对于动坐标系将是一个恒定的波纹区，这时应以 $(x+vt)$ 代替上式中的 x，式(10-114)改写为

$$\eta(x,y,t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\infty}^{\infty}A(k,\theta)\exp[-\mathrm{i}k(x\cos\theta+y\sin\theta)+\mathrm{i}(\omega-kv\cos\theta)t]\mathrm{d}k \tag{10-172}$$

如果对于随船运动的动坐标系而言，运动是恒定的，则式(10-172)必然与时间 t 无关，即

$$\omega-kv\cos\theta=0 \tag{10-173}$$

考虑到波速 $c=\dfrac{\omega}{k}$，式(10-173)表示为

$$c=v\cos\theta \tag{10-174}$$

这时形成的波纹是与图 10-26 中 x' 轴垂直的系列波峰线所构成

的。注意此处船是向左方向行驶，对固定坐标系而言船速 v 为负值。对于动坐标系而言，水流流速为 v。对于深水情况，$\omega^2 = gk$，由式(10-173)可得

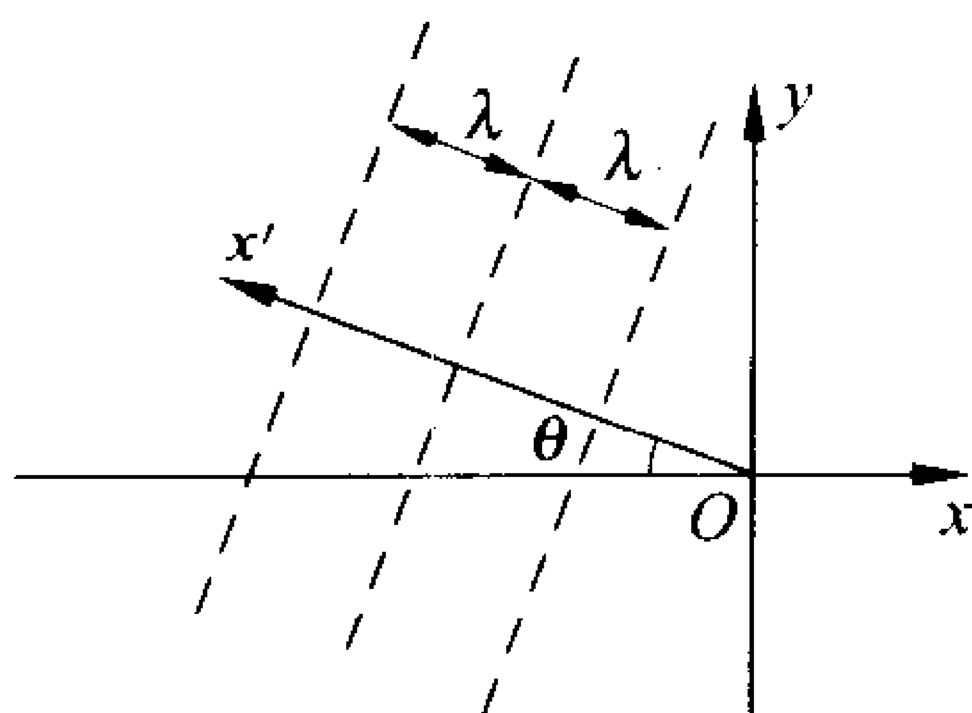


图 10-26 船行波纹

$$k(\theta)=\frac{g}{v^2\cos^2\theta} \quad (10\text{-}175)$$

由式(10-175)可见 k 为 θ 的函数，因而式(10-172)可以改写为

$$\eta(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)\exp[-\mathrm{i}k(\theta)(x\cos\theta + y\sin\theta)]\mathrm{d}\theta \quad (10\text{-}176)$$

由于 $\cos\theta > 0$，所以积分限为 $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$。式(10-176)代表一给定船体的自由波分布函数(free-wave distribution function)，它表示了由在各个 θ 方向的波所构成的水面波动的总和。对于距离船很远的下游区域，式(10-176)可简化，并得到开尔文(kelvin)于 1887 年导出的经典的船行波波纹(ship-wave pattern)。令船舶运动方向 $\theta=0°$ 的波数为 $k_0=\frac{g}{v^2}$，则 $k(\theta)=k_0\sec^2\theta$，于是式(10-176)变为

$$\eta(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)\exp[-\mathrm{i}k_0\sec^2\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)]\mathrm{d}\theta \quad (10\text{-}177)$$

式中：$A(\theta)$ 为一复变函数，称为波幅函数。$A(\theta)$ 可以写为

$$A(\theta)=g(\theta)+\mathrm{i}f(\theta) \quad (10\text{-}178)$$

则式(10-177)当只取实部时即写为

$$\eta(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big\{ g(\theta)\cos[k_0\sec^2\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)] + f(\theta)\sin[k_0\sec^2\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)] \Big\}\mathrm{d}\theta \quad (10\text{-}179)$$

式(10-179)是最一般的形式，它表示了所有可能的不同传播方向、不同波幅和不同初相位角的平面自由波的组合。不同船舶或同一船舶的不同速度情况下，自由波之间的差别仅在于波幅函数之不同。为了研究船行波波纹图形，将式(10-177)的直角坐标变换为极坐标，令

$$-x=R\cos\alpha,\qquad y=R\sin\alpha \tag{10-180}$$

则式(10-177)改写为

$$\eta(R,\alpha)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A(\theta)\exp[\mathrm{i}k_0R\sec^2\theta\cos(\theta+\alpha)]\mathrm{d}\theta \tag{10-181}$$

对这一积分式，当 $R\to\infty$ 时被积函数将是高频函数，只有当被积函数中 $\sec^2\theta\cos(\theta+\alpha)$ 为常数或被积函数对 θ 之导数为零时，积分结果才不为零，详见 10.7.2 节中将要讨论的稳定相原理。也就是说出现显著波形(significant wave)之条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sec^2\theta\cos(\theta+\alpha)]=0 \tag{10-182}$$

或

$$\sec^2\theta\cos(\theta+\alpha)[2\tan\theta-\tan(\theta+\alpha)]=0 \tag{10-183}$$

解得

$$\tan\theta=\frac{1}{4}\left[\cot\alpha\pm\sqrt{\cot^2\alpha-8}\right] \tag{10-184}$$

此式有实根的条件为 $\cot^2\alpha\geqslant 8$，即 $\cot\alpha\geqslant|2\sqrt{2}|$，得到 α 的范围为

$$-19°28'\leqslant\alpha\leqslant+19°28' \tag{10-185}$$

也就是说只有在式(10-185)规定的范围内才有波形出现，如在图 10-27 中表示为由 $\pm19°28'$ 所限定的开尔文楔形域(Kelvin wedge)。在楔形域内由行船而生成的波浪有横波(transverse wave)和散波(diverging wave)，图中的实线表示波峰线。式(10-184)可绘如图 10-28，由图看出当 $\alpha=\pm19°28'$，$\theta=\pm35°16'$，说明在楔形域的两

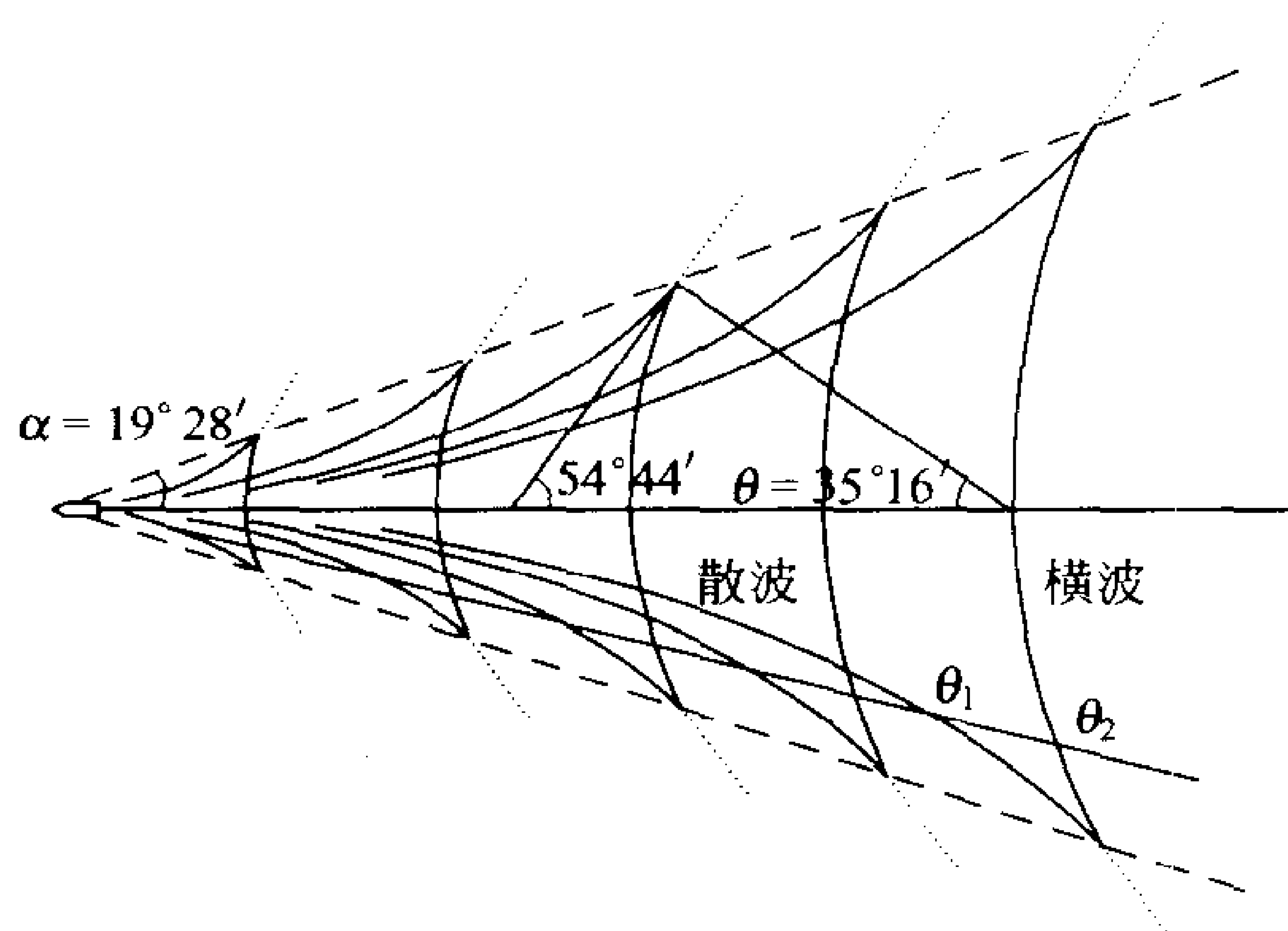


图 10-27 开尔文船行波波纹图形

（虚线表示开尔文楔形域边界）

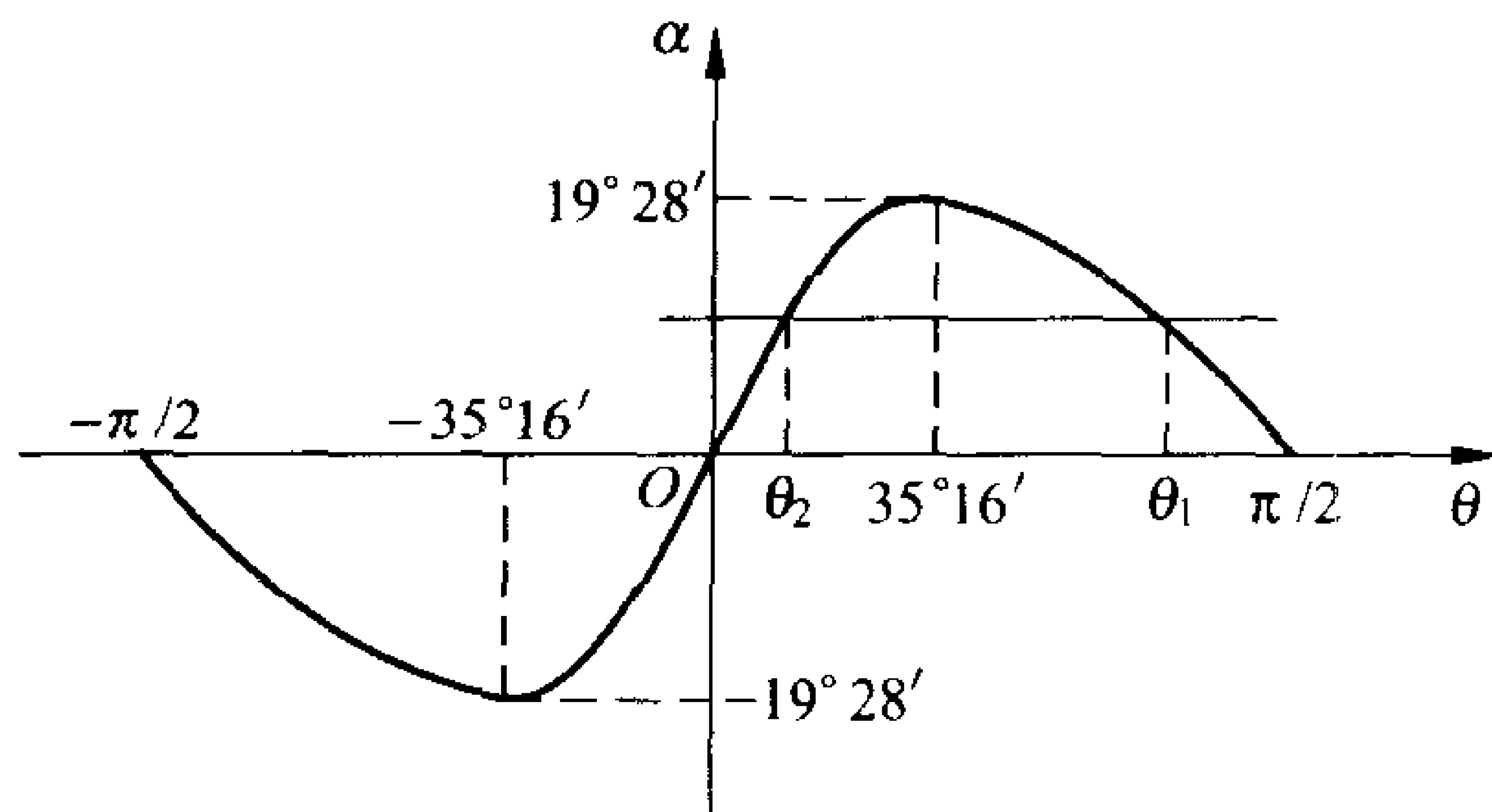


图 10-28 α～θ 关系[1]

条边界上船行波的传播方向，其波角 θ 为35°16′。此两边界线也是横波与散波的交点。如果 $|\alpha|<19°28'$，从图 10-28 可看出，这时将有两个 θ 值，θ_1 与 θ_2，其中 θ_1 为散波的传播方向而 θ_2 为横波的传播方向。所有的波峰线在楔形边界上均有一歧点(cusp)，由歧点向楔外引申的点划线表示波幅并非在边界外立刻消失，而是呈指数衰减。在楔形域内对应于较大波角 θ_1 的散波波长较短而对应于较小波角的横波波长较长。

图 9-6 中曾用微波在浅水中传播来解释明槽水流的各种流态，现在来讨论深水的情况。深水与浅水中的波浪有一个重要的区别在于深水中的波是色散波，$\omega^2=gk$，因此其波群速度 $c_g=\frac{d\omega}{dk}\neq c$。反之，浅水波中不存在色散问题，$\omega=kc$，波群速度 $c_g=\frac{d\omega}{dk}=c$，波能量传播速度与波速相同。深水重力波中的波速为

$$c_0=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

$$c_{g0}=\frac{1}{2}c_0$$

由此可见波长越大的波其传播速度越快，从而在传播过程中不同波长的波逐渐离散。设想向静止的深水中投一石块，水面受到扰动而生成水波。在石块进入水中很短的时间 $t=t_1$ 时水面出现不规则的同心圆波形，如图 10-29(a)，稍长一些时间 $t=t_2$ 时则波形变得较为规则，如图 10-29(b)，波长较长的波由于它们传播速度快，从波形的前部跑出，但是因为波群速度只有 $\frac{c}{2}$，前面的波由于没有波能量的跟进而衰减。有显著波形的波其最前缘的波的波长为 λ_{max}，一般比所投石块的几何尺度大数倍。相应这些波的传播速度为它的最大群速度 $c_{gmax}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda_{max}}{2\pi}}$。当($t=t_2$)时在石块入水处的水面逐渐变得平静起来。这是因为对于重力波，表面张力的影响使其最小群速度为 $c_{gmin}=16.6\text{cm/s}$，这也就是波浪尾部的传播速度。由于 c_{gmax} 一般大于 c_{gmin}，因此受石块扰动而生成水波的区域将随时间而变大，但波高则逐渐减小。这是由于石块给予水体的能量为某一常数的原因。

现在来分析深水中的船行波。图 10-30 表示位于 A 点的船

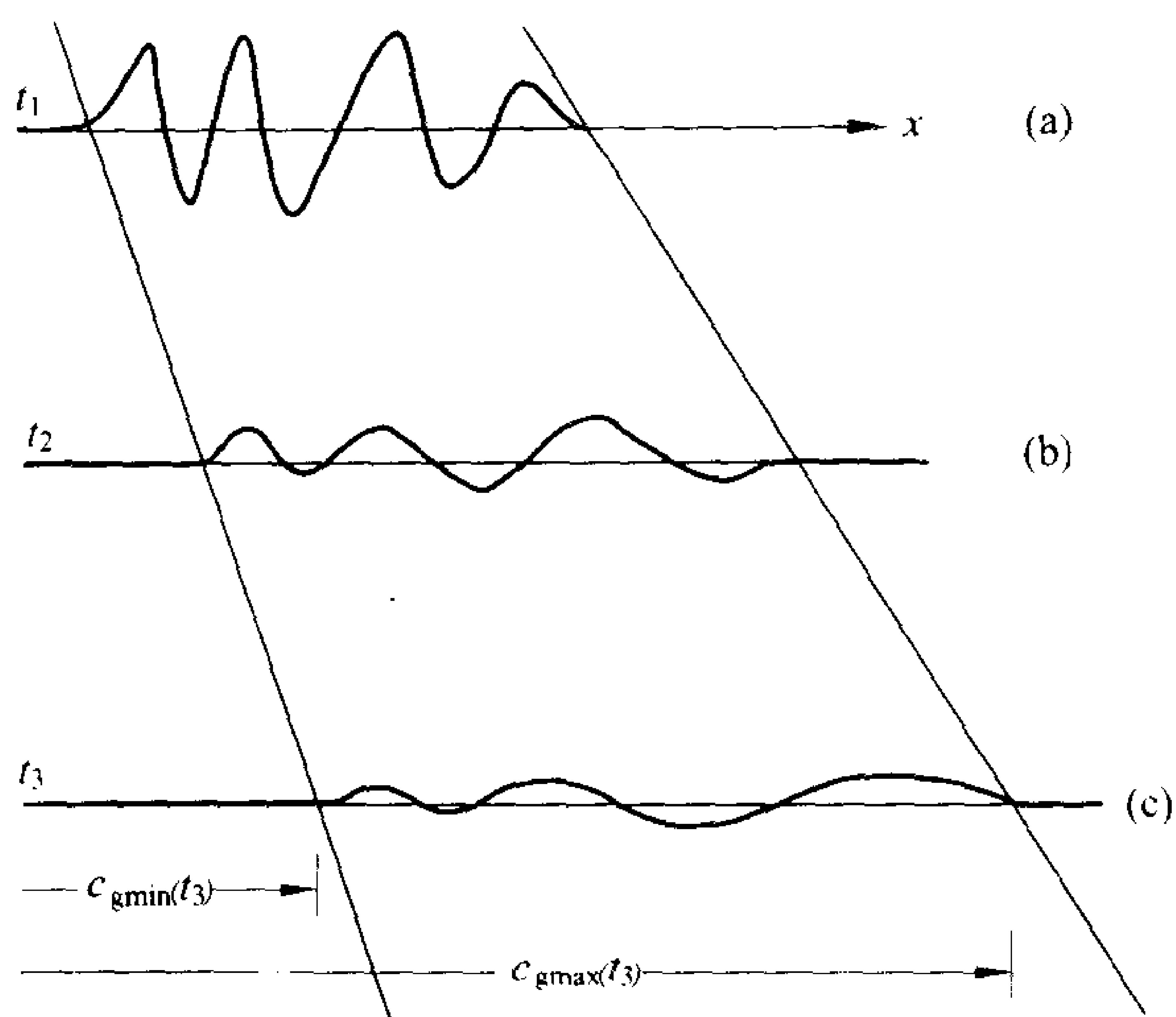


图 10-29　投石入水后不同时间的波形[14]

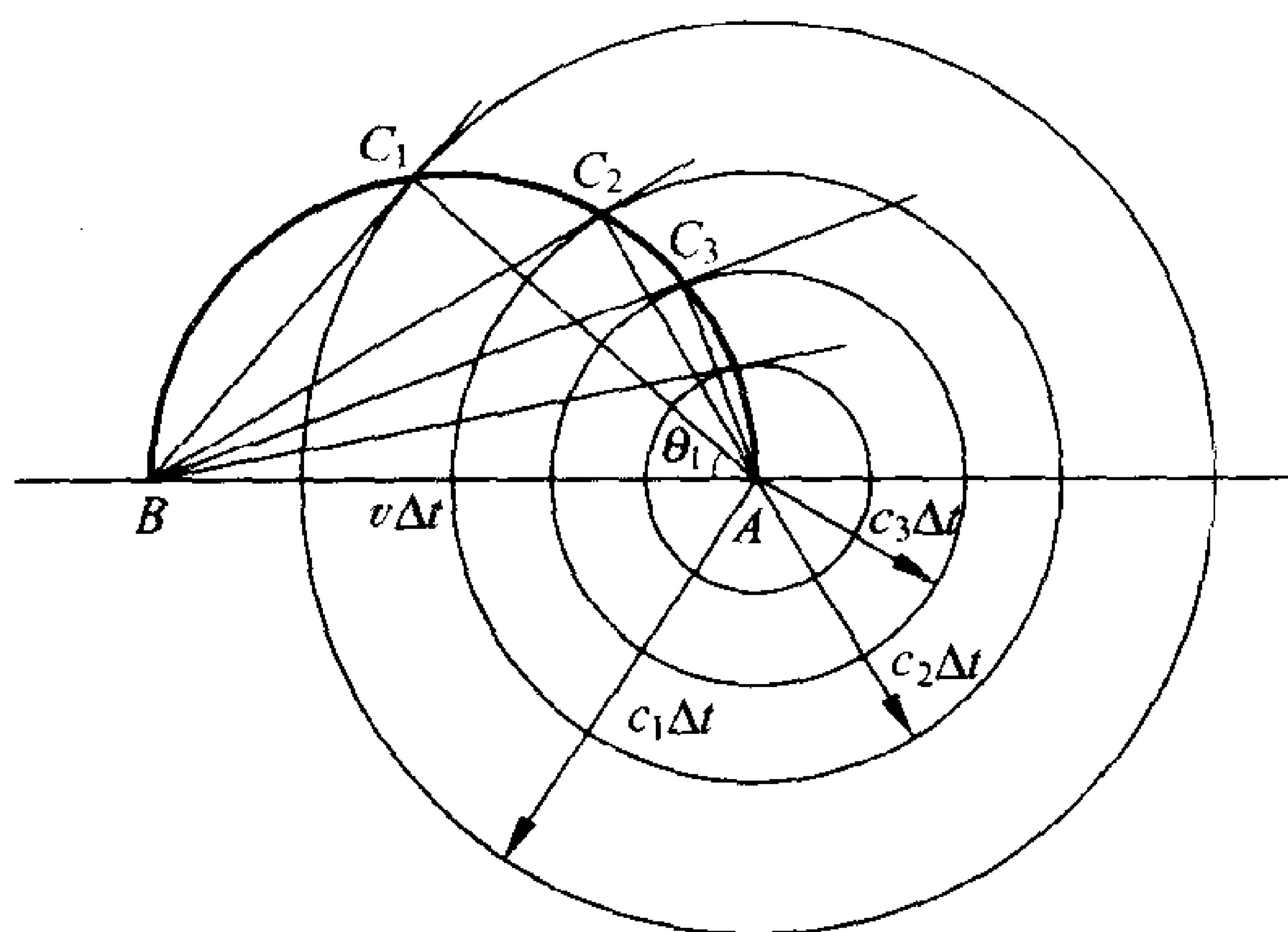


图 10-30　船舶行进中产生的波

舶在 Δt 时间后航行至 B 点，$\overline{AB}=v\Delta t$。在此 Δt 时间内，以波速 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ 等不同波速传播的波，其波峰所到之处分别是以 $c_1\Delta t$，

$c_2\Delta t$，$c_3\Delta t$，…为半径的圆周。由 B 点引这些圆周的切线，分别与各圆相切于 C_1，C_2，C_3 等点，于是可得 $AC_1=c_1\Delta t=v\Delta t\cos\theta_1$，即 $c_1=v\cos\theta_1$，也就是说，只有在 AC_1，AC_2，AC_3，…等方向的波才能符合 $c=v\cos\theta$ 的关系，从而在这些方向形成恒定的波纹。AC_1，AC_2，AC_3，…等线与 AB 线的夹角，即波角分别为 θ_1，θ_2，θ_3，…。由几何关系可知 C_1，C_2，C_3，…等点均在以 AB 为直径的半圆周上。现在的问题是由于在深水中波群速度，也就是波能量的传播速度只有波速 c 的一半，因此沿 AC_1 方向传播的波在 Δt 时间内其波能并未传播到 C_1 点而是只传播到 AC_1 的中点 E_1 处，如图10-31所示，同理在 AC_2 方向在 Δt 时间内波能传播到 E_2 点处，以此类推。而 E_1，E_2，E_3，…等点均在以直径为$\frac{1}{2}v\Delta t$ 的 AD 半圆上，即

$$AE_1=c_{g1}\Delta t=\frac{1}{2}c_1\Delta t \tag{10-186}$$

在船舶到达 A 点以前，例如当船舶在 A' 和 A'' 等点处时，其波能在船舶到达 B 点时所传播的范围如图 10-31 中 $A'D'$ 和 $A''D''$ 圆周所示。而 AD，$A'D'$，$A''D''$ 等所有这些圆周的公切线就是开尔文楔

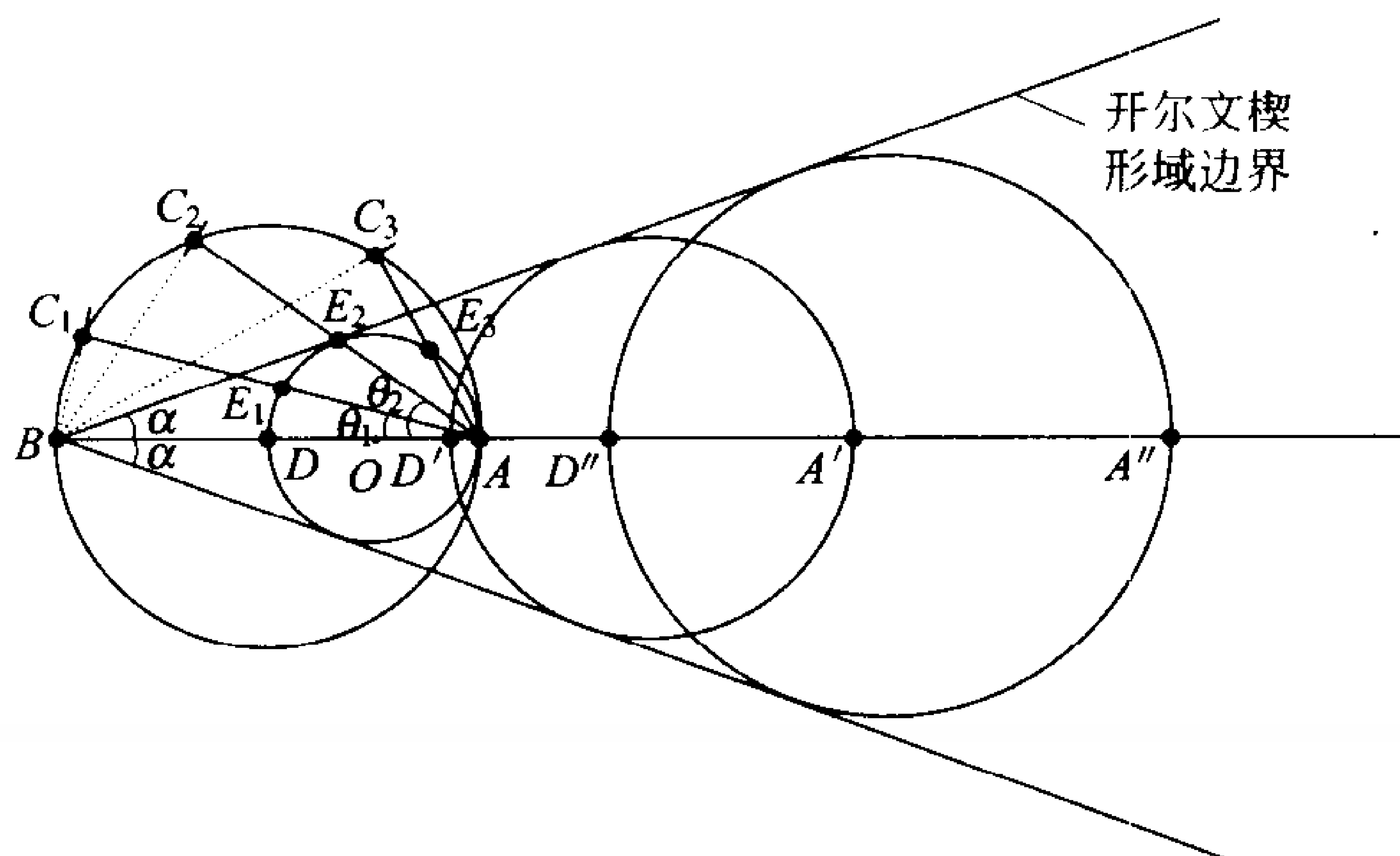


图 10-31　船行波开尔文楔形域[5]

形域的边界。由船舶航行所形成的波纹全部呈现在此区域内。也可以说全部船行波的能量均集中在这一区域。由 B 点所引 AD 圆周的切线 BE_2 可以从几何关系得到

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{OE_2}{OB}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=19°28' \qquad (10\text{-}187)$$

而楔形域边界上 E_2 点处的船行波的波角 θ_2 可通过三角关系得到

$$\theta_2=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]=35°16' \qquad (10\text{-}188)$$

相应于这个波角的波，其波速为 $c=0.816\ v$。这里由几何方法所得到的 α 和 θ 与式(10-185)和图 10-28 的结果一致。在船行进方向的波速 $c=v$，这种波具有最大的波长 $\lambda_{max}=2\pi\frac{v^2}{g}$。随着 θ 角的增加，波速越小，波长也越小。对于开尔文楔形域边界上的点，例如 E_2，其 $\theta=35°16'$，波长为$\frac{2}{3}\lambda_{max}$。

有两种例外的情况：一是当船舶长度 l 相对$\frac{v^2}{g}$较大时，这时产生的波浪具有较大的波长，以至接近 λ_{max}，船行波将以很小的波角 θ 向前传播，也就是波峰线几乎与船舶的航线垂直；一是当船舶长度 l 相对$\frac{v^2}{g}$很小时，例如快艇(speed boat)，这时产生较小波长的波浪，波角 θ 则较大，波峰线几乎与航线平行。由此可见在船行波的研究中由$\frac{v^2}{g}$和 l 所组成的无量纲数为

$$F_r=\frac{v^2}{gl} \qquad (10\text{-}189)$$

F_r 称为弗劳德数。这一点在技术上具有重要意义，特别是当采用模型试验的方法研究船行波时，可应用弗劳德数为相似准数。

10.7.2 兴波阻力

船舶在航行中为克服阻力而作功。船舶所受到的阻力主要是

粘性阻力和兴波阻力两大类。粘性阻力(viscous drag)取决于航速及船体的湿表面面积,但因湿表面面积基本不变,因此减小粘性阻力的潜力不大。兴波阻力(wave resistance,wavemaking resistance)则不同,在一定的弗劳德数范围内,兴波阻力对船型的变化相当敏感,因此可以通过修改船体型线,使兴波阻力大大减低,从而得到显著的效益。

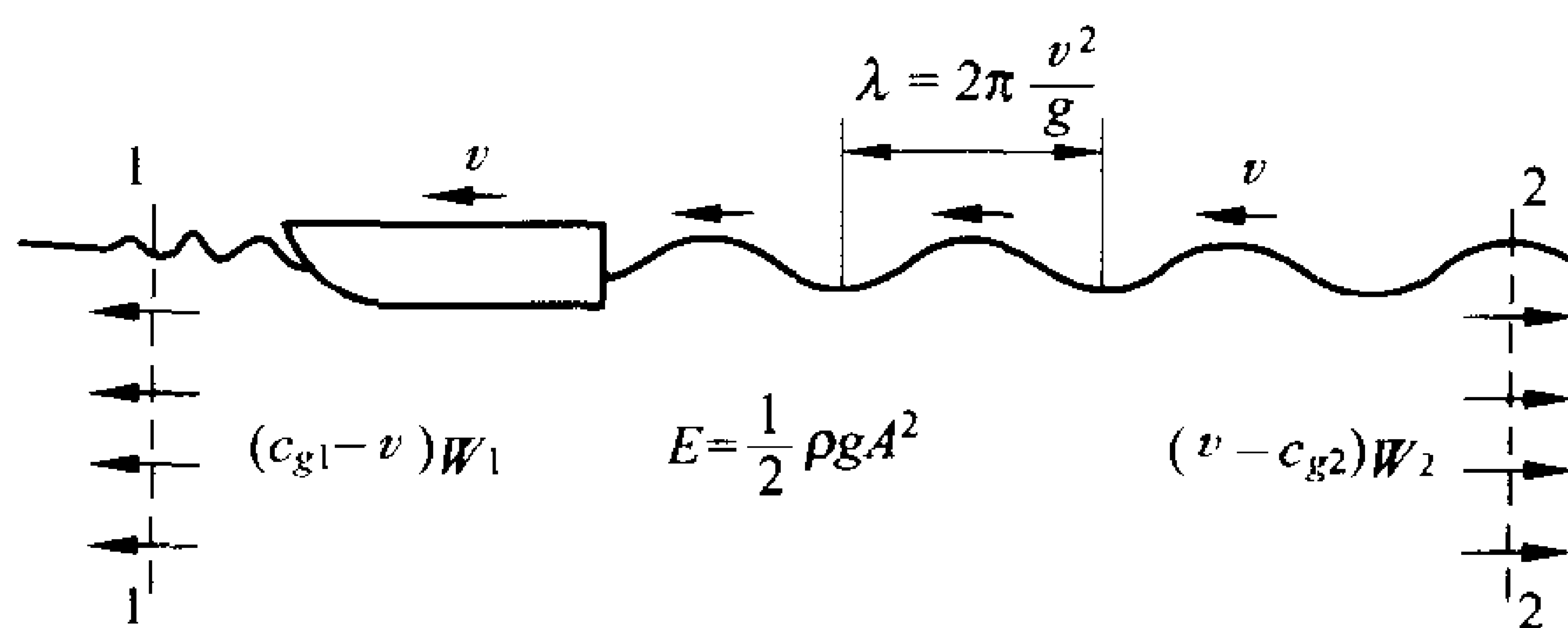


图 10-32 船舶兴波阻力

首先考虑二维情况,如图 10-32 的情形。设一船体以速度 v 在静水中行驶,于是在船的上游将产生表面张力波而在船的下游产生重力波。设坐标系为固定于水中的固定坐标系。对于重力波,单位长度上的总能量为 $E=\frac{1}{2}\rho gA^2$,若同时考虑表面张力的因素则波能应为 $\frac{1}{2}\rho\left(g+\frac{\sigma k}{\rho}\right)^2A^2$。在船体上下游各设控制断面 1-1和 2-2,控制断面随船体运动。当运动达到一个恒定状态后,1-1 与 2-2 断面之间水体中的能量为常量,船体对水体作功而产生的能量通过1-1和 2-2 两个控制断面以波浪运动的形式扩散于水体中。设 P_w 代表这部分能量,则

$$P_w=b(c_{g1}-v)W_1+b(v-c_{g2})W_2 \tag{10-190}$$

式中:b 为宽度;c_{g1},c_{g2} 分别代表船体上游及下游波群速度;W_1 和 W_2 则分别代表上游及下游单位长度波能量。能量 P_w 当然并非推进船舶航行的全部能量,因为还要考虑由粘性阻力而消耗的能

量 P_v。抵抗船舶航行的阻力 D 可写为

$$D = D_w + D_v \tag{10-191}$$

式中：D_w 表示兴波阻力，$P_w = D_w v$；D_v 表示粘性阻力，它包括船体湿面的摩擦阻力和形成船体尾流(wake flow)的形状阻力两部分，而 $P_v = D_v v$。

对于最简单的情形，如果船体上游的表面张力波以其波幅甚小且衰减较快而可以忽略。于是只有流出断面 2-2 的能量为

$$P_w = b\left(v - \frac{v}{2}\right)\frac{1}{2}\rho g A^2$$

则兴波阻力 D_w 为

$$D_w = \frac{1}{v} b \, \frac{1}{4}\rho g A^2 v = b \, \frac{1}{4}\rho g A^2 \tag{10-192}$$

即单位宽度的兴波阻力为 $\frac{1}{4}\rho g A^2$。

对于三维问题，例如船舶的航行，其兴波阻力可以用同样的方法处理。在船的上下游足够远处设一控制断面，控制断面随船体运动，两个控制断面之间水体中的能量在船体航行过程中保持恒定不变。通过两个控制断面传播出去的能量就等于船体兴波阻力所作的功。忽略船体上游表面张力波的能量，则只考虑下游控制断面所传播出去的重力波能量。平面波的每一个分量的能量是沿某一 θ 角度以群速 c_g 向下游传播的。设船行速度为 v，在控制断面处向下游传播水体波能量的速度应该是 $(v - c_g\cos\theta)$。于是在整个下游断面上能量通量为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\rho g \int_{-\infty}^{\infty} A^2 (v - c_g \cos\theta)\,\mathrm{d}y \tag{10-193}$$

为了进一步研究此一积分式，引进“稳定相(stationary phase)原理”，这一原理最初是由开尔文爵士在研究船行波时提出的。现考虑以下的积分式：

$$I = \int F(\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}RG(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \tag{10-194}$$

式中：$F(\theta)$和$G(\theta)$为任意正则函数；R可表示向径，为一个足够大的实常数。

$F(\theta)$可以是复变函数而$G(\theta)$为实数函数。对于R为一个大数的情况，位相函数$RG(\theta)$将高频振荡，式(10-194)中被积函数也将是高频振荡的函数，这些被积元素几乎都被相互抵消，只有其振荡函数稳定的那些θ值附近的被积函数才不致被抵消，这些θ值就称为稳定相。式(10-194)的积分也主要决定于这一部分。对于稳定相的点，$G'(\theta)$等于零，或者说$G(\theta)$为常数，不随θ而变化。例如当$\theta=\theta_0$时为稳定相，$G(\theta)$函数可以展开为泰勒级数，由于$G'(\theta_0)=0$，所以

$$G(\theta) = G(\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^2 G''(\theta_0) + \cdots \qquad (10\text{-}195)$$

将式(10-195)代入式(10-194)，$\theta=\theta_0$附近的点对积分的贡献则为

$$I \simeq \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} F(\theta)\exp\left\{\mathrm{i}R\left[G(\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^2 G''(\theta_0)\right]\right\}\mathrm{d}\theta \qquad (10\text{-}196)$$

式中：ε为一小量，它的数值依F与G而定。

使

$$\xi=(\theta-\theta_0)\left[\frac{1}{2}\left|RG''(\theta_0)\right|\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10\text{-}197)$$

则

$$I \simeq \frac{F(\theta_0)}{\left[\frac{1}{2}\left|RG''(\theta_0)\right|\right]^{\frac{1}{2}}}\int_{-\varepsilon\left(\frac{1}{2}|RG''|\right)^{\frac{1}{2}}}^{\varepsilon\left(\frac{1}{2}|RG''|\right)^{\frac{1}{2}}} \exp[\mathrm{i}(RG \pm \xi^2)]\mathrm{d}\xi \qquad (10\text{-}198)$$

式中：以$F(\theta_0)$作为$F(\theta)$的近似值；"±"号为$G''(\theta_0)$的正负号。

当$R\to\infty$，由 Fresnel 积分有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\xi^2\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\xi^2\mathrm{d}\xi=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-199}$$

将式(10-199)代入式(10-198),得到(10-194)的渐近近似值为

$$I\simeq F(\theta_0)\left[\frac{2\pi}{|RG''|}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[\mathrm{i}\left(RG\pm\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{10-200}$$

如果在积分域中有很多点为稳定相,则需分别计算,然后相加。

对于船行波,将式(10-194)与(10-177)两式相比较可知,$F(\theta)=A(\theta)$,所以船后自由波的表达式可由下式表示:

$$\eta=A(\theta)\left[\frac{2\pi}{|RG''|}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[\mathrm{i}\left(RG(\theta)\pm\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{10-201}$$

式中的 $RG(\theta)$ 为

$$RG(\theta)=k_0(x\sec\theta+y\sec^2\theta\sin\theta)=\frac{g}{v^2}(x\sec\theta+y\sec^2\theta\sin\theta) \tag{10-202}$$

表达能量通量的式(10-193)中的 A 为

$$A=|A(\theta)|\left[\frac{2\pi}{|RG''|}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10-203}$$

重力波中的波群速度 c_g 为

$$c_g=\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}v\cos\theta \tag{10-204}$$

于是代入式(10-193),得兴波阻力 D_w 为

$$D_w=\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\pi\rho g\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|A(\theta)|^2}{|RG''(\theta)|}\left(1-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}y \tag{10-205}$$

控制断面上每一个横向位置 y(在开尔文楔形域以内区域)均可由式(10-183)算出两个分别代表散波与横波的 θ 值,积分式(10-205)时,这两种波的贡献均应包括在内。

式(10-205)中的 y 值可以用波浪传播角 θ 表示,对式(10-182)用直角坐标表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sec^2\theta(x\cos\theta+y\sin\theta)]=0$$

在控制断面上给定点处，$x=-R\cos\alpha$，$y=R\sin\alpha$ 均为定值。此式求导得出

$$x\sec^2\theta\sin\theta+y\sec^3\theta(1+\sin^2\theta)=0 \tag{10-206}$$

在控制断面上，x 为常数，若 y 有变化则 θ 随之变化，二者的关系可由式(10-206)对 θ 求导，得

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sec^2\theta\sin\theta)+y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sec^3\theta(1+\sin^2\theta)]$$

$$=-[\sec^3\theta(1+\sin^2\theta)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \tag{10-207}$$

对给定点(x,y)可由式(10-202)计算 $RG''(\theta)$，即

$$RG''(\theta)=\frac{g}{v^2}\left\{x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sec^2\theta\sin\theta]+y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sec^3\theta(1+\sin^2\theta)]\right\} \tag{10-208}$$

由式(10-207)和式(10-208)可得到

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right|=\frac{|RG''|}{\left(\frac{g}{v^2}\right)\sec^3\theta(1+\sin^2\theta)}=\frac{v^2}{g}\frac{\cos^3\theta|RG''|}{(2-\cos^2\theta)} \tag{10-209}$$

因此式(10-205)可写为简单的形式，即

$$D_{\mathrm{w}}=\frac{1}{2}\pi\rho v^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|A(\theta)|^2\cos^3\theta\mathrm{d}\theta \tag{10-210}$$

此式表明船舶航行中兴波阻力 D_{w} 为波幅 $A(\theta)$的平方的加权积分。式中的 $\cos^3\theta$ 说明兴波阻力主要来自横波，因为散波的 θ 角较大，其余弦值较小。

下面的问题是如何得到波幅函数 $A(\theta)$，由于涉及更多的专业知识，可参考有关专门书籍，如本章所列参考书目[1]。

参考书目

[1] 李世谟．兴波阻力理论基础．北京：人民交通出版社，1986

[2] Crapper G D. Introduction to Water Waves. Ellio Herwood Ltd. 1984

[3] Dean Robert G, Dalrgmple Robert A. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. Prentice-Hall, Inc. 1984

[4] Hsieh D Y and Ho S P. Wave and Stability in Fluids. World Scientific, 1994

[5] Lighthill James. Waves in Fluids. Gambridge University Press, 1978

[6] Mei Chiang C. The Applied Dgnamics and Ocean Surface Waves. World Scientific, 1994

[7] Newman J N. Marine Hydrodynamics. The MIT Press, 1978

[8] Rahman Matiur. Water Waves, Relating Modern Theory to Advanced Engineering Practice. Oxford: Clarendon Press, 1995

[9] Richards J P G and Williams R P. Waves. William Clowes & Sons Ltd, 1972

[10] Sarpkaya Turgut, Isaacson Michael. Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures. Van Nostrand Reinhold Company, 1981

[11] Sorensen Robert M. Basic Coastal Engineering. Chapman & Hall, 1997

[12] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves. John Wiley & Sons, 1974

附录 I

场论与张量基本运算知识

I.1 标量、向量与张量

在流体力学中所处理的各种物理量，以其维数划分可分为标量（scalar）、向量（vector）与张量（tensor）。标量是一维的量，它只须1个数量及单位来表示，它独立于坐标系的选择，如流体的温度、密度等均是标量。向量则不仅有数量的大小而且有指定的方向，它必须由某一空间坐标系的3个坐标轴方向的分量来表示，因此向量是三维的量，如常用黑体字母 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{u}$ 表示空间坐标位置向量和流速向量。对于笛卡儿坐标，$\boldsymbol{x}$ 的3个分量为 x_1, x_2, x_3。而三个坐标方向的单位向量分别用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 表示。有时也常用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示。因此位置向量可以写为

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{I-1}$$

三维空间中的二阶张量则是一个九维的量，必须用9个分量才能完整的表示，如一点的应力、变形速率等均是二阶张量。在三维空间中 n 阶张量由 3^n 个分量组成，所以实质上标量和向量均可作为低阶张量而归入张量的范畴。标量为零阶张量，向量为一阶张量。

I.2 场

场（field）的概念是同研究流体运动的欧拉方法相联系的。欧

拉的观点就是场的观点。场的定义是：如果对应于某一几何空间或某一部分几何空间中的每一点都对应着物理量的一个确定的值，就称为在这个空间上或这个部分空间上确定了该物理量的一个“场”。如果这个物理量是标量则称这个场为标量场，如温度场、浓度场、密度场等。若这个物理量是向量则称这个场为向量场，如速度场、力场等。若这个物理量是张量则称这个场为张量场，如应力场、应变场等。不讨论各种场具体的物理内容，只从数学上研究场的一般规律的学科即为“场论”。

Ⅰ.3　标量场的梯度

标量场 ϕ 中任一点 M，过 M 点的任意方向 $\boldsymbol{n}$，在 $\boldsymbol{n}$ 上某点 M'，若极限 $\lim_{|MM'|\to 0}\dfrac{\phi(M')-\phi(M)}{|MM'|}$ 存在，称之为标量场 ϕ 在 M 点处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的变化率。在过 M 点所有可能的方向中存在一个 ϕ 的变化率最大的方向。梯度(gradient) 就是这样的一个向量，它的方向即为 ϕ 变化率最大的方向而其大小则为这个最大变化率的数值。它是标量场不均匀性的量度，记为 $\mathrm{grad}\phi$。在直角坐标系中为

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3\\ &= \left(\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\phi\equiv\nabla\phi\end{aligned}\qquad(\text{Ⅰ-2})$$

式中：∇是一个算子(operator)，它具有向量与微分的双重性质，称为哈密顿算子，读作 nabla。

物理量沿任一方向(其单位向量为 $\boldsymbol{n}_0$) 的变化率为

$$\boldsymbol{n}_0\cdot\mathrm{grad}\phi\qquad(\text{Ⅰ-3})$$

式中的“•”表示点乘。两个向量的点乘定义为一个标量。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\\ &=(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3)\\ &=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\end{aligned}$$

$$= u_i v_i \tag{I-4}$$

梯度的基本运算法则有

$$\nabla(C\phi) = C\,\nabla\phi \qquad (C\text{ 为常数}) \tag{I-5}$$

$$\nabla(\phi_1 \pm \phi_2) = \nabla\phi_1 \pm \nabla\phi_2 \tag{I-6}$$

$$\nabla(\phi_1\phi_2) = \phi_1\,\nabla\phi_2 + \phi_2\,\nabla\phi_1 \tag{I-7}$$

$$\nabla f(\phi) = f'(\phi)\,\nabla\phi \tag{I-8}$$

I.4 向量场的散度

向量场 $\boldsymbol{A}$ 中任一点 M，包围 M 作一微小体积 ΔV，其表面积为 ΔS，若极限 $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\iint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{\Delta V}$ 存在，称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点处的散度，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$。散度为向量 $\boldsymbol{A}$ 通过界面 ΔS 的通量除以微元体积 ΔV。在直角坐标系中，若

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \nabla\cdot A \tag{I-9}$$

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \equiv 0$ 的场称为无源场。

散度的基本运算法则为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_1 \pm \boldsymbol{A}_2) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}_1 \pm \nabla\cdot\boldsymbol{A}_2 \tag{I-10}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi \tag{I-11}$$

I.5 向量场的旋度

向量场 $\boldsymbol{A}$ 中任一点 M，过 M 点任一方向 $\boldsymbol{n}$，以 $\boldsymbol{n}$ 为法向作一微小面积 ΔS，其边界为 Δl。若极限 $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\int_{\Delta l}\boldsymbol{A}\mathrm{d}l}{\Delta S}$ 存在，称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向上的环量面密度。在过 M 点的所有方向中存在一

个环量面密度最大的方向。旋度就是这样一个向量，它的方向是环量面密度最大的方向，其大小为这个最大的环量面密度的值，记为 rot $\boldsymbol{A}$ 或 curl $\boldsymbol{A}$。在直角坐标系中为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \equiv \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{I-12}$$

式中："×"表示叉乘。两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的叉乘为一个向量 $\boldsymbol{w}$，其数值为 $uv\sin\theta$（θ 为 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角），其方向垂直 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 两个向量形成的平面。从而 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 形成一个右手系统。显然 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$，单位向量之间则有 $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$。

旋度的基本运算法则为

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}_1 \pm \boldsymbol{A}_2) = \nabla\times\boldsymbol{A}_1 \pm \nabla\times\boldsymbol{A}_2 \tag{I-13}$$

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\,\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\phi\times\boldsymbol{A} \tag{I-14}$$

I.6 高斯公式

高斯公式将体积分与面积分联系起来，在流体力学中十分有用。令 V 为一由封闭面积所包围的体积。考虑一无穷小的面积元 $\mathrm{d}S$，其外法线方向为 $\boldsymbol{n}$。向量 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 具有 $\mathrm{d}S$ 的数值和 $\boldsymbol{n}$ 的方向。令 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 表示一个标量场或者向量场、张量场，则高斯公式为

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{I-15}$$

推广的高斯公式还可以写为

$$\iiint_V \nabla\phi\mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{n}\phi\mathrm{d}S \tag{I-16}$$

$$\iiint_V \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S \tag{I-17}$$

$$\iiint_V (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \iint_S (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{A}\mathrm{d}S \tag{I-18}$$

$$\iiint_V (\nabla \cdot \nabla)\phi \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{n} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}S \qquad (\text{I-19})$$

由这些公式可以看出：只要把体积分中的哈密顿算子∇换成法向单位向量 $\boldsymbol{n}$ 即是面积分的被积函数。

I.7　张量的表示法、二阶张量

某些物理量，如一点的应力，要用张量来描述。物理量是一种客观存在，坐标系是人为的描述物理量变化的工具，因此物理量以及描述这种物理量的张量均不依赖坐标系而存在。在一个坐标系下张量可以用一些张量分量的集合来表示。对于一个确定的张量，其各个张量分量也是确定的。但是对于不同的坐标系，张量本身是确定不变的，但是其各个分量则随坐标系的不同而变化。不过在不同坐标系下张量分量之间必然有确定的变换规律。

为简明起见，首先研究一个位置向量在坐标旋转情况下其各个分量之间的关系。如图 I-1，令 x_1, x_2, x_3 为原始坐标 1,2,3 中向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，而 x'_1, x'_2, x'_3则为坐标系旋转到 $1', 2', 3'$ 后同一位置向量 $\boldsymbol{x}$ 在新坐标轴上的各个分量。即令 x_i 和 x'_i分别表示新老坐标系中 $\boldsymbol{x}$ 向量的各个分量，i 由 1 到 3 变化。并令 C_{ij} 表示老的 i 轴与新的 j 轴之间的夹角的余弦。显然 $C_{ij} \neq C_{ji}$。从几何关系可以看出旋转后坐标系中各个分量与原坐标系中各分量的关系为

$$x'_j = C_{1j}x_1 + C_{2j}x_2 + C_{3j}x_3 = \sum_{i=1}^{3} C_{ij}x_i \qquad (\text{I-20})$$

图 I-2 是式(I-20)在一二维坐标中的证明。说明如下：令 α_{ij} 表示老坐标系 i 轴与新坐标系 j 轴之间的夹角，于是 $C_{ij} = \cos\alpha_{ij}$。

在图 I-2 中

$$\begin{aligned} x'_1 = OD &= OC + CD = OC + AB \\ &= x_1\cos\alpha_{11} + x_2\sin\alpha_{11} \end{aligned}$$

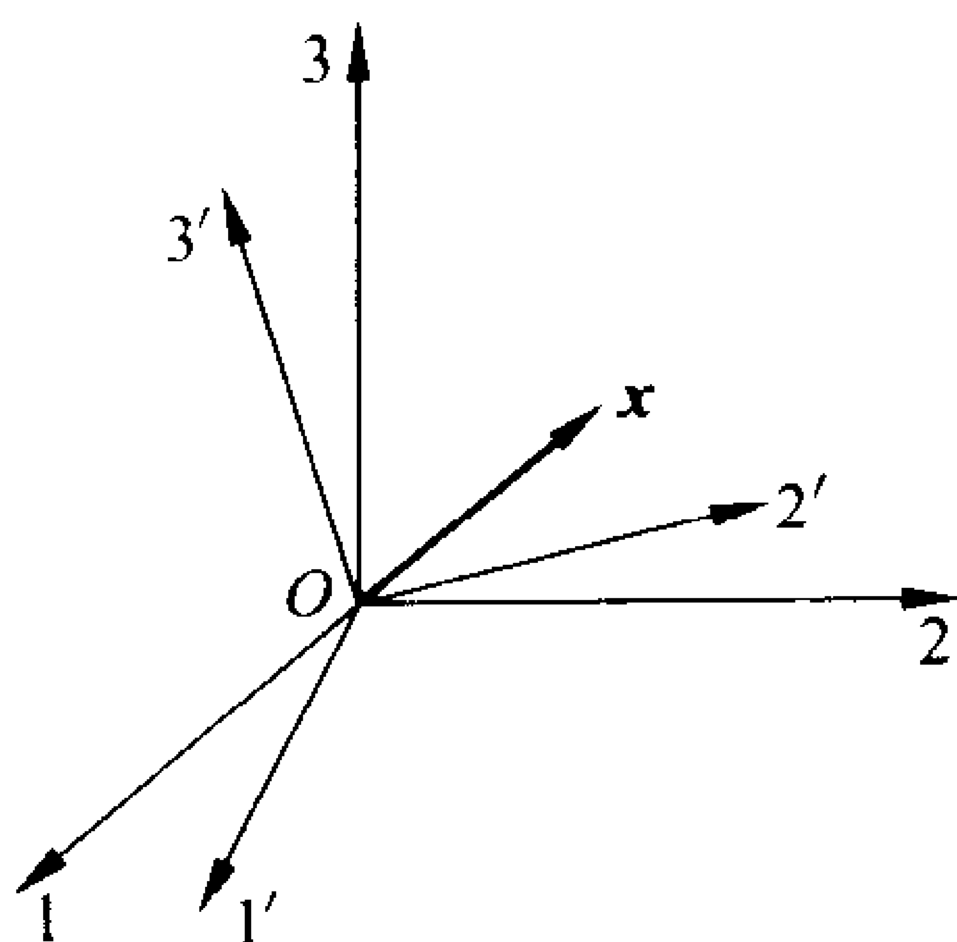


图 I-1

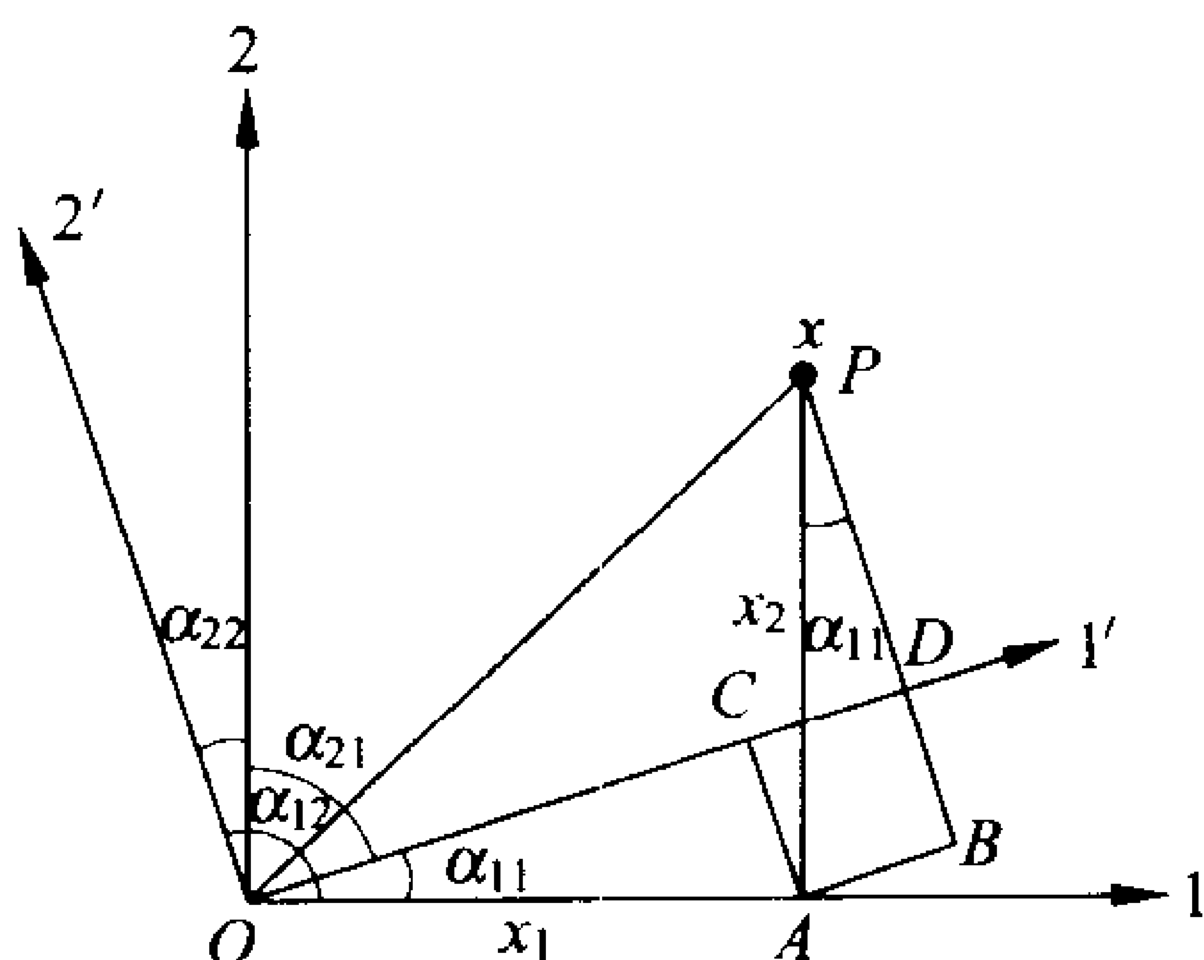


图 I-2

由于 $\alpha_{11} = 90° - \alpha_{21}$，所以 $\sin\alpha_{11} = \cos\alpha_{21} = C_{21}$，上式写为

$$x'_1 = x_1 C_{11} + x_2 C_{21} = \sum_{i=1}^{2} C_{i1} x_i \tag{a}$$

同理

$$x'_2 = PD = PB - DB = x_2 \cos\alpha_{11} - x_1 \sin\alpha_{11}$$

由于 $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{12} - 90°$，所以

$$x'_2 = x_2 \cos\alpha_{22} + x_1 \cos\alpha_{12} = \sum_{i=1}^{2} x_i C_{i2} \tag{b}$$

在二维情况下，当 $j = 1$ 时，式(Ⅰ-20)化为式(a)，当 $j = 2$ 时，式(Ⅰ-20)化为式(b)，由此可以证明式(Ⅰ-20)的成立。

注意：在式(Ⅰ-20)的右侧项中下标 i 出现两次，表明须将所有这个下标的取值的各项相加。这种表示方法在张量运算中经常出现，称为爱因斯坦求和约定。例如：$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$，这种下标称为重复指标(repeated index)或哑标。反之，当在一项中某一下标只出现一次，则它可表示 1,2,3，这种下标称为自由指标(free index)。

因此式(Ⅰ-20)可直接写为

$$x'_j = C_{ij} x_i \tag{Ⅰ-20′}$$

而不须写明求和符号∑。显然，哑标可使用任意字母，其意义不变。例如：$C_{ij}x_i$ 可写为 $C_{kj}x_k$，$C_{mj}x_m$ 等，它们均代表 $C_{1j}x_1+C_{2j}x_2+C_{3j}x_3$。当然，自由指标也可由其他字母来表示，如式（Ⅰ-20′）中的 j，只要方程式两侧的自由指标均采用同一字母。它们都表示一组包含 3 个不同方向的方程式。

同理也可以用旋转后的新坐标系中的分量来表示老坐标系中的分量，

$$x_j = C_{ji}x'_i \tag{Ⅰ-21}$$

当然，任何向量均可应用式（Ⅰ-20′）和式（Ⅰ-21）来确定它们在新老坐标系中各个分量之间的关系，不只是位置向量 $\boldsymbol{x}$。因此可写为如下的普遍形式：

$$u'_j = C_{ij}u_i \tag{Ⅰ-22}$$

标量只由一个数字表示，向量在直角坐标中由三个数字表示。而某些物理量，如一点的应力必须由 9 个数字来表示，因为表示一点的应力，必须明确两个方向，一是应力作用面的方向，一是应力的方向。例如在外法线方向为 i 的作用面上 j 方向的应力可表示为 σ_{ij}。第 2 章中图 2-1 表示了流体中一点的应力状态，图中画出一个微六面体，其各个面上的表面应力包括有法向的正应力和切向的切应力。

正如前述在坐标变换过程中向量可以由一个坐标系中的 3 个分量完全确定一样，一点的应力可以由某一坐标系中的 9 个分量完全确定。当坐标变换时，可以由老坐标系中的 9 个分量确定新坐标系中相应的 9 个分量。因此只要确定在直角坐标系图2-1 中的 9 个应力分量，则任意方向作用面上的应力均可求出。应力的 9 个分量写为如下的矩阵形式：

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{I-23}$$

为了寻求任意方向平面上的应力，可采用旋转坐标系的办法，使新坐标系 $1',2',3'$ 中的一个坐标轴与所求平面垂直。新老坐标系中各应力分量的关系为

$$\sigma'_{mn} = C_{im}C_{jn}\sigma_{ij} \tag{I-24}$$

式(Ⅰ-24)与式(Ⅰ-22)很近似，如在式(Ⅰ-22)中 C 的第一个下标是哑标而第二个下标是自由指标，式(Ⅰ-24)是相似的，只是出现两次。凡符合(Ⅰ-24)式的变换规律的物理量称为二阶张量。注意：张量与矩阵不同，只有在满足式(Ⅰ-24)的变换规律时，矩阵的各个元素才能表示张量的各个分量。

张量可以有各种不同的阶(order)。事实上标量可考虑为零阶张量，向量可认为是一阶张量写为 u_i。自由指标的数字相应于张量的阶数，例如：$\boldsymbol{A}$ 如果是一个四阶张量，则它必然有四个自由指标，而其 81 个分量的变换规律可表示为

$$A'_{mnpq} = C_{im}C_{jn}C_{kp}C_{lq}A_{ijkl} \tag{I-25}$$

在三维空间中，每个下标可取 1,2,3 之值，因此 n 阶张量有 3^n 个分量。

Ⅰ.8 单位张量 $\boldsymbol{\delta}$ 和置换张量 ε_{ijk}

单位张量 $\boldsymbol{\delta}$(Kronecker delta) 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases} \tag{I-26}$$

写为矩阵形式

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{I-27}$$

$\boldsymbol{\delta}$ 的基本性质有

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{I-28}$$

$$a_i\delta_{ij} = a_j \tag{I-29}$$

$$a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij} \qquad (\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}) \tag{I-30}$$

两个基向量 $\boldsymbol{e}_i$,$\boldsymbol{e}_j$ 的点积为

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{I-31}$$

由定义可见：δ_{ij} 是各向同性张量，也就是说当坐标系转动后，张量的分量不变，即 $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$。各向同性张量可以有不同的阶，但是不存在一阶各向同性张量；惟一的二阶各向同性张量是 δ_{ij}；惟一的三阶各向同性张量为置换张量 ε_{ijk}。ε_{ijk} 的定义为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123,231,\cdots(\text{偶次置换}) \\ -1 & ijk = 132,321,\cdots(\text{奇次置换}) \\ 0 & \text{除以上两种排列之外} \end{cases} \tag{I-32}$$

经常用到的 ε 与 δ 关系为

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{I-33}$$

置换张量可以应用于下列表示式：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \boldsymbol{e}_i \tag{I-34}$$

$$|a_{ij}| = \varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} \tag{I-35}$$

I.9　二阶对称张量与二阶反对称张量

二阶张量当其下标 i,j 互换后所代表的分量仍不变，即 $A_{ij} = A_{ji}$，称为二阶对称张量。二阶对称张量的矩阵表示形式中各元素对于对角线对称从而只有六个独立元素。二阶反对称张量则 $A_{ij} = -A_{ji}$，其矩阵表示形式中对角线上各元素为零从而只有三个独立元素。任一二阶张量均可惟一地分解为一个二阶对称张量和一个二阶反对称张量之和。因为如果将张量 A_{ij} 分解为下列形式：

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) \qquad (\text{I-36})$$

当变换 i,j 后，右侧第一项不变，第二项则改变符号。因而$\frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ 为张量 A_{ij} 的对称部分而$\frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$ 为张量 A_{ij} 的反对称部分。

I.10　并矢

在直角坐标系中，若 $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$ 为两个向量，定义两个向量的并矢(dyad)为

$$\boldsymbol{ab} = a_ib_j = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \qquad (\text{I-37})$$

并矢是一个二阶张量。坐标单位向量的两两并矢称为并基。三维空间的二阶并基共有 9 个。任何一个并矢都可用并基表示为

$$\boldsymbol{ab} = (a_ib_j)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (\text{I-38})$$

I.11　二阶张量的代数运算

1. 张量相等

$$A_{ij} = B_{ij} \qquad (\text{I-39})$$

两个张量相等则各分量一一对应相等。若两个张量在某一笛卡儿坐标系中相等，则它们在任意一个(笛卡儿)坐标系中也相等。如

$$A'_{mn} = c_{im}C_{jn}A_{ij}$$

$$B'_{mn} = c_{im}C_{jn}B_{ij}$$

如果 $A_{ij} = B_{ij}$，则 $A'_{mn} = B'_{mn}$。

2. 张量加减

$$\boldsymbol{A} = A_{ij},\boldsymbol{B} = B_{ij},\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = A_{ij} \pm B_{ij} \qquad (\text{I-40})$$

张量的加减为其同一坐标系下对应元素相加减。两张量必须同阶方能加减。

3. 张量数乘

二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 乘以数 λ，$\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{A}$，则

$$B_{ij}=\lambda A_{ij} \tag{I-41}$$

张量数乘等于以该数乘所有的张量分量。

4. 二阶张量的点积与双点积

$$\boldsymbol{A}=A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{B}=B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n$$

定义点积"·"为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)\cdot(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)\\&=A_{ij}B_{mn}\delta_{jm}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_n\\&=A_{ij}B_{jn}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_n\end{aligned} \tag{I-42}$$

二阶张量的点积即并矢中相邻单位向量的点积，可得到一个新的张量。二阶张量与向量的点积定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B}&=(a_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)\\&=a_iB_{mn}\delta_{im}\boldsymbol{e}_n\\&=a_iB_{in}\boldsymbol{e}_n\end{aligned} \tag{I-43}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}&=(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)\cdot(a_i\boldsymbol{e}_i)\\&=B_{mn}a_i\delta_{in}\boldsymbol{e}_m\\&=B_{mn}a_n\boldsymbol{e}_m\end{aligned} \tag{I-44}$$

二阶张量的双点积有两种形式，分别定义为

并联式 $$\begin{aligned}\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}&=(A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j):(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)\\&=A_{ij}B_{mn}\delta_{im}\delta_{jn}\\&=A_{ij}B_{ij}\end{aligned} \tag{I-45}$$

串联式 $$\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}=(A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)\cdot\cdot(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)$$

$$= A_{ij}B_{mn}\delta_{jm}\delta_{in}$$

$$= A_{ij}B_{ji} \tag{I-46}$$

I.12 雅可比行列式

雅可比行列式定义为

$$J(t) = \det\left|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right| \tag{I-47}$$

一个三维的雅可比行列式为

$$J(t) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$$

在坐标系变换时，雅可比行列式有重要作用。如对一个二维流动，流速的导数为

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \tag{a}$$

如果要在另一坐标系(ξ_j)中表示流速的导数，则可用下式表示：

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)}\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}$$

式中：

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = J(t) \tag{b}$$

即为雅可比行列式。而在新坐标系(ξ_i)中流速的导数为

$$\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial\xi_2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial\xi_2}\end{vmatrix} \tag{c}$$

这个行列式中的每一项均可按行列式相乘的法则由行列式(a)与(b)求出,仅举一项说明如下:

$$\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}$$

雅可比行列式的另一个重要作用体现在多重积分中要改变积分变量时。为简单起见仍研究一二维流动,运动的某一属性 $F(x_1,x_2)$,流场的面积为 S,如果变换到一个新的坐标系(ξ_1,ξ_2)中去,则

$$x_1=x_1(\xi_1,\xi_2),\qquad x_2=x_2(\xi_1,\xi_2) \tag{d}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1=\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_1+\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_2,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2=\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_1+\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_2.$$

微元面积

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2=\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2}-\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_2$$

$$=J\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_2$$

二重积分在不同坐标系中的变换可写为

$$\iint_S F(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\iint_{S'}F[x_1(\xi_1,\xi_2),x_2(\xi_1,\xi_2)]\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \tag{I-48}$$

式中:$\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}$为二维雅可比行列式;$S'$为坐标系$(\xi_j)$中的面积,通过式(d)由坐标系$(x_i)$中面积 S 变换而得。

例 由直角坐标系变换为极坐标系。

式(d)的变换关系为

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta$$

此时 $\xi_1 \sim r, \xi_2 \sim \theta$。由(b)式可知 $J(t) = r$，在 ξ_1, ξ_2 平面中微元面积可以表示为 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。

对于三维流动，同理可得

$$\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = J \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$$

附录 Ⅱ

正交曲线坐标

在流体力学中经常采用各种不同形式的正交曲线坐标系(orthogonal curvilinear co-ordinates)以方便对不同问题的分析和求解。

Ⅱ.1 正交曲线坐标、拉梅系数

在直角坐标系中一点 M 的位置可由 (x,y,z) 惟一地确定。如可用 $\boldsymbol{r}_M$ 表示 M 点位置，如图 Ⅱ-1 所示。

$$\boldsymbol{r}_M = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{Ⅱ-1}$$

式中的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为 x,y,z 三个坐标轴上的单位向量，它们不仅大小为 1 而且方向不变，因此它们的导数 $\dfrac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x},\dfrac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial y},\cdots$ 等均为零。

直角坐标系中微元弧长度 $\mathrm{d}s$ 可以表示为

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \tag{Ⅱ-2}$$

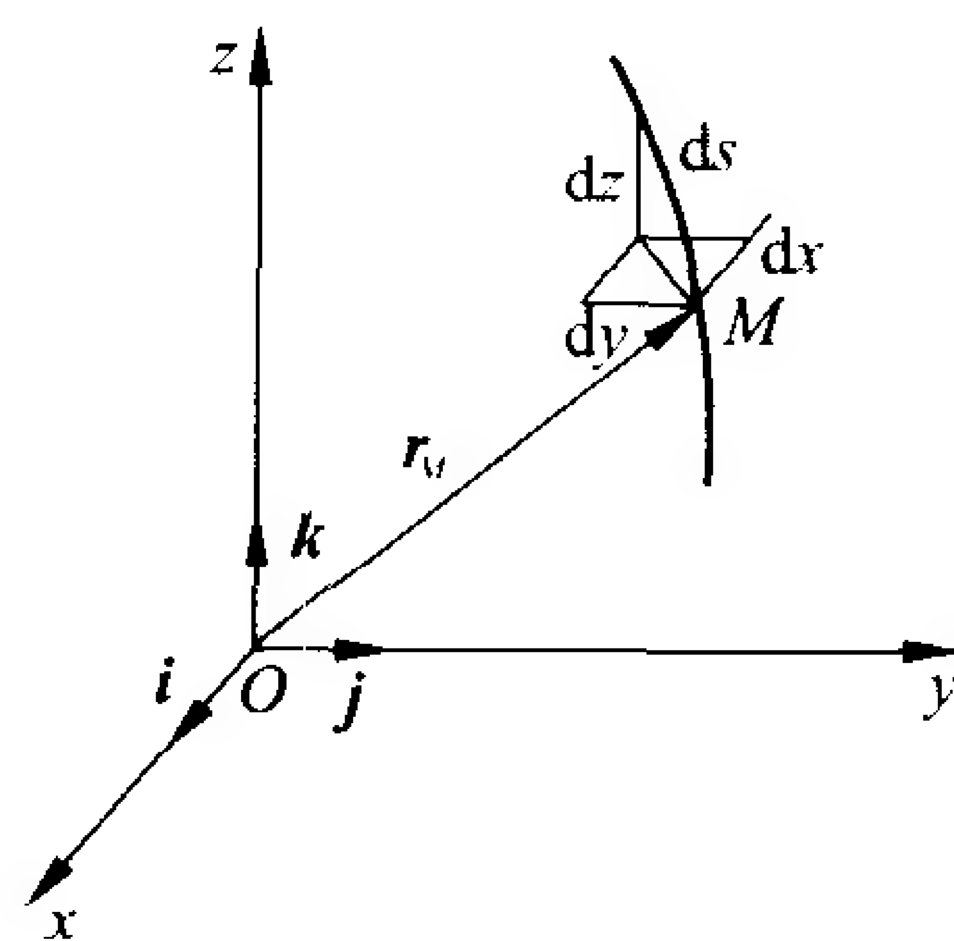


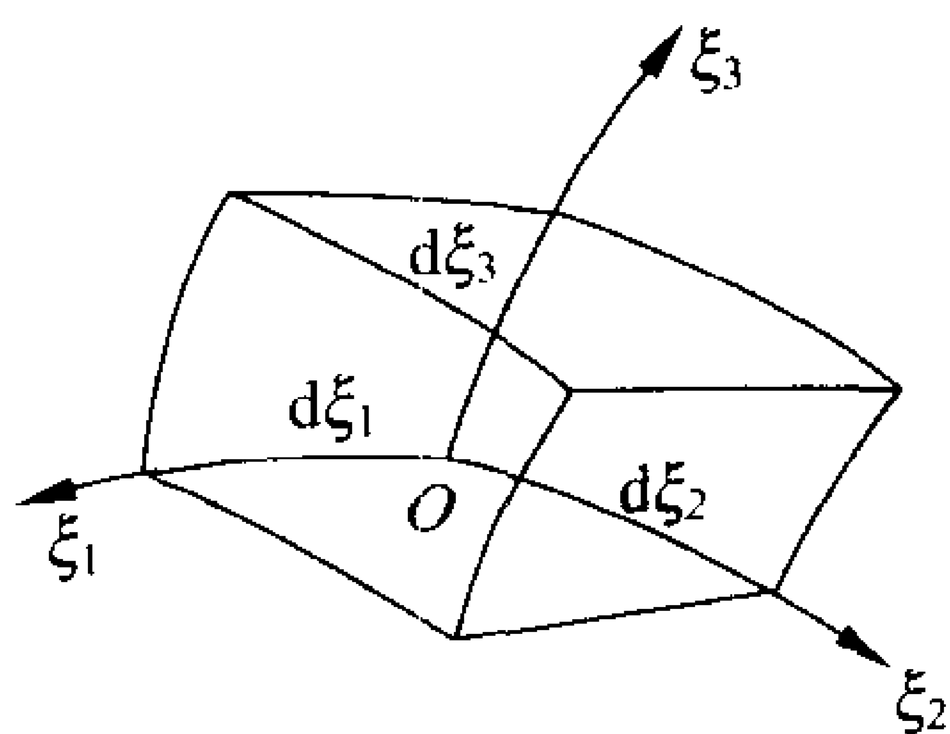
图 Ⅱ-1 直角坐标系中微元弧的表示

考虑到由直角坐标系 (x,y,z) 转换为某一正交曲线坐标系 (ξ_1,ξ_2,ξ_3)，二者间有一一对应的关系，因此

直角坐标系中一点 M 可以用正交曲线坐标系(ξ_1,ξ_2,ξ_3)表示。两个坐标系间有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ y &= f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ z &= f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅱ-3})$$

如图Ⅱ-2，在正交曲线坐标系(ξ_1,ξ_2,ξ_3)中，$\xi_1=\text{const}$，$\xi_2=\text{const}$，$\xi_3=\text{const}$ 的曲面互相正交，曲面两两相交的交线构成正交曲线坐标系的三个坐标轴 ξ_1,ξ_2,ξ_3，绘出 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_1+\mathrm{d}\xi_1,\xi_2+\mathrm{d}\xi_2,\xi_3+\mathrm{d}\xi_3$ 的曲面，可得一正交的平行六面体。六面体的各边长为 $h_1\mathrm{d}\xi_1$，$h_2\mathrm{d}\xi_2$，$h_3\mathrm{d}\xi_3$。这是因为从一般意义上说，ξ_i 并不一定代表一个长度，如在圆柱坐标中它可以是一个角度，因此乘以 h_i 变为长度尺度。在 ξ_i 坐标系中微元弧 $\mathrm{d}s$ 应表示为



图Ⅱ-2

$$(\mathrm{d}s)^2 = (h_1\mathrm{d}\xi_1)^2 + (h_2\mathrm{d}\xi_2)^2 + (h_3\mathrm{d}\xi_3)^2 \qquad (\text{Ⅱ-4})$$

由式(Ⅱ-3)可得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2 + \frac{\partial x}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3 \\ \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial y}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2 + \frac{\partial y}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3 \\ \mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial z}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2 + \frac{\partial z}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅱ-5})$$

因此微元弧长度 $\mathrm{d}s$ 为

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2 + \frac{\partial x}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right)^2 \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1+\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2+\frac{\partial y}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1+\frac{\partial z}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2+\frac{\partial z}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right)^2$$

由于 ξ_i 为正交系统，因此在上式展开过程中不会出现交叉相乘项(cross product term)，如 $\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$，$\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_3$，$\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$ 等。因此上式可化为

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right)^2\\
&\quad+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right)^2\\
&\quad+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\mathrm{d}\xi_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right)^2\\
&=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)^2\right](\mathrm{d}\xi_1)^2\\
&\quad+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_2}\right)^2\right](\mathrm{d}\xi_2)^2\\
&\quad+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_3}\right)^2\right](\mathrm{d}\xi_3)^2\end{aligned}$$

与式(Ⅱ-4)对比，可得

$$\left.\begin{aligned}h_1&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)^2}\\
h_2&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_2}\right)^2}\\
h_3&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_3}\right)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(\text{Ⅱ-6})$$

h_1，h_2，h_3 称为拉梅(Lame)系数。

Ⅱ.2 正交曲线坐标单位向量

设正交曲线坐标系中，沿坐标轴的单位向量(unit vector)为

e_1, e_2, e_3，一般来说，这些单位向量的导数$\frac{\partial e_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial e_1}{\partial \xi_3}, \cdots$ 并不为零。设一标量函数 ϕ, ϕ 在 ξ_1 方向的导数为

$$e_1 \cdot \nabla\phi = \lim_{d\xi_1 \to 0} \frac{\phi(\xi_1 + d\xi_1) - \phi(\xi_1)}{h_1 d\xi_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}$$

同理得到 ϕ 在 ξ_2, ξ_3 方向的导数。从而正交曲线坐标系中任意标量函数的梯度$\nabla\phi$可表示为

$$\nabla\phi = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}\right)e_1 + \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}\right)e_2 + \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}\right)e_3 \qquad (\text{Ⅱ-7})$$

应用式(Ⅱ-7)，令其中的标量函数 $\phi = \xi_1$，由于 ξ_1 对于 ξ_2, ξ_3 而言是独立的，它们之间无函数关系。

因而 $$\nabla\xi_1 = \frac{1}{h_1}e_1, \quad 或\ e_1 = h_1 \nabla\xi_1 \qquad (\text{Ⅱ-8})$$

又因$\nabla\times(\nabla\xi_1) = 0$，式中"×"表示向量的叉乘，或称向量积(cross product)

$$\begin{aligned} \nabla\times(\nabla\xi_1) &= \nabla\times \frac{e_1}{h_1} \\ &= \frac{1}{h_1}\nabla\times e_1 + \nabla\frac{1}{h_1}\times e_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

应用式(Ⅱ-7)，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1}\nabla\times e_1 &= e_1 \times \nabla(\frac{1}{h_1}) \\ &= e_1 \times \left(-\frac{1}{h_1^3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_1}e_1 - \frac{1}{h_1^2 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}e_2 - \frac{1}{h_1^2 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}e_3\right) \end{aligned}$$

同理
$$\left.\begin{aligned} \nabla\times e_1 &= \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}e_2 - \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}e_3 \\ \nabla\times e_2 &= \frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}e_3 - \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}e_1 \\ \nabla\times e_3 &= \frac{1}{h_3 h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}e_1 - \frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅱ-9})$$

应用式(Ⅱ-9)得单位向量的散度。即

$$\nabla\cdot \boldsymbol{e}_1 = \nabla\cdot(\boldsymbol{e}_2\times \boldsymbol{e}_3)$$

$$= (\nabla\times \boldsymbol{e}_2)\cdot \boldsymbol{e}_3 - (\nabla\times \boldsymbol{e}_3)\cdot \boldsymbol{e}_2$$

$$= \frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(h_2 h_3)}{\partial \xi_1}$$

同理 $$\nabla\cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(h_1 h_3)}{\partial \xi_2} \quad (Ⅱ\text{-}10)$$

同理 $$\nabla\cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(h_1 h_2)}{\partial \xi_3}$$

式(Ⅱ-8),式(Ⅱ-9),式(Ⅱ-10)为三个有关正交曲线坐标单位向量的基本关系式。

Ⅱ.3 正交曲线坐标中的散度

令 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 代表在正交曲线坐标系(ξ_1,ξ_2,ξ_3)中的一个向量,则可以表示为

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 \quad (Ⅱ\text{-}11)$$

应用式(Ⅱ-7)和式(Ⅱ-10),可得

$$\nabla\cdot(u_1\boldsymbol{e}_1) = u_1(\nabla\cdot \boldsymbol{e}_1) + (\nabla u_1)\cdot \boldsymbol{e}_1$$

$$= \frac{u_1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(h_2 h_3)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1}{h_1 \partial \xi_1}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial \xi_1}$$

同理 $$\nabla\cdot(u_2\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial \xi_2} \quad (Ⅱ\text{-}12)$$

同理 $$\nabla\cdot(u_3\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial \xi_3}$$

于是任意向量 $\boldsymbol{u}$ 的散度为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(u_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(u_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(u_3 h_1 h_2)\right] \tag{Ⅱ-13}$$

如果令 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$，$\phi$ 为标量函数，则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = \Delta\phi$$

在正交曲线坐标系中拉普拉斯算子表示为

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial \xi_3}\right)\right] \tag{Ⅱ-14}$$

Ⅱ.4 正交曲线坐标中的旋度

首先表示出向量 $\boldsymbol{u}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{u}$ 的沿三个坐标轴的分量：

$$\begin{aligned}\nabla\times(u_1\boldsymbol{e}_1) &= u_1\,\nabla\times\boldsymbol{e}_1 + (\nabla u_1)\times\boldsymbol{e}_1 \\ &= \frac{u_1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}\boldsymbol{e}_2 - \frac{u_1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}\boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\boldsymbol{e}_3 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\boldsymbol{e}_2 \\ &= \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial \xi_2}\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

同理 $$\nabla\times(u_2\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial \xi_1}\boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial \xi_3}\boldsymbol{e}_1$$

同理 $$\nabla\times(u_3\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{h_3 h_2}\frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial \xi_2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial \xi_1}\boldsymbol{e}_2$$

于是可得

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{u} = &\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial \xi_3}\right]\boldsymbol{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial \xi_1}\right]\boldsymbol{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial \xi_2}\right]\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{Ⅱ-15}$$

又可写为

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \boldsymbol{e}_1 & h_2 \boldsymbol{e}_2 & h_3 \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 u_1 & h_2 u_2 & h_3 u_3 \end{vmatrix} \tag{Ⅱ-16}$$

Ⅱ.5　圆柱坐标

圆柱坐标(cylindrical polar coordinates)中的表示如图Ⅱ-3。

坐标轴：

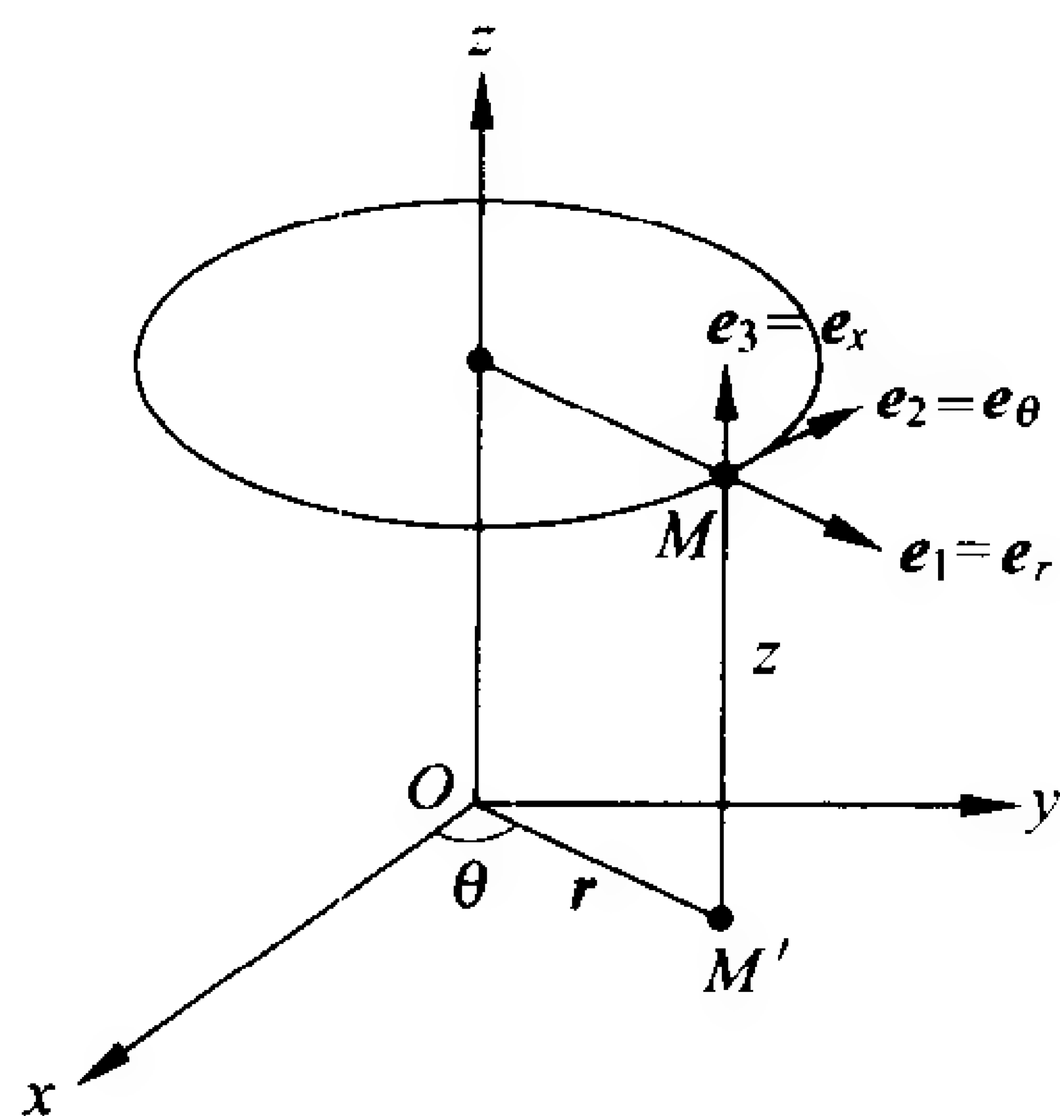
$\xi_1 = r$，　$\xi_2 = \theta$，　$\xi_3 = z$

拉梅系数：

$h_1 = 1$，　$h_2 = r$，　$h_3 = 1$

与直角坐标关系：

$x = r\cos\theta$，　$y = r\sin\theta$，　$z = z$



图Ⅱ-3　圆柱坐标

由式(Ⅱ-4)得

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$

由式(Ⅱ-13)得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(u_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z r)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{Ⅱ-17}$$

由式(Ⅱ-15)得

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_r}{r\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{Ⅱ-18}$$

由式(Ⅱ-7)得

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{Ⅱ-19}$$

由式(Ⅱ-14)得

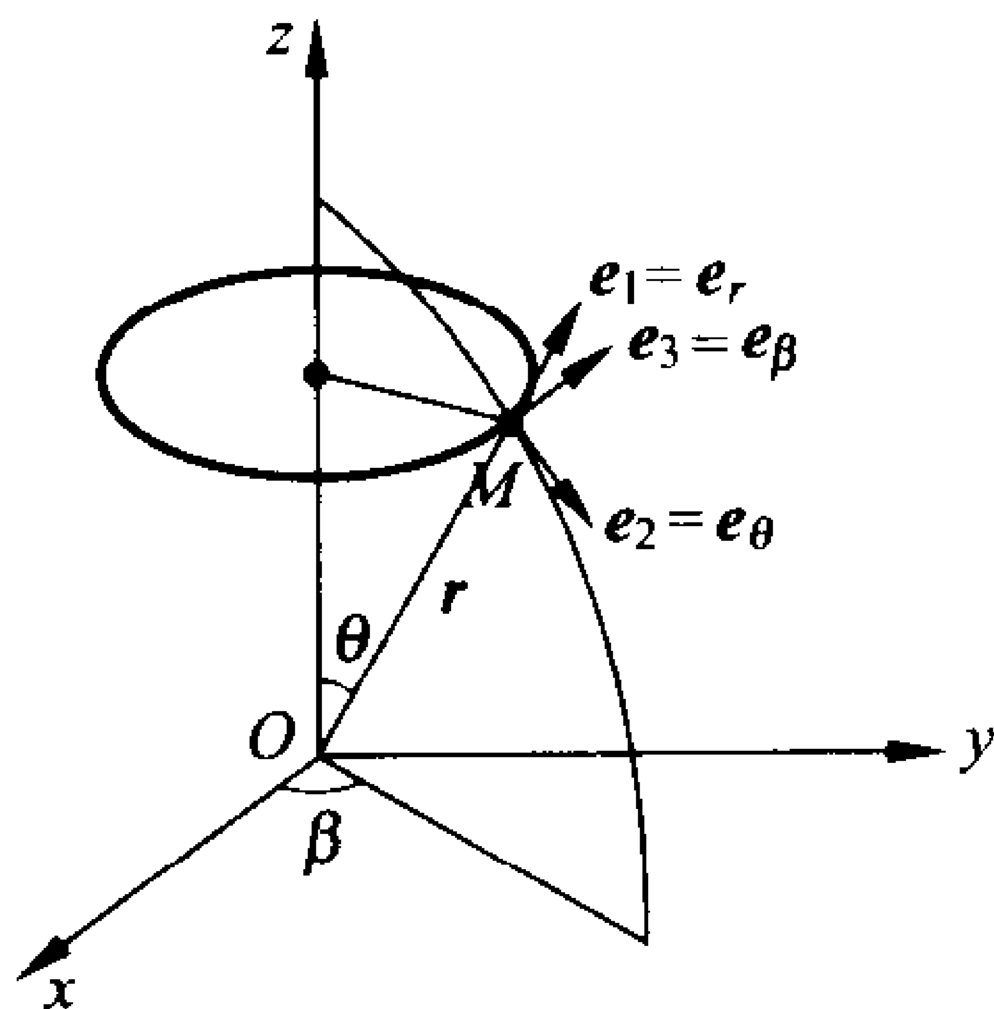
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{Ⅱ-20}$$

Ⅱ.6 球坐标

球坐标(spherical polar coordinates)中的表示如图Ⅱ-4。

坐标轴： $\xi_1 = r$， $\xi_2 = \theta$， $\xi_3 = \beta$

拉梅系数： $h_1 = 1$， $h_2 = r$， $h_3 = r\sin\theta$



图Ⅱ-4 球坐标

与直角坐标关系：

$$x = r\sin\theta\cos\beta,\quad y = r\sin\theta\sin\beta,\quad z = r\cos\theta.$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2 + (r\sin\theta\mathrm{d}\beta)^2$$
$$= (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\beta)^2 \tag{Ⅱ-21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} \tag{Ⅱ-22}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\beta}{\partial\theta} + \frac{u_\beta\cot\theta}{r} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\beta}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\beta \qquad (\text{Ⅱ-23})$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\boldsymbol{e}_\beta \qquad (\text{Ⅱ-24})$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\beta^2} \qquad (\text{Ⅱ-25})$$

附录 Ⅲ

复变函数基本知识

Ⅲ.1　复数

形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为复数(complex number)，其中：x，y 均为实数(real number)；i 则是一个符号，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 表示虚数单位。

x，y 分别表示复数 z 的实部和虚部，用记号表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(x + \mathrm{i}y) \\ y &= \mathrm{Im}(x + \mathrm{i}y) \end{aligned}\right\} \tag{Ⅲ-1}$$

如果 $x + \mathrm{i}0$，即 $y = 0$ 时，z 可以看作为实数 x，当 $0 + \mathrm{i}y$ 时，简记为 $\mathrm{i}y$，z 称为纯虚数。

在平面上取直角坐标系如图 Ⅲ-1，用坐标为(x, y) 的点 P 表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$，这样复数就与平面上的点一一对应。实数与 x 轴上的点一一对应称为实轴，虚数与 y 轴上的点一一对应称为虚轴。

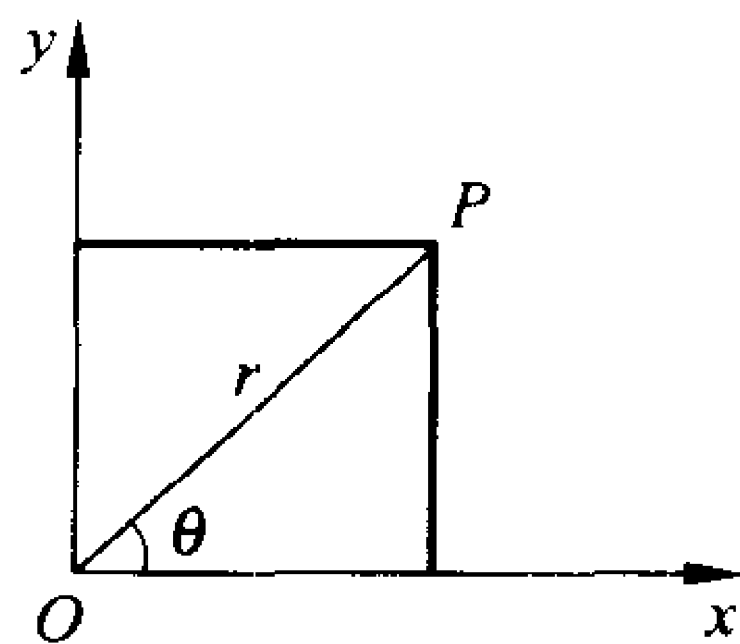


图 Ⅲ-1　复数

若用向量表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$，其中：x，y 分别是 **OP** 在 x 轴和 y 轴上的投影；**OP** 的长度 r 称为复数 z 的模，记作 $|z|$；而 **OP** 与 x 轴正向之间夹角称为复数 z 的幅角，记作 $\arg z$，幅角的方向规定反时针为正。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \arctan \frac{y}{x} \qquad (\text{Ⅲ-2})$$

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 还可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad (\text{Ⅲ-3})$$

复数 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ 称为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数(conjugate complex number),二者对于实轴(x 轴)是对称的,如图 Ⅲ-2 所示。

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad (\text{Ⅲ-4})$$

由此可得到

$$\left.\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2x \\ z - \bar{z} &= 2\mathrm{i}y \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2 = r^2 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅲ-5})$$

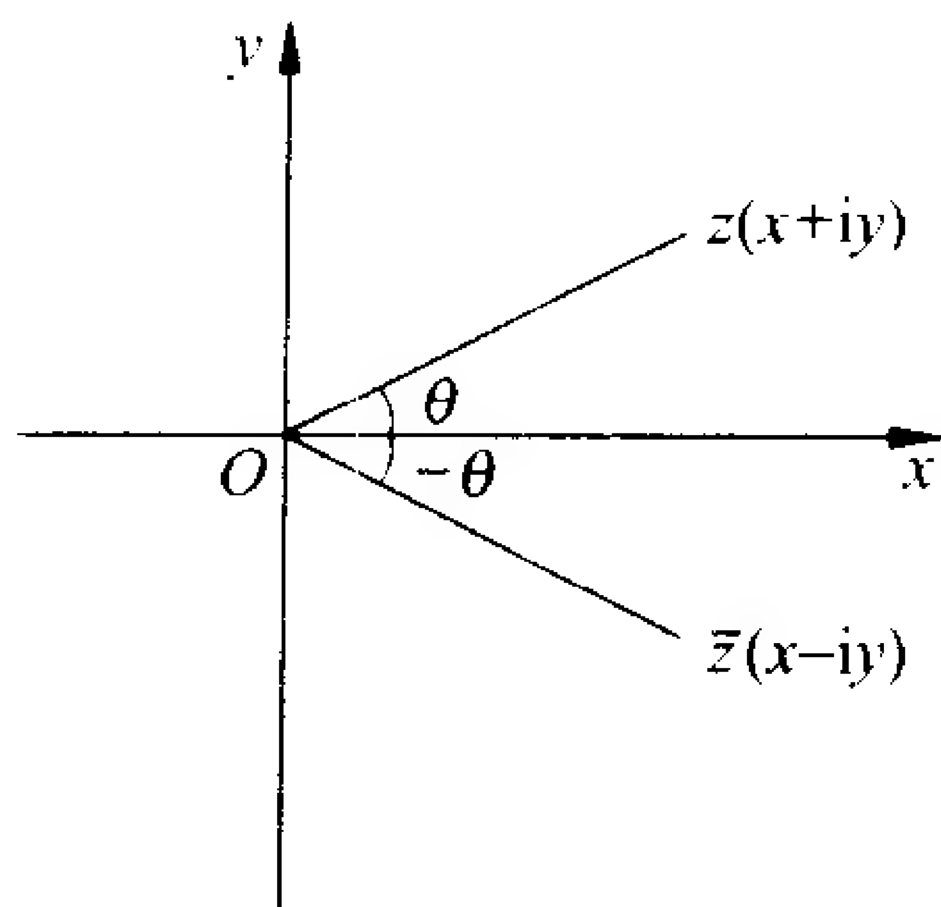


图 Ⅲ-2 共轭复数

Ⅲ.2 复数的运算

1. 复数的加法

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \end{aligned} \qquad (\text{Ⅲ-6})$$

2. 复数的减法

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \end{aligned} \qquad (\text{Ⅲ-7})$$

复数的加法和减法与向量的加法和减法一致。复数只是表明平面上一个点,因此并无大小可言。

3. 复数的乘法

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \qquad (\text{Ⅲ-8})$$

或写作 $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ (Ⅲ-9)

4. 复数的除法

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (Ⅲ\text{-}10)$$

或可写为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (Ⅲ\text{-}11)$$

5. 复数的乘方

$$z_1^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \qquad (Ⅲ\text{-}12)$$

6. 复数的对数

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \qquad (Ⅲ\text{-}13)$$

7. 复数乘以 i

由于 $e^{i(\frac{\pi}{2})} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$，因而 i 可以看成一个复数，只不过位于 y 轴上。复数 z 乘以 i 并不改变其模而只是其幅角增加一个 $\frac{\pi}{2}$，也就是原来的复数逆时针转一个 $\frac{\pi}{2}$ 角度。

所以 $iz = e^{i(\frac{\pi}{2})} \cdot re^{i\theta} = re^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ (Ⅲ-14)

8. 复数的倒数

设复数为 $z = re^{i\theta}$，则其倒数为

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \qquad (Ⅲ\text{-}15)$$

$\frac{1}{z}$ 在图上的位置，为图 Ⅲ-3 所示的 Q 点。说明如下：以原点 O 为中心绘半径等于 1 的圆；在 Oz 线上取一点 Q'，使

$$OQ' \cdot Oz = 1$$

则 Q' 点称为 z 点相对于半径为 1 的圆周的反演点，也称为镜像点，Q' 点用复数表示为 $\frac{1}{r}e^{i\theta}$；与 Q' 点共轭的点，也就是 Q' 点对于以 x

轴($y=0$)为镜面的镜像点为Q,用复数表示则为$\frac{1}{r}e^{-i\theta}$,即$\frac{1}{z}$的位置。而Q'点应为$\frac{1}{\bar{z}}$的位置。

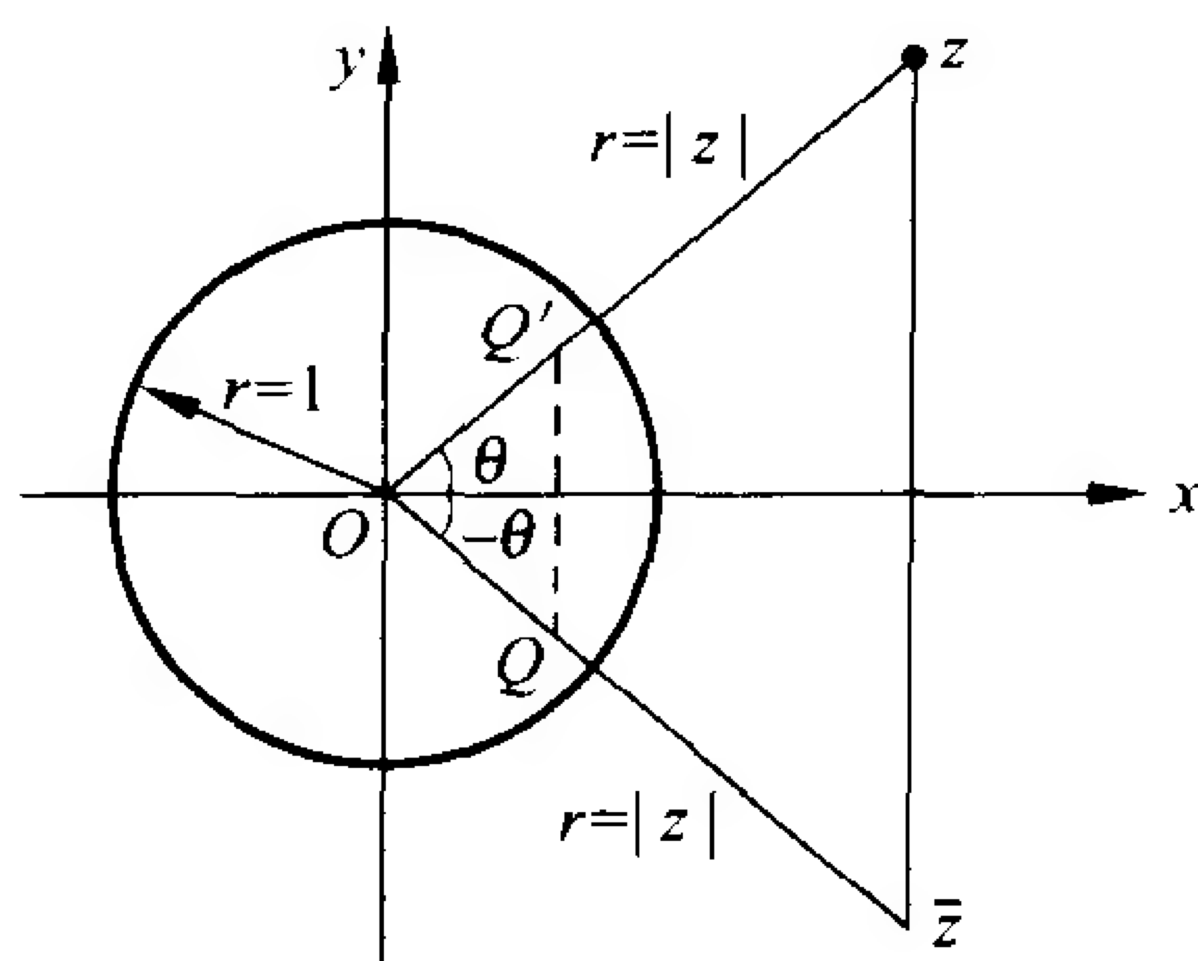


图 Ⅲ-3 复数的倒数

如果圆周半径为a,圆周外一点z,$|z|>a$。z点相对于半径为a的圆周的反演点位于$\frac{a^2}{\bar{z}}$,该点的模为$\frac{a^2}{r}$。

9. 点积与叉积

复数代表一个向量,两个向量的点积与叉积可以复数运算关系表示。

设 $z_1=x_1+iy_1=\boldsymbol{Oz}_1$,$z_2=x_2+iy_2=\boldsymbol{Oz}_2$

则
$$\begin{aligned} z_1\cdot\bar{z}_2 &= (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) \\ &= (x_1x_2+y_1y_2)-i(x_1y_2-x_2y_1) \\ &= \boldsymbol{Oz}_1\cdot\boldsymbol{Oz}_2-i\,|\boldsymbol{Oz}_1\times\boldsymbol{Oz}_2| \end{aligned} \tag{Ⅲ-16}$$

于是两个向量的点积$\boldsymbol{Oz}_1\cdot\boldsymbol{Oz}_2$就是$z_1\bar{z}_2$中的实部,两个向量叉积的绝对值$|\boldsymbol{Oz}_1\times\boldsymbol{Oz}_2|$为$z_1\bar{z}_2$中的虚部。

Ⅲ.3　复变函数

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 中的 x 和 y 为变数时，z 称为复变数(complex variables)。如果另一个复变数 w 与 z 有函数关系，$w = F(z)$，则 w 称为 z 的复变函数。注意：这里的函数着重说明复变数与另一复变数之间一一对应的关系。

例如：

$$w = F(z) = \phi + \mathrm{i}\psi$$

则

$$w = \phi + \mathrm{i}\psi = f_1(x, y) + \mathrm{i}f_2(x, y) \qquad (Ⅲ\text{-}17)$$

可见：给定一个复变函数 $w = F(z)$，就等于给定两个含有两实变数的函数 $\phi = f_1(x, y)$，$\psi = f_2(x, y)$。如果把 z 安置在一个复数平面上，把 w 安置在另一个复数平面上，则这个复变函数就可以看作：把 z 平面上的点的集合 M 映到 w 平面上点的集合 N 上的某一个映射或称变换。

Ⅲ.4　解析函数

如果函数 $F(z)$ 规定在 z_0 的某一个邻域内(包括 z_0 点本身)，并且

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = F(z_0) \qquad (Ⅲ\text{-}18)$$

则函数 $F(z)$ 就称为在点 z_0 处是连续的。显然，要 $F(z)$ 在点 z_0 处连续，其必要和充分条件是 $\phi = f_1(x, y)$，$\psi = f_2(x, y)$ 这两个函数都在点(x_0, y_0) 处连续。

设函数 $F(z)$ 是规定在点 z 的某一个邻域内的，如果极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \qquad (Ⅲ\text{-}19)$$

存在，则 $F(z)$ 在点 z 处是可微的，这个极限称为函数 $F(z)$ 在点 z_0 处的导数，记作 $F'(z)$。在一个区域 D 的每一点处都可微的函数称为在这个区域内的解析函数(analytic function)。注意：这里所讨论的函数都是假定为单值的。

设函数 $F(z)=\phi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$，规定在点 z 的某一邻域内，而且 $\phi(x,y)$，$\psi(x,y)$ 两个函数在点 z 处都是可微的，复变函数 $F(z)$ 在点 z 处可微的必要与充分条件是在此点处

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{Ⅲ-20}$$

这两个等式(Ⅲ-20)成立，称为柯西－黎曼条件。

现证明其必要性，设

$$F'(z)=\lim_{\Delta z}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} \tag{a}$$

存在。假定点 $z+\Delta z$ 沿平行于实轴的直线而趋于 z 点，也就是说 $\Delta z=\Delta x\to 0$，Δx 始终保持为实数，于是得到

$$\begin{aligned}F'(z)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y)}{\Delta x}\\&\quad+\mathrm{i}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\psi(x+\Delta x,y)-\psi(x,y)}{\Delta x}\\&=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned} \tag{b}$$

再假定 $z+\Delta z$ 沿平行于虚轴的直线而趋于 z 点，也就是说 $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y$，而且 $\Delta y\to 0$，Δy 始终保持为实数，于是得到

$$\begin{aligned}F'(z)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\phi(x,y+\Delta y)-\phi(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}\\&\quad+\mathrm{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\psi(x,y+\Delta y)-\psi(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}\\&=-\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\end{aligned} \tag{c}$$

比较式(b)与(c)，知

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{d}$$

由此得

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{Ⅲ-20′}$$

即柯西 - 黎曼条件。

可以证明任意两个正交方向，都可以得到柯西 - 黎曼条件。所以解析函数的一个特点：就是函数的导数 $F'(z)=\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ 与求导的方向无关，因此 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=\cdots$。

由式(Ⅲ-20) 的第一等式对 x 求导与第二等式对 y 求导相加，可以得到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0 \tag{Ⅲ-21}$$

同样，由式(Ⅲ-20) 的第一等式对 y 求导与第二等式对 x 求导相减，可以得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \tag{Ⅲ-22}$$

可见：任何解析函数 $F(z)=\phi+\mathrm{i}\psi$ 都满足拉普拉斯方程，拉普拉斯方程的解都是调和函数(harmonic function)，所以 $\phi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都是调和函数。

Ⅲ.5 奇点

对于函数 $F(z)$，奇点就是这样的一个点，在该点处 $F(z)$ 不是解析的。如果 $F(z)$ 在 z_0 点不解析，但在 z_0 的邻域 $F(z)$ 都是解析函数，z_0 就称为 $F(z)$ 的孤立奇点(isolated singular point)。从物理上看，奇点一般是在理论上流速趋于无穷大或等于零的点。

Ⅲ.6 科西定理

如果函数 $F(z)$ 在一个单连通域 D 内是解析的，则该域内两点之间曲线积分 $\int_A^B F(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关。由此得到

$$\oint_L F(z)\mathrm{d}z=0 \tag{Ⅲ-23}$$

即当 $F(z)$ 在单连通域 D 内解析，则沿任意一条在 D 内的封闭曲线 L 的积分都等于 0，称为科西定理(Cauchy's theorem)。

Ⅲ.7　复变函数的高阶导数

如果 $F(z)$ 在以 L 为封闭边界的域 D 内是解析的，那么它在 D 内的每一点处都具有各阶导数，并且也都是解析的。n 阶导数可用下式表示：

$$F^{(n)}(z_0)=\frac{\mathrm{d}^nF}{\mathrm{d}z^n}(z_0)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\quad n\geqslant 1 \tag{Ⅲ-24}$$

而且函数在 z_0 点可表示为

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{F(z)}{(z-z_0)}\mathrm{d}z \tag{Ⅲ-25}$$

Ⅲ.8　用级数表示解析函数

1. 泰勒级数

如果函数 $F(z)$ 在任何一个以点 z_0 为中心的开圆内($r<r_0$)是解析的，都可用泰勒级数来表示。

$$F(z)=F(z_0)+(z-z_0)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2}(z_0)+\cdots \tag{Ⅲ-26}$$

当 $z_0=0$ 时，这种特殊情况下的级数称为麦克劳林级数(Maclaurin's series)。

下面列出几个初等函数的泰勒展开式：

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\qquad \text{对任何 } z \text{ 值收敛} \tag{Ⅲ-27}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\qquad \text{对任何 } z \text{ 值收敛} \tag{Ⅲ-28}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\qquad \text{对任何 } z \text{ 值收敛} \tag{Ⅲ-29}$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots \qquad 对|z|<1 收敛 \quad (Ⅲ\text{-}30)$$

$$(1+z)^a=1+az+\frac{a(a-1)}{2!}z^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3+\cdots$$

$$对|z|<1 收敛 \quad (Ⅲ\text{-}31)$$

2. 罗朗级数

泰勒级数是用来表示圆形区域内的解析函数。罗朗级数则是用来表示一个环形区域内的解析函数。

设函数 $F(z)$在 $r_0<r<r_1$ 的环形区域内处处解析，环形的中心点位于 z_0，则 $F(z)$可以下列级数展开：

$$F(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

$$C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{F(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi, n=1,2,3,\cdots$$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{F(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi, n=0,1,2,\cdots$$

或写为

$$F(z)=\cdots+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)}+C_0$$

$$+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\cdots \quad (Ⅲ\text{-}32)$$

式中：L_0 表示 $r=r_0$ 的内边界；L_1 表示 $r=r_1$ 的外边界。

$f_1(z)$部分称为罗朗级数的主要部分(principal part)而 $f_2(z)$称为罗朗级数的正则部分(regular part)。罗朗级数当 $r_0\to 0$，则主要部分消失，从而变为泰勒级数。

如果把 $f_1(z)$与 $f_2(z)$写为统一的形式，可以得到

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \quad (Ⅲ\text{-}33)$$

两个圆周 L_0 与 L_1 可以用任一圆周 r：$|z-z_0|=\rho$ 来代替，于是

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_r\frac{F(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (\text{Ⅲ-34})$$

即为罗朗展开式。

Ⅲ.9 留数定理

设点 z_0 是函数 $F(z)$的一个孤立奇点，r 是以 z_0 为圆心的某一个足够小的圆周，$|z-z_0|=\rho$，则数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_r F(z)dz \qquad (\text{Ⅲ-35})$$

称为 $F(z)$在奇点 z_0 处的留数，记作 $\text{res}F(z)$。当 ρ 足够小时，留数的值与 ρ 无关。

由式(Ⅲ-34)，当 $n=-1$ 可导出

$$\text{res}F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_r F(z)dz=C_{-1} \qquad (\text{Ⅲ-36})$$

就是说：函数 $F(z)$在一个奇点 z_0 处的留数等于 $F(z)$在 z_0 的邻域内的罗朗展开式中-1次幂项的系数(C_{-1})。

设函数 $F(z)$在区域 D 的边界 L 上连续，在区域的内部除了有限多个奇点 $z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n$ 外，处处解析，则

$$\int_L F(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{res}F(z_k) \qquad (\text{Ⅲ-37})$$

此式称为留数定理。

留数定理的重要性在于它使得一个大范围内的量(如沿一条有限的闭曲线的积分)的计算化成对一些小范围内的量(如留数)的计算。

Ⅲ.10 奇点的类型

为了计算解析函数在某些奇点如 z_0 处的留数，须将孤立奇点 z_0 按 $F(z)$在其邻域中的情况分为三种类型：

1. 可去奇点(removable singularity)

如果 $F(z)$在孤立奇点 z_0 处有一个有限的极限$\lim\limits_{z\to z_0}F(z)$存在，$z_0$ 称为可去奇点。这时 $F(z)$在 z_0 的邻域的罗朗展开式中不含主要部分。

2. 极点(pole)

如果当 z 趋近于 z_0 时，函数 $F(z)$是无限大，即

$$\lim_{z\to z_0}F(z)=\infty$$

则 z_0 称为极点。在 z_0 的邻域内函数 $F(z)$的罗朗展开式的主要部分只包含有限多个项，即

$$F(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

这个展开式中最先的负幂次项的次数 m 即为极点的阶(order)。如果 z_0 是 m 阶极点，则$(z-z_0)^mF(z)$为解析的。

如果罗朗级数的主要部分只包含与$(z-z_0)$成比例的一个项，也就是说 $m=1$，则 z_0 称为简单极点(simple pole)。

3. 本性奇点(essential singularity)

如果一个函数在 z_0 点邻域内展开为罗朗级数，该罗朗级数的主要部分中包含有无穷多个项，也就是式(Ⅱ-34)中有无穷多个 C_{-n}，则称 z_0 为函数 $F(z)$的一个本性奇点。对于本性奇点$\lim\limits_{z\to z_0}F(z)$不存在。

如果奇点的邻域中函数不是单值的，称这种奇点为分支点。

Ⅱ·11　留数的计算

解析函数 $F(z)$在奇点 z_0 处的留数可用以下方法进行计算。

(1) 在 z_0 处展开函数 $F(z)$为级数，级数中$\frac{1}{z-z_0}$项的系数 C_{-1}即为留数。这是计算留数的基本方法，对各种奇点普遍适用。

(2) 如 z_0 为 m 阶极点，留数为

$$\mathrm{res}F(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m F(z)] \quad (Ⅲ\text{-}38)$$

(3) 如 z_0 为简单极点，留数为

$$\mathrm{res}F(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)F(z) \quad (Ⅲ\text{-}39)$$

(4) 如函数 $F(z)$ 为两个在点 z_0 邻域处解析函数的商，$F(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$，且 $q(z_0)=0$，$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}(z_0)\neq 0$，$p(z_0)\neq 0$，留数为

$$\mathrm{res}F(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{p}{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}} \quad (Ⅲ\text{-}40)$$

(5) 可去奇点的留数为零。

参考书目

[1] 陈玉璞. 流体动力学. 南京：河海大学出版社，1990

[2] H. E. 柯钦，И. A. 基别里，H. B. 罗斯. 理论流体力学. 北京：高等教育出版社，1957

[3] 清华大学水力学教研组编，董曾南主编. 水力学(上册). 北京：高等教育出版社，1995

[4] 清华大学水力学教研组编，余常昭主编. 水力学(下册). 北京：高等教育出版社，1996

[5] 清华大学工程力学系编. 流体力学基础. 北京：机械工业出版社，1980

[6] 吴望一. 流体力学. 北京：北京大学出版社，1983

[7] 夏震寰. 现代水力学. 北京：高等教育出版社，1992

[8] 张兆顺，崔桂香. 流体力学. 北京：清华大学出版社，1999

[9] Batchelor G K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press，1967

[10] Curle N and Davies HJ. Modern fluid dynamics. Vol. 1，D. Van Nostrand Company Ltd.，1968

[11] Currie I G. Fundamental mechanics of fluids. Mc Graw-Hill Inc,1974
[12] Lamb H. Hydrodynamics. Dover Publications,1932
[13] Landau L D and Lifshitz E M. Fluid Mechanics. Pergamon Press,1959
[14] Kundu Pijush K. Fluid Mechanics. Academic Press Inc,1990
[15] Milne -Thomson L M. Theoretical Hydrodynamics. 5th ed. Revised. The Macmillian Press Ltd,1979
[16] Peterson A R. A first course in fluid dynamics. Cambridge University Press,1983
[17] Prandte L. Essentials of Fluid Dynamics. Hafner Publishing Company, 1952
[18] Rouse H. Advanced Mechanics of Fluid. John Wiley & sons,Inc. ,1959
[19] Shivamoggi Bhimsen K. Theoretical Fluid Dynamics. John Wiley & sons, Inc. ,1998
[20] Streeter victor L. Fluid Dynamics. Mc Graw-Hill Book company, Inc. ,1948
[21] Tritton D J. Physical Fluid Dynamics. Clarendon Press,1988
[22] Yih Chia-shun. Fluid Mechanics. West River Press,1979

名 词 索 引

（按汉语拼音顺序排列）

A

爱因斯坦求和约定	Einstein summation convention	14,454
阿基米德原理	Principle of Archimedes	86

B

巴特勒球定理	Butler's Sphere Theorem	296
巴斯加原理	Pascal principle	82
白金汉 π 定理	Buckingham π-theorem	100,107
摆动水跃	oscillating jump	351
半体	half body	287
包线	envelope	412
保角变换	comformal transformation	226
保守力	conservative force	60
本构方程	constitutive equation	51
本性奇点	essential singularity	482
比定容热容	specific heat capacity at constant volume	9
比定压热容	specigic heat eapacity at constant pressure	9
比能	specific energy	329
比拟	analogy	120
比容	specific volume	149
边界层	boundary layer	42,134,146
边值问题	boundary value problem	280
变换	transformation	224,476

变态模型	distorted model	376
标量	scalar	449
标准大气压强	standard atmosphere	81
表面张力	surface tension	385
表面张力波	capillary wave	432
表面重力波	surface gravity wave	379
并矢	dyad	458
波长	wave length	366,379
波陡	wave steepness	380
波峰	wave crest	379
波幅	wave amplitude	366,380
波幅谱	amplitude spectrum	415
波腹	anti—nodes	406
波高	wave height	379
波谷	wave trough	379
波角	wave angle	362,435
波浪射线	wave ray	419
波浪浅化	wave shoaling	419
波浪中线	*mean watel level*	380
波能	wave energy	404
波前	wave front	361
波群	wave group	413
波数	wave number	380
波数守恒	conservation of crests	419
波束	wave packet	415
波纹	wave pattern	430
波周期	wave period	379
波状水跃	undular jump	350
伯努利常数	Bernoulli constant	62
伯努利方程	Bernoulli equation	9,60,62
伯努利积分	Bernoulli integral	62

薄壁堰	sharp-crested weir	345
不可压缩流体	incompressible fluid	18
不恒定伯努利常数	unsteady Bernoulli constant	67
布拉休斯关于柱体受力的第一定律	Blasius first theorem for force on a body	203
布拉休斯关于柱体受力的第二定律	Blasius second theorem for force on a body	203
不连续波	discontinuous wave	367
不完全驻波	partial standing wave	411
布耶尔克涅斯定理	Bjerkness principle	150

C

测管水头	piezometric head	71
侧面边界条件	lateral boundary condtion	387
层流	laminar flow	126
长波	long wave	395
长度比尺	length scale	114
场	field	449
超高	wave set up	380
超音速	supersonic	328
触变性流体	thixotropic fluid	7
船池	towing tank	112
船体尾流	wake flow	444
船行波	ship waves	435
船行波波纹	ship-wave pattern	436
重复指标	repeated index	454

D

达朗贝尔疑题	D′Alembert paradox	196,304
单位	unit	102
单位向量	unit vector	465
单位张量	Kronecker delta	48,50,456
当地变化率	local derivative	14

导热系数	thermal conductivity	57
等熵流场	isentropic flow field	78
等势线	equipotential line	173
等温流场	isothermal flow field	78
狄利克雷条件	Dirichlet condition	171,383
点涡	point vortex	157
定倾半径	metacentric radius	92
定倾高度	metacentric height	89
定倾中心	metacenter	89
动量方程	momentum equation	46
动量通量张量	momentum flux tensor	47
动水压强	hydrodynamic pressure	74
短峰波	short-crested wave	418
断波	surge	367
断面比力	specific force	353
断面环流	circulation current	360
	E	
二次流动	secondary current	361
	F	
反射	reflection	416
反射波	reflection wave	405
反射系数	reflection coefficient	405
非恒定急变流动	rapidly varied unsteady flow	367
非恒定渐变流动	gradually varied unsteady flow	367
非粘性流体	inviscid fluid	11
非牛顿流体	non—Newtonian fluid	6
分离变量法	separation of variables	280
分支点	branch point	235,482
防波堤	breakwater	411
浮力	buoyancy	86
浮体	floating body	87

浮心	center of buoyancy	86
幅角	argument	178,473
辐射条件	radiation condition	426
弗劳德数	Froude number	125,328
复变函数	complex Function	167,476
复变数	complex variable	476
复势	complex potential	177
复数	complex number	472
复速度	complex velocity	178
辅助平面	auxiliary plane	225
附加质量张量	added mass tensor	310
负断波	negative surge	371
附着涡	bound vortex	251
	G	
高斯公式	Gauss equation	17,452
高斯积分定理	Gauss' integral theorem	300
格林第一恒等式	Green's first identity	300
格林第二恒等式	Green's second identity	300
格林第三恒等式	Green's third identity	302
格林互逆定理	Green's reciprocal theorem	300
各向同性	isotropic	51
攻角	attack angle	220
共轭复数	conjugate complex number	473
共轭函数	conjugate function	183,207
共轭水深	conjugate depths	349
孤立奇点	isolated singular point	478
惯性矩	inertia moment	91
惯性水头	inertia head	369
惯性中心	center of inertia	89
国际单位制	International System of units	102

过渡段	transitory zone	337

H

哈密尔顿算子	Hamilton operator	14,450
海墙	seawall	411
亥姆霍兹方程	Helmholtz equation	427
亥姆霍兹速度分解定理	Helmholtz velocity decomposing theorem	37
亥姆霍兹涡量方程	Helmholtz vorticity equation	136
横波	transverse wave	437
恒定流动	steady flow	60
后缘	trailing edge	219
滑移	slip	146
环量	circulation	26
缓流	subcritical flow	323
回复力	restoring force	379
汇	sink	26,181

J

激波	shock wave	361
极曲线	drag polars	223
极点	pole	482
急变流动	rapidly varied flow	69
急流	supercritical flow	323
几何阴影区	geometric shadow	425
迹线	path line	19
简单极点	simple pole	482
渐变流动	gradually varied flow	69
降水曲线	drawdown curve	341
交义波	cross wave	361
阶	order	456,482
节点	nodes	406

解析函数	analytic function	476
解析延拓	analytical continuation	303
进行波	progressive wave	391
静水压强	hydrostatic pressure	74
绝对压强	absolute pressure	81
均匀流动	uniform flow	70,332

K

开尔文定理	Kelvin theorem	141
开尔文楔形域	Kelvin wedge	437
科氏加速度	Coriolis acceleration	152
科氏力	Coriolis force	65,154
柯西—黎曼条件	Cauchy—Riemann condition	167,477
柯西数	Cauchy number	127
可去奇点	removable singularity	482
控制体	control volume	15
库塔—儒可夫斯基定律	Kutta—Joukowski law	216
库塔—儒可夫斯基升力	Kutta—Joukowski lift	216
库塔—儒可夫斯基条件	Kutta—Joukowski condition	244
快艇	speed boat	442
溃坝波	dam break wave	367

L

l 阶勒让德多项式	Legendre's polynomial of order l	282
拉格朗日定理	Lagrange theorem	142
拉格朗日法	Lagrangian discription	12
拉格朗日流函数	Lagrange stream function	274
拉普拉斯方程	Laplace equation	40,162
拉普拉斯算子	Laplace operator	40,55
拉梅系数	Lame coefficient	465
兰金体	Rankine body	291
兰姆—葛罗米柯方程	Lamb—Громеko equation	61
勒让德方程式	Legendre's equation	281

雷诺输运方程	Reynolds transport equation	16
雷诺数	Reynolds number	42,111,126
理想宾厄姆流体	ideal Bingham fluid	7
理想流体	ideal fluid	11
力	force	42
力势函数	force potential function	61
立体角	solid angle	301
连续方程	continuity equation	17
连续介质假设	continuum hypothesis	5
连续波	continuous wave	367
量纲	dimension	63,100
量纲分析	dimensional analysis	99
量纲和谐原理	The principle of dimensional homogeneity	104
临界冲角	critical attack angle	223
临界底坡	critical slope	335
临界流	critical flow	327
临界流速	critical velocity	327
临界水深	critical depth	331
留数	residue	203,481
留数定理	residue theorem	201
流动性	fluidity	2
流管	stream tube	25
流函数	stream function	171
流量系数	discharge coefficient	347
流速势	velocity potential	39
流速势函数	velocity potential function	167
流速水头	velocity head	63
流态	flow regime	323
流体	fluid	1
流体线	material line	140

流体质点	fluid particle	4
流网	flow net	174
流线	streamline	19
流线型体	streamlined body	295
罗宾条件	Robin condition	171
罗朗级数	Laurent series	480
螺旋流动	spiral flow	31,356

M

马赫数	Mach number	10,127,328
马赫锥	Mach cone	328
麦克劳林级数	Maclaurin's series	479
曼宁公式	Manning formula	105,334
贸易风	trade wind	151
密度	density	4
面积力	surface force	44
明槽水流运动	open channel flow	313
模	modulus	178,472
模型	model	127

N

纳维—斯托克斯方程	Navier—Stokes equation	54
内波	internal wave	379
内能	internal energy	63
能量通量	energy flux	404
拟塑性流体	pseudoplastic fluid	7
粘度(粘性系数)	coefficient of viscosity	2
粘性	viscosity	5
粘性流体	viscous fluid	11
粘性应力张量	viscous stress tensor	50
粘性阻力	viscous drag	443
凝聚态	condensed state	3
牛顿流体	Newtonian fluid	6

牛顿数	Newton number	119
诺依曼条件	Neumann condition	171,383

O

欧拉法	Eulerian description	13
欧拉方程	Euler equation	59
欧拉数	Euler number	125
偶极矩	dipole strength,dipole moment	190
偶极子	doublet	190

P

膨胀性流体	dilatant	7
π定理	π-theorem	108
偏应力张量	deviatoric stress tensor	50
片涡	sheet vortex	159
频率	frequency	380
平面波	plane wave	415
平面势流	plane potential flow	167
泊松方程	Poisson equation	162

Q

奇点	singular point,singularity	157,478
岐点	cusp	438
起动涡	starting vortex	251
迁移变化率	convective derivative	14
迁移变化项	convective term	60
前缘	leading edge	219
潜体	submerged body	85
浅化系数	shoaling coefficient	424
浅水波	shallow water waves	395
强水跃	strong jump	351
球坐标	spherical polar coordinates	470
屈服点	yield point	2
趋近流速水头	approaching velocity head	348

群速度	group velocity	414

R

扰动力	disturbing force	379
绕射	diffraction	416
绕射系数	coefficient of diffraction	428
热通量	heat flux	57
容积粘度	bulk viscosity	53
儒可夫斯基变换	Joukowski transformation	233
儒可夫斯基翼型	Joukowski airfoil	265
儒可夫斯基翼型族	Joukowski family of airfoils	252
入射波	incident wave	405
弱水跃	weak jump	350

S

散度	divergence	18,451
散波	diverging wave	437
色散关系式	dispersion relation	392
色线	streak line	19
深水波	deep water wave	395
升力	lift	31,196,216
升阻比	lift/drag ratio	223
失速	stall	223
施瓦兹—克里斯托弗变换	Schwarz—Christoffel transformation	268
湿周	wetted perimeter	319
实部	real part	177,472
实数	real number	472
时间比尺	time scale	115
视质量	apparent mass	311
斯特劳哈尔数	Strouhal number	124
斯奈尔定律	Snell law	421
斯托克斯定理	Stokes' theorem	28
斯托克斯流函数	Stokes' stream function	274

水跌	hydraulic drop	343
水力半径	hydraulic radius	105,319
水力坡度	hydraulic gradient	105
水面超高	super elevation	356
水头损失	head loss	71
水跃	hydraulic jump	348
水跃长度	length of jump	349
速度比尺	velocity scale	115
算子	operator	450
塑性流体	plastic fluid	7

T

泰勒级数	Taylor series	33,389,479
梯度	gradient	450
体积力	body force	44
体积弹性模量	modulus of elasticity	8
调幅波	amplitude modulated wave	413
调和函数	harmonic function	478
调制	modulate	413
同量	idem	119
同一变换	identity mapping	233

W

弯度	camber	219
弯道	bend	356
完全反射	perfect reflection	405
完全气体	perfect gas	9
韦伯数	Weber number	127
位移波	translatory wave	367
位置水头	elevation head	63
稳定水跃	steady jump	351
稳定相	stationary phase	444
紊流	turbulent flow	126

涡	vortex	181
涡管	vortex tube	31
涡管强度	vortex strength	32
涡环	vortex ring	157
涡量	vorticity	26
涡面	vortex sheet	159
涡丝	vortex filament	32
涡通量	vorticity flux	32
涡线	vortex line	31
无穿透条件	impermeable condition	56
无滑移条件	no slip condition	55,146
无散向量	solenoidal vector	18
无涡流动	irrotational flow	29
物理平面	physical plane	225
物质导数	material derivative	14

X

系统	system	15
显著波形	significant wave	437
相差	phase shift	381
相对粗糙	relative roughness	375
相对厚度	relative thickness	219
相似原理	principle of similitude	99
相似准数	similarity parameter	119
相对压强	gage pressure	81
相位	phase	380
相位函数	phase function	393
相位速度	phase speed	380
向岸方向	onshore direction	420
向量	vector	449
向量积	cross product	466
谐波	sinusoidal wave	381

斜水跃	oblique hydraulic jump	361
斜向扩张波	oblique expansion wave	364
斜压流体	baroclinic fluid	79
谢才系数	Chezy coefficient	333
兴波阻力	wave resistance	443
形状阻力	form drag	304
虚部	imaginary part	177
旋度	curl	26,451

Y

压力中心	center of pressure	83
压强	pressure	8
压强感应系数	pressure-response function	401
压强水头	pressure head	63
压缩性	compressibility	2
亚音速	subsonic	328
雅可比行列式	Jacobian	15,460
堰	weir	345
堰顶溢流	overflow through weirs	345
沿岸方向	longshore direction	420
跃高	height of jump	349
跃后水深	sequent depth	349
跃前水深	initial depth	349
翼型	airfoil	218
翼型厚度	thickness	219
翼弦	chord	219
翼展	span	220
音速	sound speed	9
映射	mapping	224,476
应力张量	stress tensor	44
壅水曲线	backwater curve	341
有势流动	potential flow	39

有势力 potential force 316
有势向量 potential vector 38
有涡流动 rotational flow 29
源 source 26,181
圆频率 radian frequency 381
圆柱坐标 cylindrical polar coordinates 469
原型 prototype 127
元流 stream filament 25
运动粘度(运动粘性系数) kinematic viscousity 6

Z

糙率 roughness coefficient 105,334
展弦比 aspect ratio 220
张量 tensor 449
折射 refraction 416
折射系数 refraction coefficient 424
震凝性流体 rheopectic fluid 7
振动波 oscillating wave 367
正常水深 normal depth 333
正断波 positive surge 371
正交曲线坐标系 orthogonal curvilinear coordinates 463
正压流体 barotropic fluid 62,78
正则调和函数 regular harmonic function 310
置换张量 alternating tensor 26,456
中线(翼型) mean chamber line 219
重度 specific weight 63
重力波 gravity wave 432
周线 contour 219
轴对称流动 axisymmetric flow 274
主轴 principal axes 311
驻波 standing wave 406
驻点 stagnation point 9,176

驻点流动	stagnation point flow	186
自由表面	free surface	3,58,313
自由波分布函数	free-wave distribution function	436
自由涡	free vortex	184
自由指标	free index	454
总水头	total head	63
阻力	drag force	221
最大相对弯度	maximum relative camber	219
作用力比尺	force scale	115

人 名 索 引

（按汉语拼音顺序排列）

A

爱利	Sir George Biddel Airy	378

B

巴赫米切夫	Bakhmeteff B. A.	329
巴赞	Bazin H. E.	348
白金汉	Buckingham E.	100
碧丹	Giorgio Bidone	348
布里奇曼	Bridgman P. W.	103

D

丹尼尔・伯努利	Daniel Bernoulli	62
狄利克雷	Peter Gustav Lejeune Dirichlet	383

F

弗劳德	William Froude	112
傅里叶	Jean-Baptiste -Joseph Fourier	100

G

伽利略	Galileo Galilei	220

H

亥姆霍兹	Helmholtz H.	142

K

开尔文	Lord Kelvin	142,444

J

基尔比契夫	Кирпичев М. В.	120

L

兰姆	Sir Horace Lamb	378
劳斯	Hunter Rouse	106
黎曼	Riemann B.	227

M

马赫	Ernst Mach	328
米尔-汤姆逊	Milne-Thomson	212

N

纳普	Knapp Robert T.	365
牛顿	Isac Newton	5
诺伊曼	Carl Cottfried Von Neumann	383

O

欧拉	Leonhard Euler	59

R

瑞利	Lord John William Strutt Rayleigh	100
儒可夫斯基	Николаи Егорович Жуковский	100

S

圣维南	Saint -Venant	370
斯密顿	Smeaton J.	112
斯托克	Stoker J. J.	426

Y

伊本	Ippen Arthur T.	365

Z

佐默费尔德	Sommerfeld A.	426,428

[General Information]
□□=□□□□□□□_11188787
□□□□=http://hn5.5read.com/300-62/diskebg/ebg14/02/!00001.pdg

□□□□□□□□, □□□□□
□□□□□
□□□□□ 502□ ; 20cm
□□□□□000003315937
□□□□□ □□□□□□□ , 2003
□ISBN□□ 7-302-06747-3 / O35:TV131.2
□□□□□□ CNY38.00 □□□□
□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□, □□□□□. □□□□□□□. □□□□□□□, 2003.

□□□□:
□□10□□1998□□